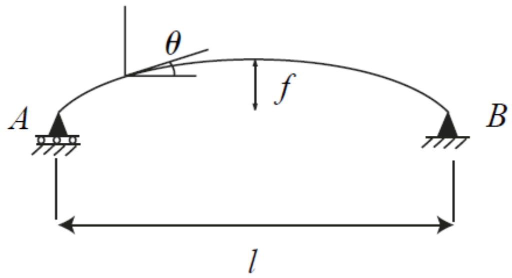
CHAPITRE 7 :

CALCUL DES STRUCTURES EN ARC

1. ARC ISOSTATIQUE

Nous définissons un arc par sa fibre moyenne, à savoir :

$$y = \frac{4f}{l}x(l-x)$$

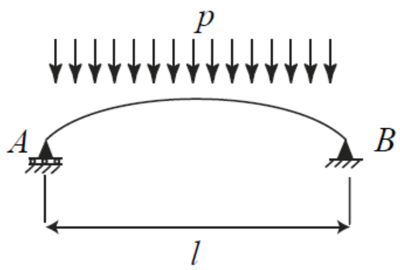


L'angle d'inclinaison de la fibre moyenne est défini par :

$$\theta = \frac{4f}{l}(l-2x)$$

1.1. Cas d'une charge uniformément répartie

p est une charge linéique.



$$V_A = V_B = \frac{pl}{2}$$

$$H_A = H_B = 0$$

$$N(x) = p\left(x - \frac{l}{2}\right)\sin\theta$$

$$V(x) = p\left(x - \frac{l}{2}\right)\cos\theta$$

$$M(x) = \frac{px(l-x)}{2}$$

Le déplacement au centre de la poutre est égal à

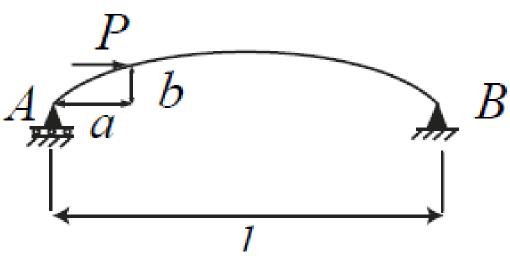
$$v(l/2) = -\frac{pfl^3}{15EI}$$

1.2. Cas d'une charge ponctuelle horizontale

$$V_A = -V_B = -\frac{Pb}{l}$$

$$H_A = 0$$

$$H_B = -P$$



- **Calcul des contraintes généralisées**
  - → **pour *x* < *a***

$$N(x) = \frac{Pb}{l}\sin\theta$$

$$V(x) = \frac{Pb}{l}\cos\theta$$

$$M(x) = -\frac{Pbx}{l}$$

→ **pour *a* < *x* < *l***

$$N(x) = \frac{Pb}{l}\sin\theta$$

$$V(x) = \frac{Pb}{l}\cos\theta$$

$$M(x) = -\frac{Pbx}{l} - P(y-b)$$

Le déplacement au centre de la poutre est égal à :

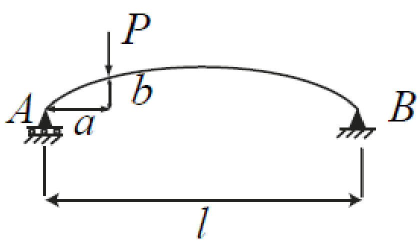
$$v(l/2) = P(l-a)\left[\frac{4f^2}{15EI}\left(2 - \frac{3a}{l} + \frac{2a^2}{l^2} + \frac{12a^3}{l^3} - \frac{8a^4}{l^4}\right) + \frac{1}{ES}\right]$$

1.3. Cas d'une charge ponctuelle verticale

$$V_A = \frac{P(l-a)}{l}$$

$$V_B = \frac{Pa}{l}$$

$$H_A = H_B = 0$$



➤ **Calcul des contraintes généralisées**

→ **pour *x* < *a***

$$N(x) = -\frac{P(l-a)}{l}\sin\theta$$

$$V(x) = -\frac{P(l-a)}{l}\cos\theta$$

$$M(x) = \frac{Px(l-a)}{l}$$

→ **pour *a* < *x* < *l***

$$N(x) = \frac{Pa}{l}\sin\theta$$

$$V(x) = -\frac{Pa}{l}\cos\theta$$

$$M(x) = \frac{Pa}{l}(l-x)$$

Le déplacement au centre de la poutre (si $a < l/2$) est égal à :

$$v(l/2) = -\frac{Pf^2a}{12EIl^4}\left(l^4 - l^3x - 8l^2x^2 + 20lx^3 - 12.8x^4\right)$$

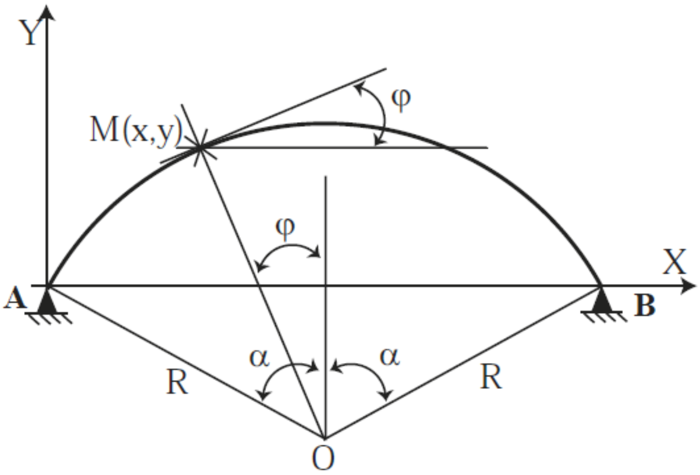
2. ARCS HYPERSTATIQUES

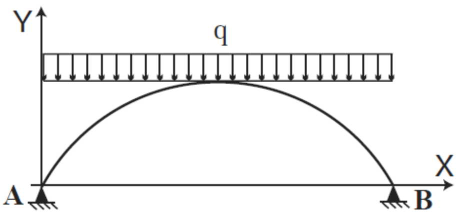
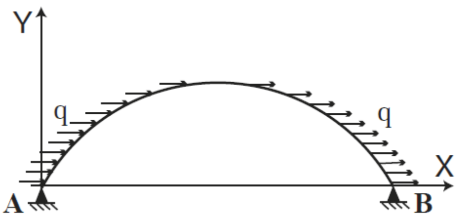
2.1. Arc circulaire à deux articulations sans tirant

Soit l'arc circulaire hyperstatique de la figure ci-dessous. La géométrie de l'arc est un cercle de centre *O* et de rayon *R*. Nous avons également les données suivantes :

– *E* : module d'élasticité du matériau de l'arc,

– *I* : moment d'inertie d'une section d'arc (considéré comme constant),
– *S* : aire d'une section d'arc (considérée comme constante),
– *G* : module de cisaillement du matériau de l'arc.



Géométrie et Chargement	Efforts et moment de flexion
	$$Y = \frac{1}{1 + \frac{1}{SR^2} \times \frac{4\alpha}{2\alpha - 3\sin 2\alpha + 4\alpha\cos^2\alpha}}$$ $$X_A = X_B = \frac{qR}{2} \times \frac{(9-4\alpha^2)\sin 2\alpha - 10\alpha\cos 2\alpha - 8\alpha}{2\alpha - 3\sin 2\alpha + 4\alpha\cos^2\alpha} Y$$ $$N(\varphi) = qR\varphi\sin\varphi + X_A\cos\varphi$$ $$M(\varphi) = qR^2(\alpha\sin\alpha - \varphi\sin\varphi + \cos\alpha - \cos\varphi) - X_A R(\cos\varphi - \cos\alpha)$$ $$V(\varphi) = -qR\varphi\cos\varphi + X_A\sin\varphi$$
	$$X_A = -X_B = -qR\alpha$$ $$N(\varphi) = qR(\sin\varphi + \varphi\cos\varphi - \alpha\cot\alpha\sin\varphi)$$ $$M(\varphi) = qR^2(\alpha\cot\alpha\sin\varphi - \varphi\cos\varphi)$$ $$V(\varphi) = qR(\alpha\cot\alpha\cos\varphi + \varphi\sin\varphi - \cos\varphi)$$

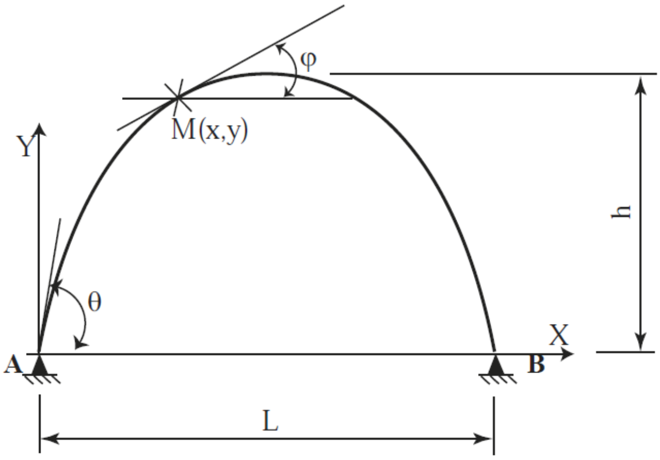
5.7.2 Arc parabolique à deux articulations sans tirant

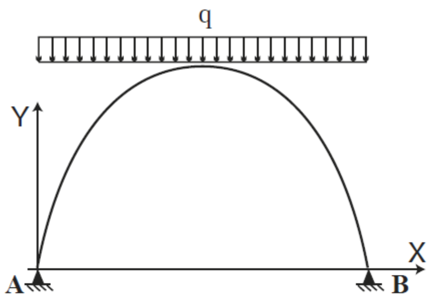
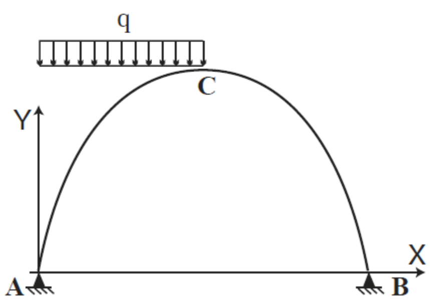
Soit l'arc parabolique hyperstatique de la figure 5.30. Nous avons les données suivantes :
– *E* : module d'élasticité du matériau de l'arc
– *I* : moment d'inertie d'une section d'arc (considéré comme constant)
– *S* : aire d'une section d'arc (considérée comme constante)
– *G* : module de cisaillement du matériau de l'arc
Les équations de la parabole sont les suivantes :

$$y = \frac{4h}{L^2}\, x(L - x)$$

$$\tan\varphi = \frac{4h}{L}\left(1 - \frac{2x}{L}\right)$$

$$\tan\theta = \frac{4h}{L}$$



Géométrie et Chargement	Efforts et moment de flexion
	$X_A = X_B = \dfrac{qL^2}{8h(1 + 15I/8Sh^2)}$ $Y_A = Y_B = \dfrac{qL}{2}\cos\theta - X_A\sin\theta$ $N(\varphi) = q\left(\dfrac{L}{2} - x\right)\sin\varphi + X_A\cos\varphi$ $M(\varphi) = \dfrac{qx(L - x)}{2} - X_A y$
	$X_A = X_B = \dfrac{qL^2}{16h(1 + 15I/8Sh^2)}$ $Y_A = q\left(\dfrac{3L}{8} - x\right)\cos\theta - X_A\sin\theta$ $Y_B = -\dfrac{qL}{8}\cos\theta - X_A\sin\theta$ $N_{AC}(\varphi) = q\left(\dfrac{3L}{8} - x\right)\sin\varphi + X_A\cos\varphi$ $N_{CB}(\varphi) = -\dfrac{qL}{8}\sin\varphi + X_A\cos\varphi$ $M_{AC}(\varphi) = \dfrac{qx}{2}\left(\dfrac{3L}{4} - x\right) - X_A y$ $M_{CB}(\varphi) = \dfrac{qx}{8}(L - x) - X_A y$