Chapitre 6 :

Poutres continues sur appuis élastiques

1. Définition et paramètres

On considère la poutre de largeur *b*, d'inertie constante, reposant sur un appui continu élastique (de type sol) de la figure 6.1

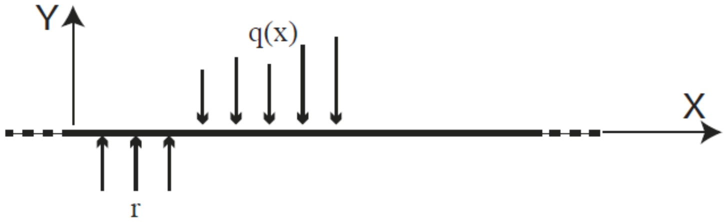


Figure 6.1

Si *y* désigne la flèche de la poutre au point d'abscisse *x*, la réaction d'appui en ce point est équivalente à une densité d'effort *r* :

$$r = -kby$$

où *b* est la largeur de la poutre supposée constante, *k* est la raideur de l'appui élastique. Si *q*(*x*) est la charge répartie appliquée à la poutre, la flèche doit satisfaire l'équation différentielle d'équilibre suivante :

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} + kby + q(x) = 0$$

Pour résoudre cette équation, on pose :

$$\frac{1}{l_e} = \sqrt[4]{\frac{kb}{4EI}} = \lambda$$

La longueur l_e est appelée longueur élastique de la poutre. Les solutions *y*(*x*), *y'*(*x*), *M*(*x*) et *V*(*x*) font intervenir des fonctions $\mathcal{W}(x)$, $\mathcal{X}(x)$, $\mathcal{Y}(x)$ et $\mathcal{Z}(x)$ suivantes :

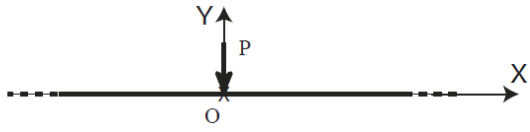
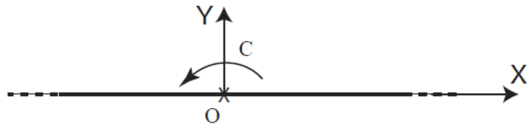
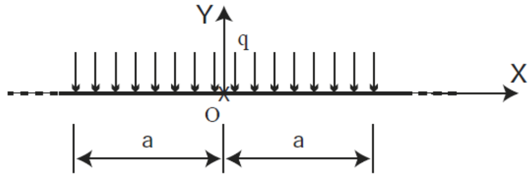
pour $x > 0$:

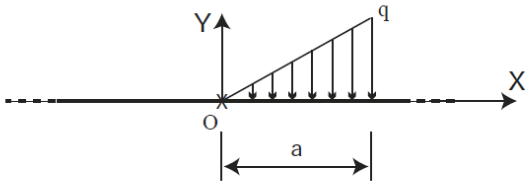
$$\mathcal{W}(x) = -e^{-\lambda x}(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$
$$\mathcal{X}(x) = e^{-\lambda x}\sin(\lambda x)$$
$$\mathcal{Y}(x) = e^{-\lambda x}(\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x))$$
$$\mathcal{Z}(x) = -e^{-\lambda x}\cos(\lambda x)$$

pour $x < 0$:

$$\mathcal{W}(x) = -e^{\lambda x}(\cos(\lambda x) - \sin(\lambda x))$$
$$\mathcal{X}(x) = e^{\lambda x}\sin(\lambda x)$$
$$\mathcal{Y}(x) = e^{\lambda x}(\cos(\lambda x) + \sin(\lambda x))$$
$$\mathcal{Z}(x) = e^{\lambda x}\cos(\lambda x)$$

2. Formulaire de la poutre infinie :

<table>
<tr><th>Géométrie et chargement</th><th>Solutions</th></tr>
<tr><td>
</td><td>$y' = \frac{P\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(x) \qquad y = \frac{P\lambda}{2kb}\mathcal{W}(x)$
$M = \frac{P}{4\lambda}\mathcal{Y}(x) \qquad V = \frac{P}{2}\mathcal{Z}(x)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>$y' = \frac{C\lambda^3}{kb}\mathcal{Y}(x) \qquad y = \frac{C\lambda^2}{2kb}\mathcal{X}(x)$
$M = \frac{C}{2}\mathcal{Z}(x) \qquad V = -\frac{C\lambda}{2}\mathcal{W}(x)$</td></tr>
<tr><td>
</td><td>pour $0 < x < a$:
$y' = \frac{q\lambda}{2kb}\left[\mathcal{W}(a+x) - \mathcal{W}(a-x)\right]$
$y = -\frac{q}{2kb}\left[2 + \mathcal{Z}(a+x) + \mathcal{Z}(a-x)\right]$
$M = \frac{q}{4\lambda^2}\left[\mathcal{X}(a+x) + \mathcal{X}(a-x)\right]$
$V = -\frac{q}{4\lambda}\left[-\mathcal{Y}(a+x) + \mathcal{Y}(a-x)\right]$
pour $x > a$:
$y' = \frac{q\lambda}{2kb}\left[\mathcal{W}(x+a) - \mathcal{W}(x-a)\right]$
$y = -\frac{q}{2kb}\left[\mathcal{Z}(x+a) - \mathcal{Z}(x-a)\right]$
$M = \frac{q}{4\lambda^2}\left[\mathcal{X}(x+a) - \mathcal{X}(x-a)\right]$
$V = -\frac{q}{4\lambda}\left[-\mathcal{Y}(x+a) + \mathcal{Y}(x-a)\right]$</td></tr>
</table>

Géométrie et chargement	**Solutions**
 	$y'(0) = -\frac{q}{2kba}\left[1 + \lambda a\mathcal{W}(a) + \mathcal{Z}(a)\right]$ $y'(a) = -\frac{q}{2kba}\left[1 - \lambda a + \mathcal{Z}(a)\right]$ $y(0) = -\frac{q}{4\lambda kba}\left[1 - \mathcal{Y}(a) + 2\lambda a\mathcal{Z}(a)\right]$ $y(a) = -\frac{q}{4\lambda kba}\left[2\lambda a - 1 + \mathcal{Y}(a)\right]$ pour $0 < x < a$: $M = \frac{q}{8\lambda^3 a}\left[\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(a-x) + 2\lambda a\mathcal{X}(a-x)\right]$ $V = \frac{q}{4\lambda^2 a}\left[\mathcal{X}(x) + \mathcal{X}(a-x) - \lambda a\mathcal{Y}(a-x)\right]$ pour $x > a$: $M = \frac{q}{8\lambda^3 a}\left[\mathcal{W}(x) - \mathcal{W}(x-a) - 2\lambda a\mathcal{X}(x-a)\right]$ $V = \frac{q}{4\lambda^2 a}\left[\mathcal{X}(x) - \mathcal{X}(x-a) - \lambda a\mathcal{Y}(x-a)\right]$

3. Formulaire de la poutre semi-infinie

Pour obtenir les déformations et les sollicitations dans une poutre semi infinie, on utilise les résultats de la poutre infinie en appliquant une force *P*0 et un couple *C*0 juste à gauche de *O* (voir figure 6.2) de telle façon que sous l'ensemble du chargement *M* et *V* soient nuls en *O*.

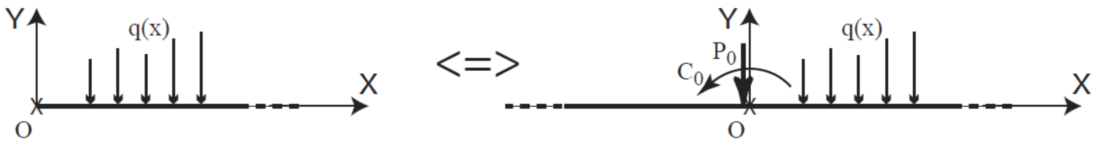


Figure 6.2

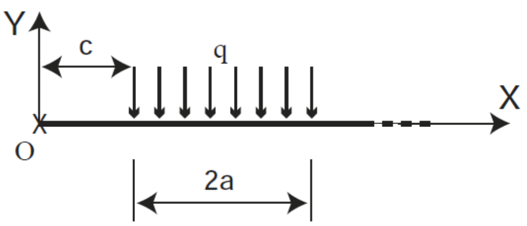
On peut écrire :

$$P_0 = 4(\lambda M_0 + V_0) \qquad C_0 = \frac{2}{\lambda}(2\lambda M_0 + V_0)$$

avec *M*0 et *V*0 le moment et l'effort tranchant dus à *q*(*s*) pour la poutre infinie juste à gauche de *O*.
On obtient alors pour la poutre semi-infinie :

$$y'(x) = y_1'(x) + \frac{P_0\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(x) + \frac{C_0\lambda^3}{kb}\mathcal{Y}(x)$$
$$y(x) = y_1(x) + \frac{P_0\lambda}{2kb}\mathcal{W}(x) + \frac{C_0\lambda^2}{kb}\mathcal{X}(x)$$
$$M(x) = M_1(x) + \frac{P_0}{4\lambda}\mathcal{Y}(x) + \frac{C_0}{2}\mathcal{Z}(x)$$
$$V(x) = V_1(x) + \frac{P_0}{2}\mathcal{Z}(x) - \frac{C_0\lambda}{2}\mathcal{W}(x)$$

avec y_1', *y*1, *M*1 et *V*1 les solutions obtenues pour la poutre infinie soumise au chargement *q*(*x*).

Géométrie et chargement	**Solutions**
	$P_0 = P[\mathcal{Y}(c) - 2\mathcal{Z}(c)]$ $C_0 = \frac{P}{\lambda}[\mathcal{Y}(c) - \mathcal{Z}(c)]$ Cas particulier $c = 0$: $y' = \frac{2P\lambda^2}{kb}\mathcal{W}(x) \quad y'(0) = \frac{2P\lambda^2}{kb}$ $y = \frac{2P\lambda}{kb}\mathcal{Z}(x) \quad y(0) = -\frac{2P\lambda}{kb}$ $M = -\frac{P}{\lambda}\mathcal{X}(x) \quad M(0) = 0$ $V = -P\mathcal{Y}(x) \quad V(0) = -P$
	$P_0 = -2C\lambda\left[\mathcal{Z}(c) + \mathcal{W}(c)\right]$ $C_0 = -C\left[2\mathcal{Z}(c) + \mathcal{W}(c)\right]$ Cas particulier $c = 0$: $y' = -\frac{4C\lambda^3}{kb}\mathcal{Z}(x) \quad y'(0) = \frac{4C\lambda^3}{kb}$ $y = -\frac{2C\lambda^2}{kb}\mathcal{Y}(x) \quad y(0) = -\frac{2C\lambda^2}{kb}$ $M = C\mathcal{W}(x) \quad M(0) = -C$ $V = 2C\lambda\mathcal{X}(x) \quad V(0) = 0$
	$P_0 = \frac{q}{\lambda}\left[\mathcal{X}(2a + c) - \mathcal{X}(c) - \mathcal{Y}(2a + c) + \mathcal{Y}(c)\right]$ $C_0 = \frac{q}{2\lambda^2}\left[2\mathcal{X}(2a + c) - 2\mathcal{X}(c) - \mathcal{Y}(2a + c) + \mathcal{Y}(c)\right]$ Cas particulier $2a = \infty$: $P_0 = \frac{q}{\lambda}\left[\mathcal{Y}(c) - \mathcal{X}(c)\right]$ $C_0 = \frac{q}{2\lambda^2}\left[\mathcal{Y}(c) - 2\mathcal{X}(c)\right]$ Cas particulier $c = 0$: $y'(x) = 0 \quad y(x) = -\frac{q}{kb}$ $M = 0 \quad V = 0$