Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf –Mila

01 ANNEE MASTER GENIE CIVIL-STRUCTURE

Mécanique des structures

LECHEHEB. M

CHAPITRE 05:

MÉTHODE DES ITÉRATIVES

INTRODUCTION :

En mathématiques, une **itération** désigne l'action de répéter un processus. Le calcul itératif permet l'application à des équations récursives.

Le terme itération est issu du verbe latin *iterare* qui signifie « cheminer » ou de *iter* « chemin ».

Le processus d'itération est employé fréquemment en **algorithmique**.

En analyse numérique, une **méthode itérative** est un procédé algorithmique utilisé pour résoudre un problème, par exemple la recherche d’une solution d’un système d'équations ou d’un problème d’optimisation. En débutant par le choix d’un *point initial* considéré comme une première ébauche de solution, la méthode procède par itérations au cours desquelles elle détermine une succession de solutions approximatives raffinées qui se rapprochent graduellement de la solution cherchée. Les points générés sont appelés des **itérés**.

On cherche à résoudre une équation de la forme :

$$Ax = b$$

Les méthodes directes fournissent la solution $\dot{x}$ en un nombre fini d'opérations. Mais :

Si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations est important, *or les erreurs de calcul dépendent directement du nombre de calculs.*

Elles utilisent des propriétés mathématiques nécessitant un calcul exact, *il est difficile de tenir compte des erreurs de calcul dans ce processus*

Donc le résultat n'est **jamais rigoureusement égal à** $\dot{x}$**.**

Il peut même en être **très différent.**

Les méthodes itératives contrastent avec les méthodes directes qui résolvent le problème en une seule étape (par exemple la solution d'un système linéaire $Ax = b$ obtenue en calculant la matrice inverse de A).

Le recours au calcul matriciel est indispensable est pratique car :

- *Cela permet une écriture compacte d'ensembles des relations devant êtres traitées simultanément*
- *Cela se prête particulièrement bien à l'utilisation du calcul par ordinateur.*

Un grand nombre de structures utilisées par les ingénieurs dans la construction sont composées d'éléments semblables relies entre eux en des points pour former les structures générales que sont les structures en treillis ou les structures en portiques. L'idée étant de considérer le comportement de chacun des « éléments » tout seul et ensuite de relier ces éléments pour reconstituer la structure réelle et ceci de façon a satisfaire au niveau de leurs jonctions a l'équilibre générale des forces en place et a la compatibilité des déplacements. Cette manière de faire réduit le nombre d'inconnue et transforme en fait les problèmes continue en un problème discret ou les inconnues (contraintes, efforts, déplacements) se situent au niveau des nœuds. Leurs résolutions ensuite se réduit a une résolution d'équation algébrique facilite grandement par les méthodes itératives (calcul matriciel).

La barre ou la poutre ainsi constitue sera analyse pour écrire de manière simple sa relation de rigidité qui est la relation entre les forces en ses nœuds et les déplacement ou degrés de libertés (ddl) en ces mêmes nœuds. Par la suite, La relation de rigidité de la structure sera obtenue par assemblage des rigidités de ses éléments par l’intermédiaire des nœuds. La relation ainsi constituée, est une relation algébrique qui sera résolu par les méthodes de calculs matriciels. Il est évident que la taille de ce genre de problème sera vite importante, d’ou la nécessite de disposer d’un moyen automatique de calcul. Le calcul matriciel s’adaptant facilement a la programmation, on voit bien que l’écriture de programme informatique sera la solution pour résoudre le problème vue la taille du calcul éventuel.

Dans la pratique le comportement structurel d'une structure composant de barres ou de poutres se traduit par une relation dite ≪ relation de rigidité ≫ ou relation de raideur. Cette relation de rigidité lie les déplacements des nœuds (ou **degré de liberté des nœuds : note** par **(ddl)) de l'élément aux forces agissants en ces mêmes nœuds. La relation de rigidité sera** en fait un ensemble de relations qui formeront un système d'équations algébriques.

Si nous prenons le cas en élasticité des petites déformations et un matériau dont la loi de comportement est la loi de Hooke, le système d'équation obtenu est un système d'équation linéaire s'écrivant sous forme matricielle (pour une barre ou pour une poutre) :

$$[K_b].\{q_b\} = \{F_b\}$$

$\{q_e\}$: Vecteur dont les composantes sont les déplacements généralisés (translations ou rotations) au niveau des nœuds de la barre ou de la poutre.

$\{F_e\}$: Vecteur dont les composantes sont les forces généralises (forces ou moment) agissants au niveau des nœuds de la barre ou de la poutre

$[K_e]$: Matrice de rigidité dont les composantes sont constantes et ne dépendent que du matériau (constantes élastiques) et de la géométrie de l'élément (forme, type, orientation) et qui lie les déplacements aux forces agissants dans ces nœuds.

par la suite pour une structure composées de plusieurs barres ou de poutres, il s'agira de retrouver la relation de rigidité de la structure complète a calculer qui sera obtenue en procédant a l'assemblage de ces barres ou de ces poutres

5.1- Notion de rigidité - Relation de rigidité

Nous allons nous intéresser pour commencer aux structures formées d'assemblage de barres et poutre (structures manipulées en RDM) et présenter leurs relations de rigidités en utilisant les méthodes matricielles.

5.1.1-Concept de Rigidité :

Pour comprendre le calcul matriciel des structures , il est nécessaire de maitriser la notion de rigidité. Pour illustrer cela, intéressons nous a une structure très simple représentée par un ressort.

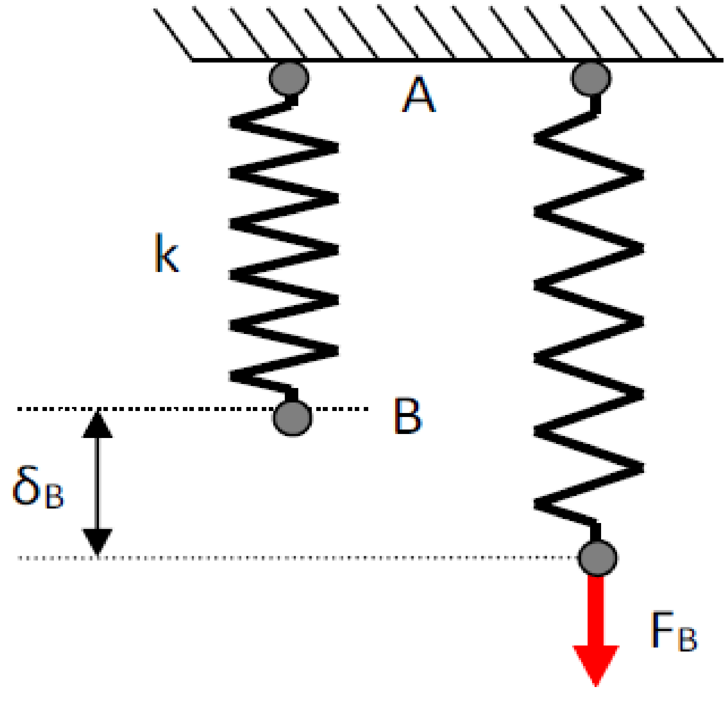


Fig 5.1 : ressort simple charge en son extrémité

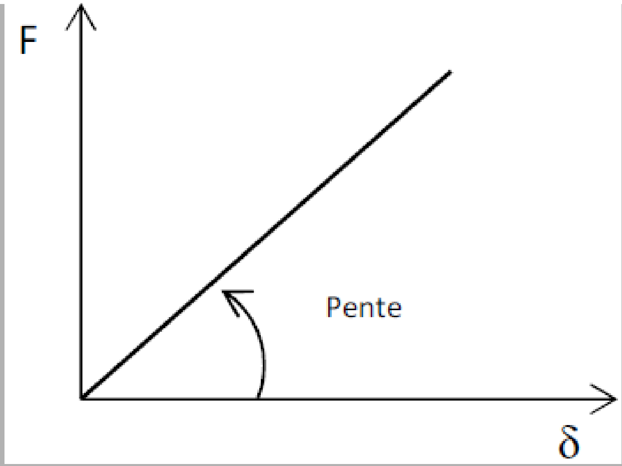
En effet le ressort possède une caractéristique appelé rigidité notée **k telle que lorsque, son extrémité A est fixe et qu'il est** soumis a son autre extrémité libre B a une force **F_B, (fig 5.1), il** s'allonge d'une longueur **δ_B selon la relation :**

$$k\,.\,\delta_B = F_B$$

Si on trace la relation entre la force F et le déplacement **δ pour** plusieurs valeurs de F (sans déformer irrémédiablement le ressort pour rester dans le domaine élastique), nous obtenons la courbe ci-contre. Ainsi :

$$k = \frac{F_B}{\delta_B}$$

Ou k représente la pente de la droite : ainsi une première définition nous donne que la rigidité est la pente de la droite dans la relation : force-déplacement.



Mais plus généralement, La **rigidité est la caractéristique d'un corps qui indique la résistance a la** déformation élastique de ce corps (comme dans notre cas de l'exemple du ressort). Elle est définie comme *la force nécessaire pour provoquer un déplacement unitaire. A l'inverse, on défini la souplesse (son inverse : 1/k) comme étant le déplacement nécessaire pour provoquer une force unitaire. Dans le cas présent il s'agit d'une rigidité de traction- compression (le ressort peut se* comprimer ou s'allonger), plus généralement on peut parler de rigidité de flexion ou de cisaillement lorsque un élément de structure subit un déplacement transversale suite une un effort transversal ou a un moment. (a voir par la suite). Dans tous ces cas, puisque la force s'exprime en Newton **(N) et le** déplacement mètre **(m), la rigidité aura pour dimension : newton par mètre (N/m).**

Pour être complet, on peut parler aussi de rigidité angulaire en torsion ou en flexion lorsqu'il s'agit de déplacement généralise de type rotation. Ce type de déplacement de rotation est provoque par un moment (ou par une force).
Ainsi la rigidité angulaire s'exprime comme :

$$k = \frac{M}{\theta}$$

M : moment, θ rotation

Dans ce cas, puisque le moment s'exprime en Newton. mètre **(N.m) et la rotation en radian (rd), la** rigidité aura pour dimension : Newton-mètre par radian : **N.m (le radian ne s'écrivant dans la dimension**)
En résume et selon le cas, connaissant la rigidité (ou la souplesse) d'un ressort, d'une barre ou d'une poutre, on peut connaitre son déplacement (sa rotation) lorsque il est soumit a une force (ou un moment).

5.1.2.Analogie avec une barre :

Si on remplace le ressort par une barre de longueur **Lo** et de section **S et de module d'élasticité E (fig.5.2), il** suffit alors de retrouver pour la barre son équivalent de la rigidité du ressort, et lui appliquer la même relation de rigidité

Notons par *kb* la rigidité (a déterminer ?) de la barre alors nous obtenons la relation de rigidité suivante qui s'appliquera de la même manière que pour le ressort

$$k_b \,.\, \delta_B = F_B$$

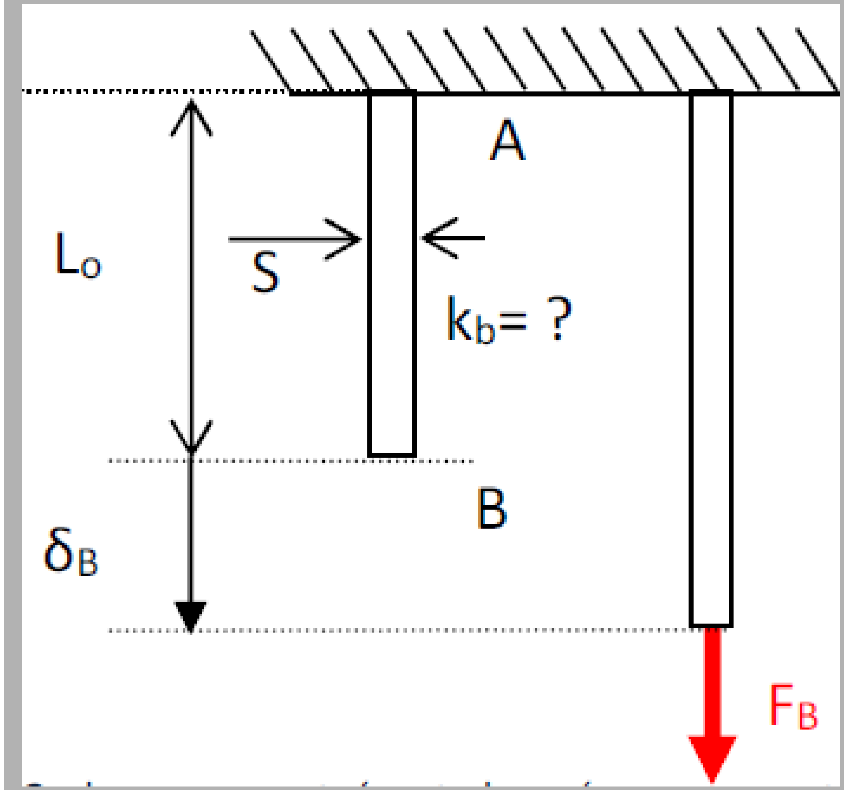


Fig 5.2 : barre encastrée et chargée en son extrémité

Remarque : nous voyons que pour une barre simple, il suffit de connaitre sa rigidité et nous pouvons ainsi calculer son déplacement axial lorsqu'elle est soumise a une charge selon son axe en utilisant sa relation de rigidité. Nous allons voir dans ce qui suit, comment utiliser ce principe simple de la relation de rigidité et de l'étendre au calcul d'une structure formée de plusieurs barres comme par exemple la structure de la figure (fig 5.3), afin de trouver la relation de rigidité de la structure elle-même et ainsi trouver ses déplacements lorsque celle-ci est soumise a système de chargement.

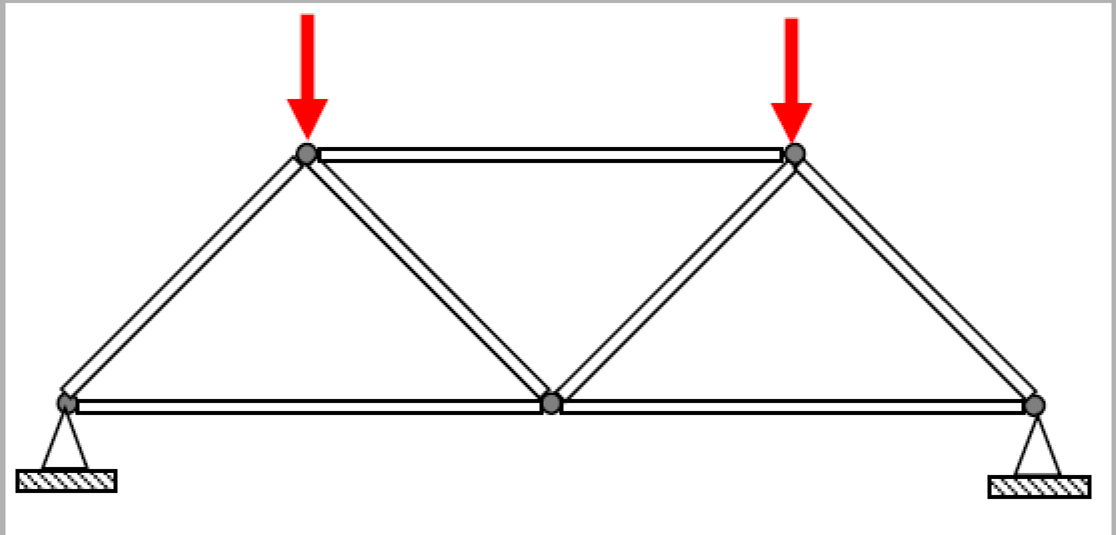
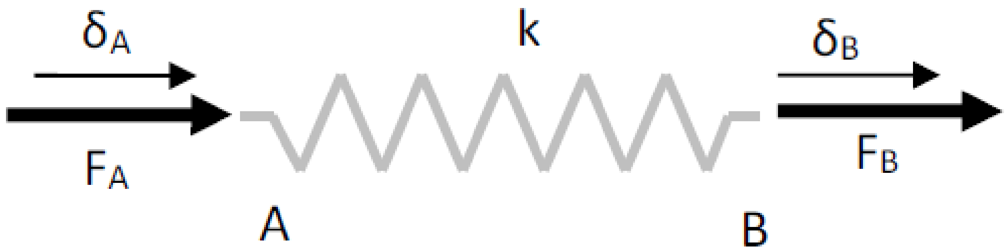


fig 5.3

5.1.3-Matrice de rigidité d’un ressort

Pour arriver a cette solution, revenons a notre ressort simple et supposons maintenant que ce ressort fasse partie d’un ensemble et que ces deux extrémités A et B sont libres et peuvent se déplacer sous l’action de forces en A et B. Notons par



F_A et δ_A : la force et le déplacement à l’extrémité A

F_B et δ_B : la force et le déplacement à l’extrémité B

Ainsi le déplacement en A ne sera plus seulement cause par la force en A mais aussi par la force en B et il en est de même pour le déplacement en B.

La force en A sera égale donc au déplacement δ_A en A par la rigidité en A notée k_{AA} et a laquelle s'ajoute forcement le déplacement δ_B en B par la rigidité en B notée k_{AB} et qui s'écrit donc

$$F_A = \delta_A . k_{AA} + \delta_B . k_{AB}$$

De même la force en B sera égale au déplacement δ_A en A par la rigidité en A notée k_{BA} a laquelle s'ajoute le déplacement δ_B en B par la rigidité en B notée k_{AB} et qui s'écrit donc

$$F_B = \delta_A . k_{BA} + \delta_B . K_{BB}$$

Si nous réécrivons ces deux équations sous forme matricielle :

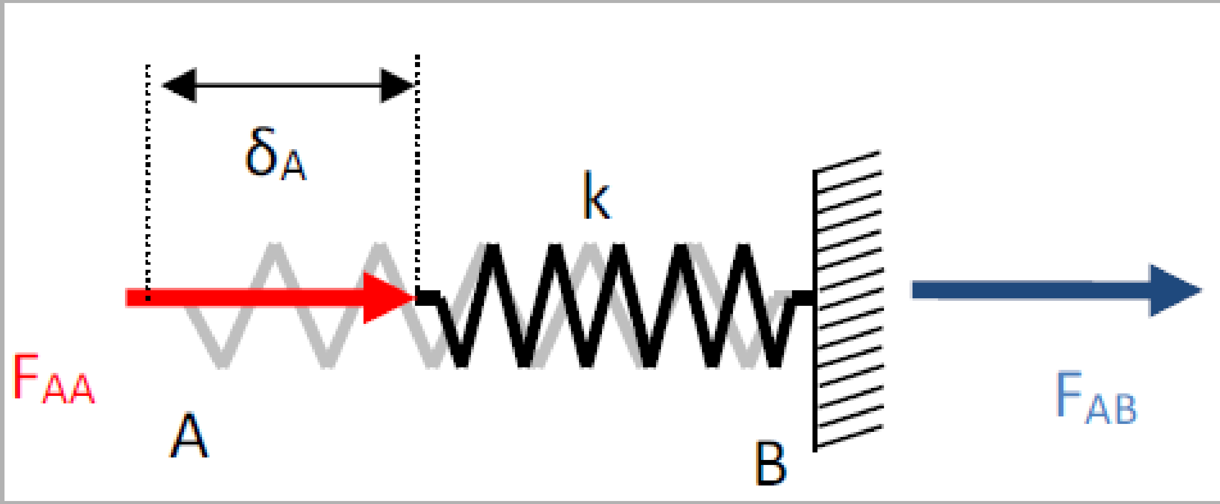
$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

On remarque que nous obtenons une relation de rigidité d'un ressort de rigidité k , dont les deux extrémités peuvent se déplacer. Il reste a déterminer maintenant les termes de rigidités inconnus $k_{AA}, k_{AB}, k_{BA}, k_{BB}$?

A partir de ce système d'équation, il est très simple de retrouver la première relation de rigidité. En effet, il suffit d'éliminer du système d'équation, l'équation donnant le déplacement en A puisque dans ce cas le déplacement en A et connu (A encastré) et est égal à zéro pour ne laisser que l'équation donnant le déplacement en B qui est la relation donnée au départ. $F_B = \delta_B . k_{BB}$

Détermination des termes de rigidités k_{AA}, k_{AB}, k_{BA}, k_{BB} :

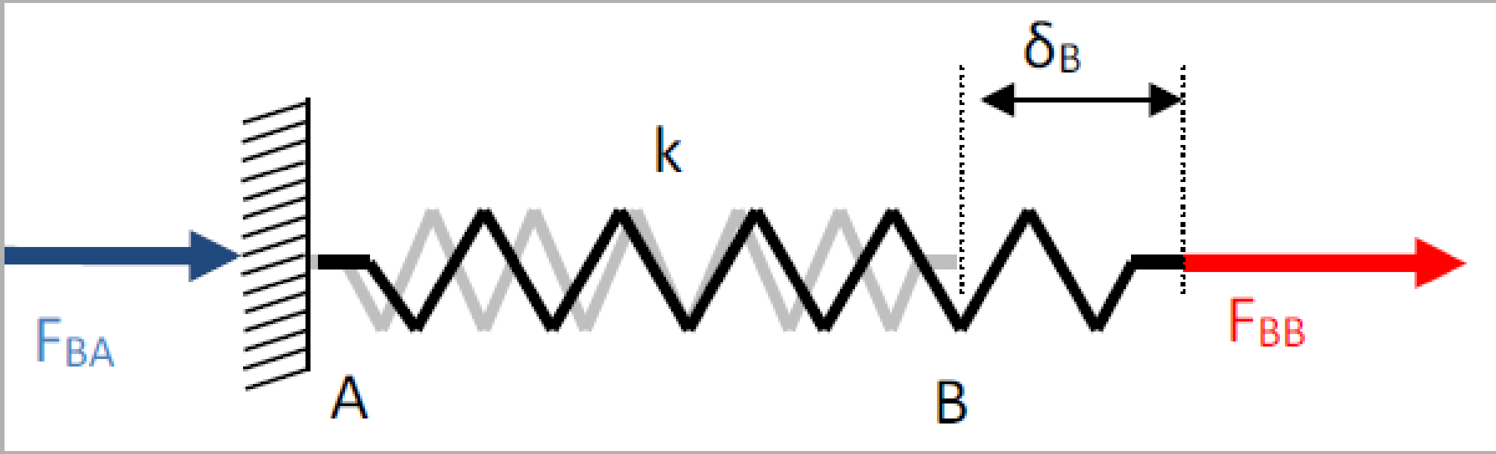
1- Nous supposons d'abord le cas ou B est fixe et que A se déplace sous l'action d'une Force F_{AA} d'un déplacement δ_A (cas initial déjà vue).



a l'équilibre : $F_{AA}+F_{AB}=0$ ainsi $F_{AA} =- F_{AB}$ sachant que le relation de rigidité appliquée au ressort de rigidité k dans cette situation (A libre et B fixe) s'écrit (déjà vue) :

$F_{AA}= k.\ \delta_A$ alors $F_{AB}= -k.\ \delta_A$

2- Nous supposons maintenant le cas contraire ou A est fixe et que B se déplace sous s l'action d'une Force F_{BB} d'un déplacement δ_B.



a l'équilibre :

$$F_{BA}+F_{BB}=0 \quad \text{ainsi} \quad F_{BB} =- F_{BA}$$

sachant que le relation de rigidité appliquée au ressort de rigidité k dans cette situation (A fixe et B libre) s'écrit :

$$F_{BB}= k.\ \delta_B \quad \text{alors} \quad F_{BA}= -k.\ \delta_B$$

Superposons maintenant les deux cas de chargement pour reconstituer le cas initial :

au point A : $F_A = F_{AA} + F_{BA} = k.\,\delta_A - k.\,\delta_B$

au point B : $F_B = F_{AB} + F_{BB} = -k.\,\delta_A + k.\,\delta_B$

et plus généralement sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

Et donc

$$\begin{bmatrix} k_{AA} & k_{AB} \\ k_{BA} & k_{BB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$$

La matrice ainsi formée représente la matrice de rigidité du ressort de rigidité k par rapport a ses deux extrémités.

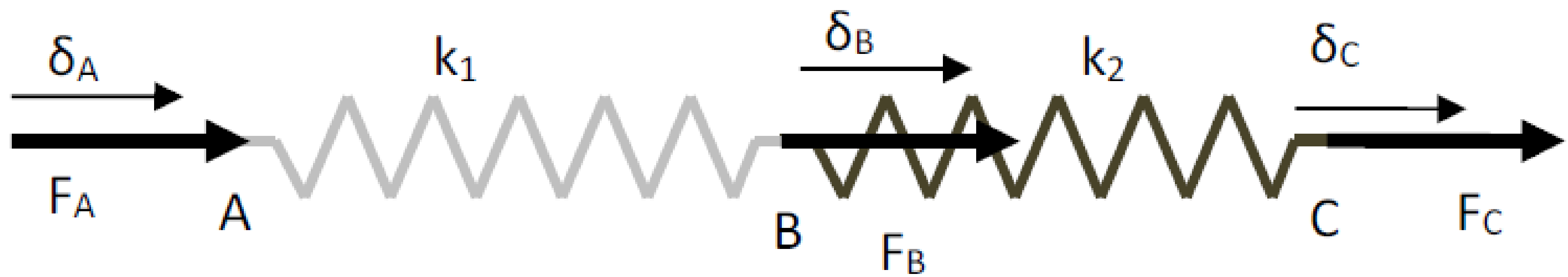
Nous pouvons écrire maintenant la relation matricielle de rigidité du ressort par

$$[K_r].\{\delta_r\} = \{F_r\}$$

- $[K_r] = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}$ Matrice de rigidité du ressort AB
- $\{\delta_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$ Vecteur déplacements des points A et B
- $\{F_r\} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix}$ Vecteur forces des points A et B

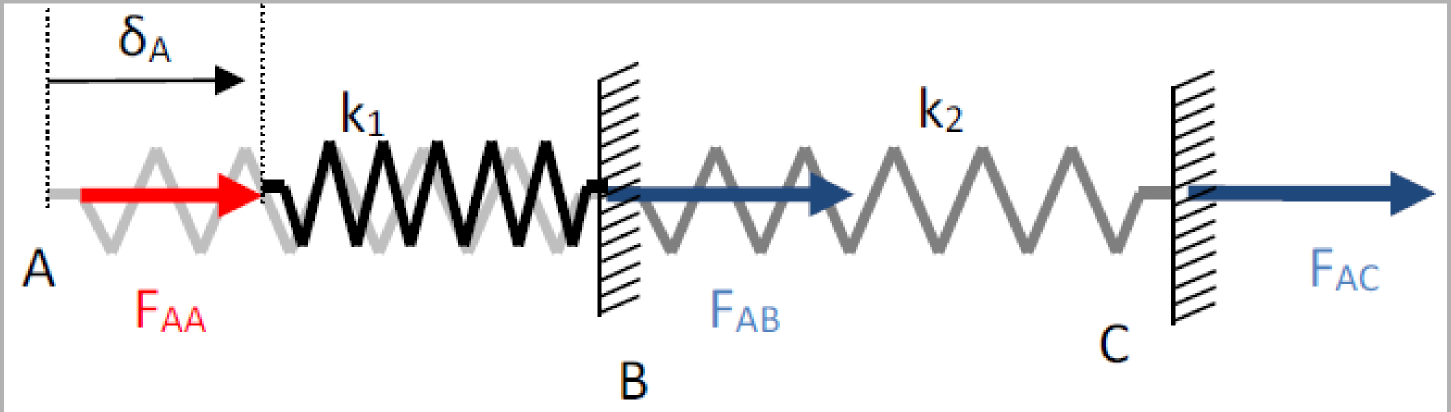
5.1.4-Matrice de rigidité d'un ensemble de plusieurs ressorts : Supposons maintenant qu'on cherche la relation de rigidité plusieurs ressorts connectes entre eux :

Cas de 2 ressorts :



Même procédure que pour un 1 seul ressort. Nous bloquons deux points et nous laissons libre le troisième-

1ère cas: Le point A se déplace sous l'action de la force F_{AA} d'un déplacement δ_A , les points B et C sont bloques (dans ce cas le ressort k_1 se comprime et le ressort k_2 ne se déforme pas):

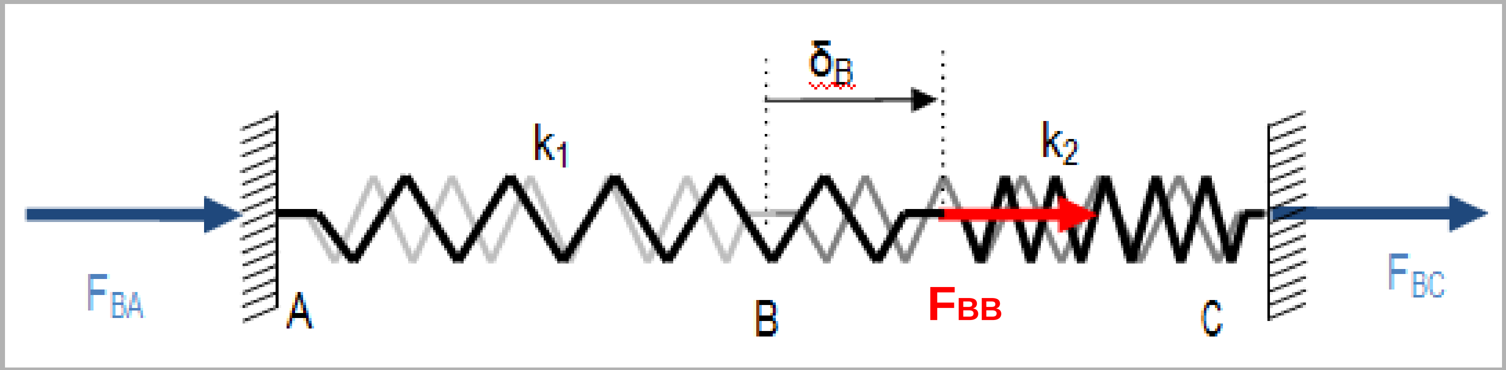


ainsi a l'équilibre: $F_{AA}+F_{AB}=0$ ainsi $F_{AA}=-F_{AB}$ et $F_{AC}=0$

La relation de rigidité appliquée au ressort AB de rigidité k_1 s'écrit (A libre et B fixe) :

$F_{AA}=k_1.\,\delta_A$ alors $F_{AB}=-k_1.\,\delta_A$

2ème cas : Le point B se déplace sous l'action de la force FBB d'un déplacement d_B , les points A et C sont bloques : (dans ce cas le ressort k_1 s'allonge et le ressort k_2 se comprime)

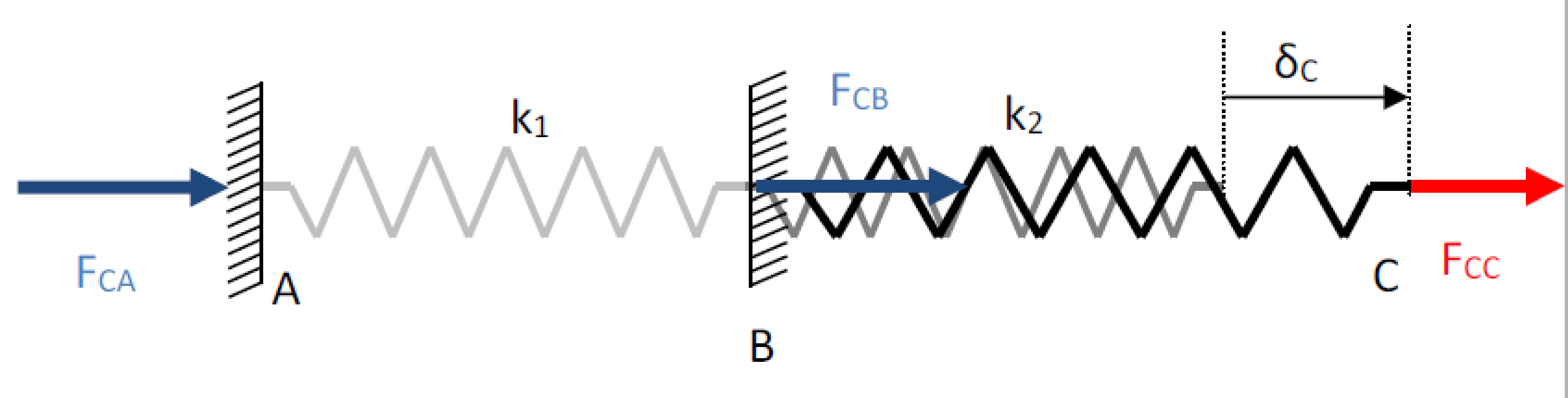


la relation de rigidité appliquée au ressort AB de rigidité k_1 ainsi qu'au ressort BC de rigidité k_2 s'écrit pour la même force appliquée en B (situation ou A fixe et B libre pour le ressort k_1 et B libre et C fixe pour le ressort k_2):

$F_{BB} = k_1 . \delta_B + k_2 . \delta_B$

- à l'équilibre du ressort AB $F_{BA} = -k_1 . \delta_B$
- de même pour le ressort BC $F_{BC} = -k_2 . \delta_B$

3ème cas : Le point C se déplace sous l'action de la force F_{CC} d'un déplacement δ_C , les points A et B sont bloqués : (dans ce cas le ressort k_1 reste fixe et le ressort k_2 s'allonge)



ainsi à l'équilibre : $F_{CB}+F_{CC}=0$ ainsi $F_{CC} =- F_{CB}$ et $F_{CA} = 0$
la relation de rigidité appliquée au ressort BC de rigidité k_2 s'écrit (C libre et B fixe) :

$$F_{CC}= k_2. dC$$

$$\text{alors } F_{CB}= -k_2. dC$$

Superposons maintenant les trois cas de chargement pour reconstituer le cas initial :

Ainsi au point A : $F_A = F_{AA} + F_{BA} + F_{CA} = k_1.\delta_A - k_1.\delta_B + 0$
au point B : $F_B = F_{AB} + F_{BB} + F_{CB} = -k_1.\ \delta_A + (k_1 + k_2).\ \delta_B - k_2.\ \delta_C$
au point C : $F_B = F_{AC} + F_{BC} + F_{CC} = 0 - k_2.\ \delta_B + k_2.\ \delta_C$

Sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_{1+}k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

On vient de montrer que pour l'ensemble des deux ressorts, la relation de rigidité par rapport aux trois points (A, B, C) s'écrit :

$$\{F_r\} = [K_r].\{\delta_r\}$$

$$[K_r] = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_{1+}k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

Matrice de Rigidité de l'ensemble des ressorts AB et BC

$$\{\delta_r\} = \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

Vecteur déplacements des points A, B, C

$$\{F_r\} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix}$$

Vecteur forces des points A, B, C

Remarque : on voit que cette méthode simple a permis de trouver l'expression, en fonction de rigidités des deux ressorts, de leur relation de rigidité. Si nous augmentons le nombre de ressorts, la procédure reste la même. Cependant elle s'avère non pratique (trop fastidieuse) !!. Elle devient carrément très compliquée si jamais les ressorts ne sont plus alignés.

Par conséquent, il est nécessaire d’opter pour une autre démarche plus générale et plus simple.

Solution possible : puisque on connait pour un ressort seul, la relation de rigidité, est ce qu’il ne saurait pas possible d’établir la relation de rigidité pour un ensemble de ressorts directement à partir des relations élémentaires de chaque ressort ?

Une analyse de l’expression de la relation de rigidité des deux ressorts montre qu’il suffit d’écrire chaque relation de rigidité d’un ressort en fonction de toutes le forces et déplacement de l’ensemble des ressorts et de procéder ensuite à une simple superposition : Cette étape s’appelle: assemblage de rigidité.

Ainsi, prenons le cas des deux ressorts précédent, alors :

- pour le ressort AB, la relation de rigidité s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

qui peut s écrire aussi

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

- pour le ressort BC, la relation de rigidité s'écrit :

$$\begin{Bmatrix} F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

qui peut s écrire aussi

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

Ainsi la matrice de rigidité des deux ressorts s'obtient en sommant (en assemblant) simplement les deux matrices de rigidités des ressorts AB et BC réécrites en fonctions de tous les déplacements et forces de l'ensemble : ainsi

$$\begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_{1+}k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}$$

En regardant bien l'expression de la matrice de rigidité de l'ensemble, on s'aperçoit que cela consiste plus généralement à considérer que pour un nœud commun au deux ressorts (le point B dans ce cas) la rigidité totale pour ce nœud, est la somme des rigidités provenant de chaque ressort : (k_1+k_2). Pour les nœuds A et C , ils gardent leurs rigidités et elle sera celle de l'ensemble en ces nœuds.

<u>Remarque:</u> *cette sommation a été possibles car les deux ressorts sont alignés (même repère). Cela voudra dire que dans le cas contraire il faut d'abord transformer ces relations dans un même repère avant de procéder à l'assemblage. Cet aspect sera vu plus en détails par la suite*.

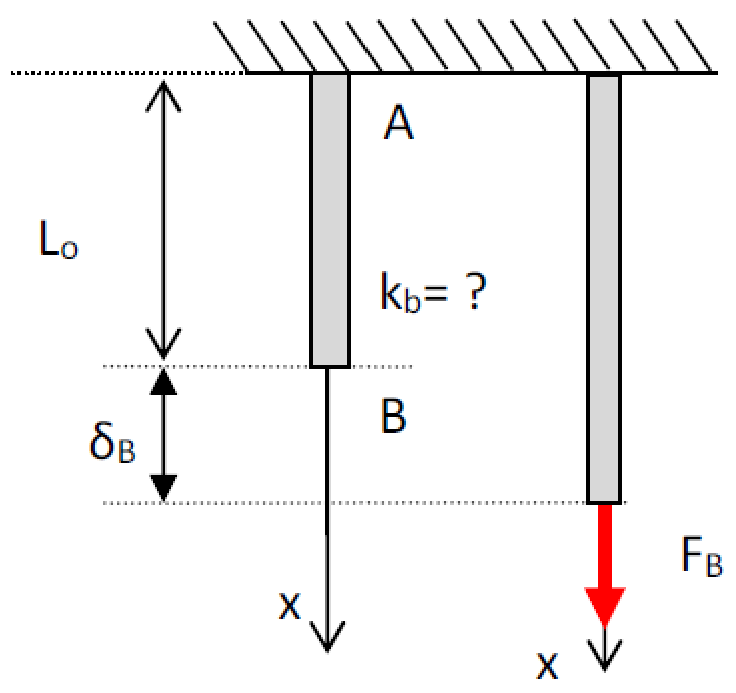
5.2.Matrice de rigidité d'une barre et d'un ensemble de barres.

Nous allons procéder de la même manière pour traiter une barre ou un ensemble de barres formants une structure pour établir leurs relations de rigidités. En réalité la procédure aboutit au même résultat, il reste seulement à définir pour une barre, l'expression de la relation de rigidité.

❑Rigidité d'une barre de longueur **L**, de section **S** et de module d'élasticité **E** (fig 5.4) :

En élasticité 1D, nous avons la relation de loi de HOOKE qui s'écrit selon l'axe des (x)

$$\sigma_x = E.\epsilon_x$$



σ_x : contrainte selon l'axe (x) qui s'écrit aussi en fonction de la force en B : $\sigma_x = F_B/S$

ε_x : déformation selon l'axe (x) qui s'écrit aussi en petite déformation : $\varepsilon_x = \delta_B/L_o$

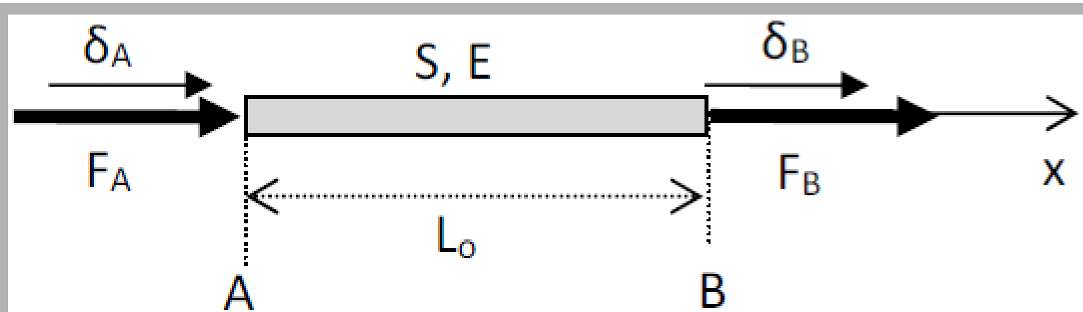
E : module d'élasticité

Ainsi on peut en déduire l'expression : $F_B = \frac{E.S}{L_o}.\delta_B$

Et par identification avec la relation de rigidité d'un ressort, la rigidité **k** pour une barre s'écrit $k = \frac{E.S}{L_o}$

Ainsi et s'agissant de la barre, tout ce qui a été démontré pour le ressort sera appliqué pour la barre, il suffit de remplacer la rigidité **k** du ressort par celle de la barre.

❑Matrice de rigidité d'une barre de caractéristique (**L_o, S, E)**, dans le repère (x)

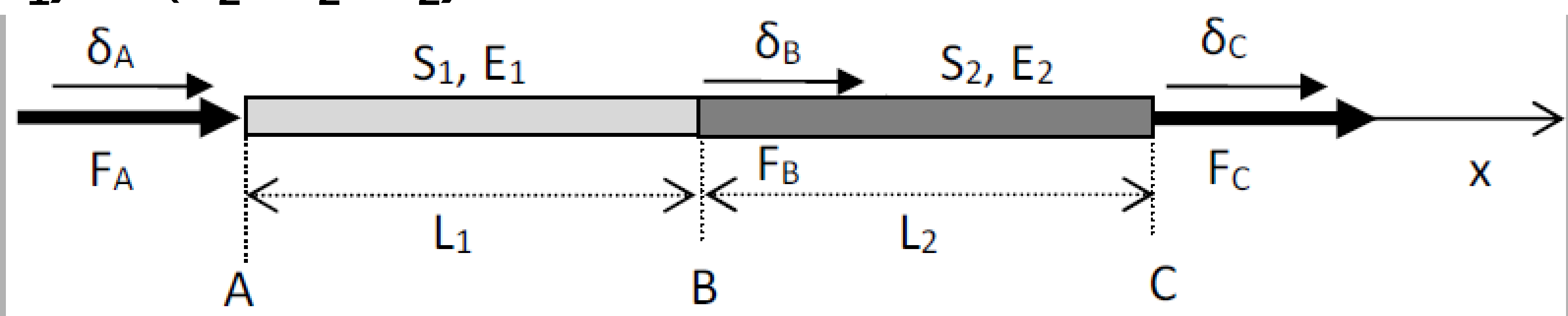


$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

ou plus précisément

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E.S}{L_o} & -\dfrac{E.S}{L_o} \\ -\dfrac{E.S}{L_o} & \dfrac{E.S}{L_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \end{Bmatrix}$$

❑Matrice de rigidité de deux barres de caractéristiques (**L_1, S_1, E_1)** et (**L_2, S_2, E_2)**



Par analogie avec l’assemblage de deux ressorts :

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_{1+}k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

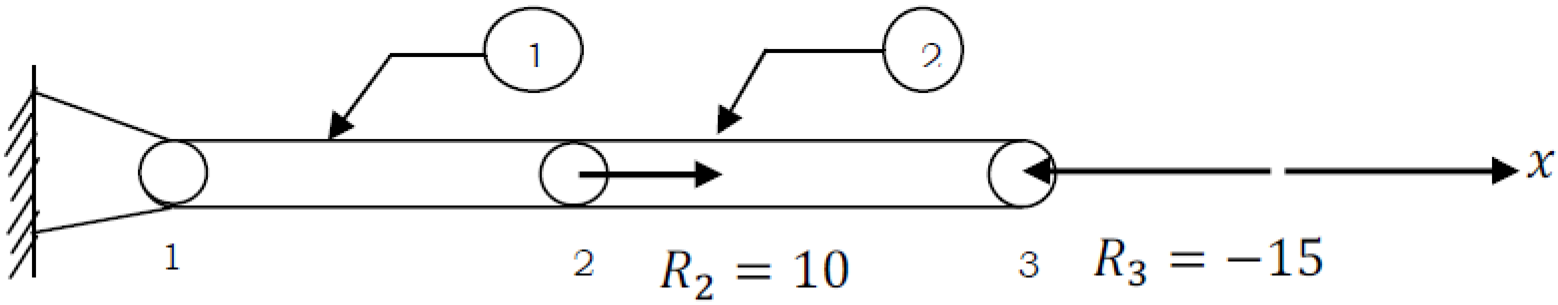
ou plus précisément

$$\begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \\ F_C \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E_1.S_1}{L_1} & -\frac{E_1.S_1}{L_1} & 0 \\ -\frac{E_1.S_1}{L_1} & \frac{E_1.S_1}{L_1} + \frac{E_2.S_2}{L_2} & -\frac{E_2.S_2}{L_2} \\ 0 & -\frac{E_2.S_2}{L_2} & \frac{E_2.S_2}{L_2} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \delta_A \\ \delta_B \\ \delta_C \end{Bmatrix}$$

On remarque que tant que les barres assemblées sont alignées (référencée dans le même repère (x)), la procédure est assez simple. <u>Il suffit de sommer au niveau des nœuds communs à plusieurs</u> <u>éléments, les termes de rigidités correspondants.</u>

***Remarque : A partir de maintenant nous travaillerons seulement avec des structures formées de barres**, en effet le ressort nous a seulement permis d'introduire la notion de rigidité et de comprendre le processus d'assemblage et de l'appliquer aux barres par analogie.*

Application: Soit la structure suivante :



1. Trouver les déplacements « u_2 et u_3 des nœuds 2 et 3.
2. Trouver la force résultante R_1 au nœud 1.

Résolution

Pour l'élément 1 on peut écrire : $\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{Bmatrix} = k_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$

Pour l'élément 2 on a : $\begin{Bmatrix} F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$

On a : $$k_1 = k_2 = k = \frac{AE}{L}$$

En élargissant chacune de ces équations on a :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \\ 0 \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad et \quad \begin{Bmatrix} 0 \\ F_{22} \\ F_{32} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

En les sommant on obtient :

$$\begin{Bmatrix} F_{11} + 0 \\ F_{21} + F_{22} \\ 0 + F_{32} \end{Bmatrix} = k \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

Avec l'encastrement en 1 on a $u_1 = 0$ et on a :

$$(1)\quad \begin{Bmatrix} R_1 \\ 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix}$$

On peut y extraire :

$$\begin{Bmatrix} 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{AE}{L} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 10 \\ -15 \end{Bmatrix} = \frac{L}{AE} \cdot \begin{Bmatrix} -5 \\ -20 \end{Bmatrix}$$

D'où

$$\boldsymbol{u_2 = \frac{-5 \cdot L}{AE} \; et \quad u_3 = \frac{-20 \cdot L}{AE}}$$

De 1 on a :

$$R_1 = \frac{AE}{L}(0) - \frac{AE}{L}(u_2) + \frac{AE}{L}(0) \cdot u_3 = -\frac{AE}{L}\left(\frac{-5L}{AE}\right) = 5$$

D'où

$$\boldsymbol{R_1 = 5}$$

5.3.Structures formées de barres non alignées. Notion de repère local et global:

Nous avons remarqué que l'utilisation d'axes lié à l'élément est très utile pour définir la rigidité élémentaire. Ce repère qui est défini (donc choisi) comme ayant le nœud numéroté 1 en son origine et le nœud 2 sur l'axe des (x) à une distance L est appelé **repère local**. Ce repère présente l'avantage d'être toujours le même pour toutes les barre pour avoir la même définition de la relation de rigidité et surtout de pouvoir y revenir et y définir les efforts internes. (effort Normal dans le cas de la barre).

Dans le cas d'une structure composée d'un assemblage de plusieurs barres, il est nécessaire de recourir à un système d'axes dit global. Ce système présentera l'avantage d'être le même pour tous les éléments. Il permet lors de l'assemblage que la rigidité en ce nœud soit obtenue en sommant les rigidités provenant de toutes les barres.

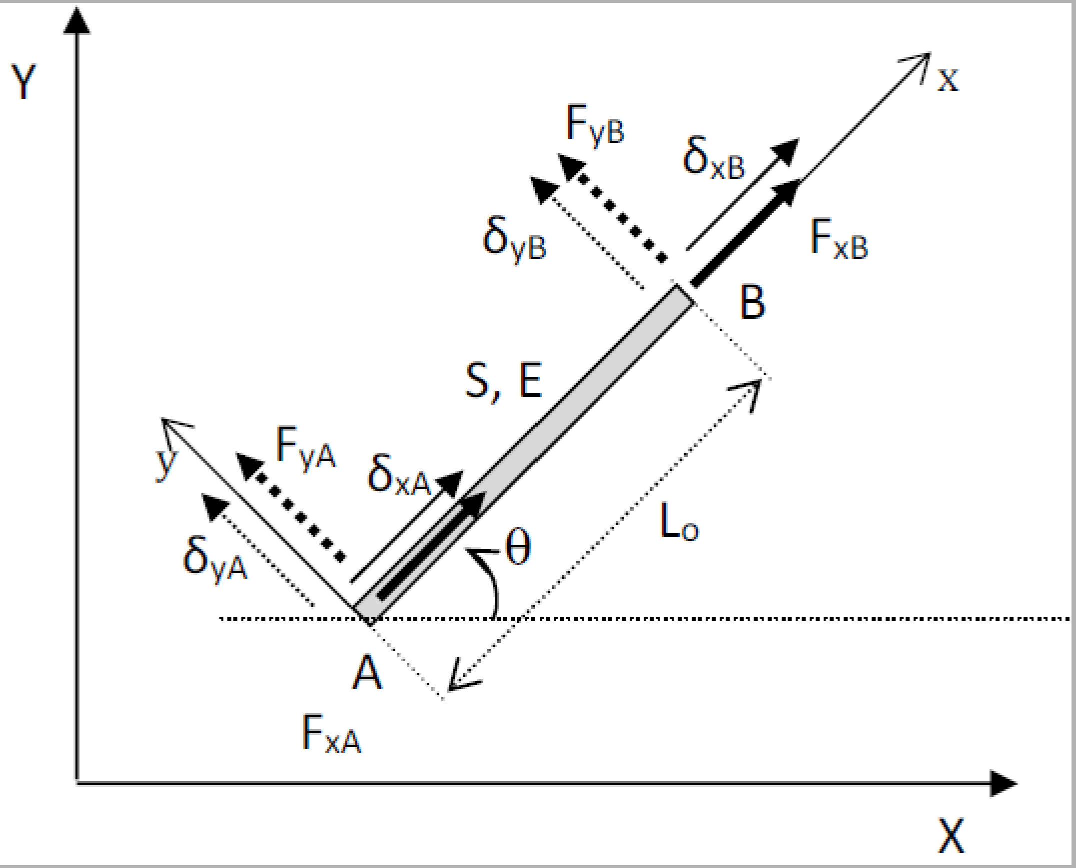
y aboutissants et d’exprimer ainsi que les déplacements de ce nœud commun à plusieurs barres sont les mêmes pour tous ces barres en ce nœud.
Ainsi le repère global sert a définir les déplacements globaux qui ont donc un sens global (on dit déplacement de la structure) contrairement aux efforts qui eux auront un sens local car défini dans un repère local (on dit efforts dans les barres)

Assemblage de barres non alignées

Intéressons nous maintenant aux structures formées d'éléments de barres qui ne sont pas alignées et n'ont donc pas le même repère. La règle générale d’assemblage (déjà vue) consistant à sommer les termes de rigidités d'un nœud commun plusieurs élément reste valable mais à la conditions évidentes que les termes de rigidité qu’il faudra sommés, soit exprimer dans la même référence (dans le même repère).

Dans ces conditions, nous présentons dans ce qui suit la procédure à suivre pour pouvoir exprimer les rigidités et plus généralement les matrices de rigidité d'élément de barres dans un même repère.

Pour cela prenons le cas de notre élément de barre (appartenons à une structure) (fig-3) placée dans un repère (x,y) par rapport auquel on écrit la relation de rigidité, qu'on nommera à partir de maintenant repère local et transformons cette relations dans un autre repère qu'on nommera repère global (X,Y) par rapport auquel (x,y) est orienté d'un angle q, et qui servira de repère commun à toutes les autres barres et finalement à la structure elle-même.



Relation de rigidité dans le repère local (x) (déjà vue)

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{xB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E.S}{L_o} & -\frac{E.S}{L_o} \\ -\frac{E.S}{L_o} & \frac{E.S}{L_o} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{xB} \end{Bmatrix}$$

ou plus simplement

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{xB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{xB} \end{Bmatrix}$$

▪ <u>Relation de rigidité dans le repère local (x,y) :</u>

en fait c'est le même repère que le précédent, on rajoute l'axe (y) même s'il n'y a pas de (ddl) selon cet axe. Il s'agit d'écrire la relation de rigidité en fonction des (ddl) selon (x) : δ_{xA} et δ_{xB} (la rigidité existe selon cet axe) auxquels correspondent F_{xA} et F_{xB} et des (ddl) selon (y) (même s'ils n'existent pas car ils sont nuls) et qu'on notera δ_{yA} et δ_{yB} et auxquels correspondent des forces qu'on notera F_{yA} et F_{yB} représentés en pointillé sur la figure (fig 5.5).

Ainsi avec les hypothèses précédentes on aboutit à la relation suivante :

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{xB} \\ F_{yA} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & -k & 0 & 0 \\ -k & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix}$$

Remarques :

1) *cette relation de rigidité est la même que celle écrite selon l'axe (x) seul. On voit bien que les équations rajoutées n'ont pas d'influence puisqu'elles introduisent des rigidités qui sont nulles selon l'axes de (y).*

2) *par commodité, on convient de réarranger le vecteur des (ddl) en optant pour l'ordre suivant : les (ddl) sont ordonnés selon l'ordre croissant des nœuds et ensuite pour celui des axes (d'abord les (ddl) selon (x) ensuite les (ddl) selon (y) etc….).* Ce qui donne pour notre expression

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix}$$

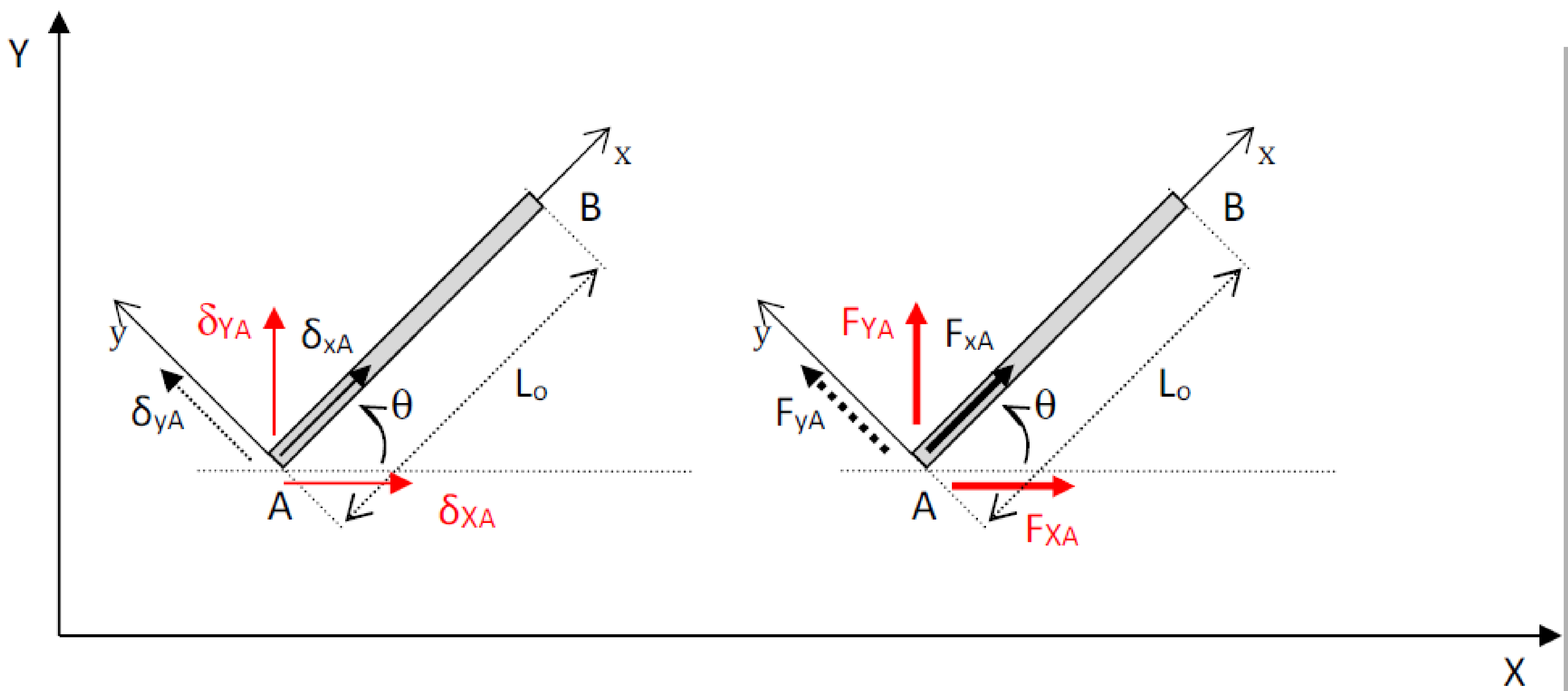
Ou plus simplement, la relation de rigidité dans le repère local

$$\{F_{xy}\} = [K_{xy}] . \{\delta_{xy}\}$$

avec :

$$\{F_{xy}\} = \begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} \qquad [K_{xy}] = \begin{bmatrix} k & 0 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \{\delta_{xy}\} = \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix}$$

▪ <u>Relation de rigidité dans le repère global (X,Y) :</u>



Pour trouver la relation dans le repère global (X,Y) , projetons les (ddl) selon (x,y) sur le repère (X,Y). Pour ne pas encombrer le schéma, nous développons cette projection pour les (ddl) du nœud A seulement car cette projection est identique pour les (ddl) du nœud B. *les (ddl) selon (X,Y) sont représentés en rouge sur la figure*

Ainsi : pour le vecteur déplacement on obtient :

$$\delta_{xA} = \delta_{XA} cos\theta + \delta_{YA} sin\theta$$
$$\delta_{yA} = -\delta_{XA} sin\theta + \delta_{YA} cos\theta$$

De même pour le vecteur Force :

$$F_{xA} = F_{XA} cos\theta + F_{YA} sin\theta$$
$$F_{yA} = -F_{XA} sin\theta + F_{YA} cos\theta$$

Nous obtenons la même chose pour le nœud B :

$$\delta_{xB} = \delta_{XB} cos\theta + \delta_{YB} sin\theta$$
$$\delta_{yB} = -\delta_{XB} sin\theta + \delta_{YB} cos\theta$$
$$F_{xB} = F_{XB} cos\theta + F_{YB} sin\theta$$
$$F_{yB} = -F_{XB} sin\theta + F_{YB} cos\theta$$

L'ensemble de la projection pour les nœuds A et B s'écrit sous forme matricielle :

$$\begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \delta_{XA} \\ \delta_{YA} \\ \delta_{XB} \\ \delta_{YB} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ F_{xB} \\ F_{yB} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & sin\theta & 0 & 0 \\ -sin\theta & cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\theta & sin\theta \\ 0 & 0 & -sin\theta & cos\theta \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} F_{XA} \\ F_{YA} \\ F_{XB} \\ F_{YB} \end{Bmatrix}$$

Ou plus simplement :

$$\{\delta_{xy}\} = [R].\{\delta_{XY}\} \quad ; \quad \{F_{xy}\} = [R].\{F_{XY}\}$$

Avec [R] appelée matrice de transformation (ou de rotation)

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

Revenons maintenant à l'expression initiale de la rigidité dans le repère local (x,y)

$$\{F_{xy}\} = [K_{xy}].\{\delta_{xy}\}$$

En procédant aux substitutions des vecteurs forces et déplacements, on obtient

$$[R].\{F_{XY}\} = [K_{xy}].[R].\{\delta_{XY}\}$$

Qu'on peut transformer en multipliant les deux membres par $[R]^{-1}$ sachant $[R]^{-1}[R] = [I]$ ([I] étant la matrice identité)

$$[R]^{-1}[R].\{F_{XY}\} = [R]^{-1}.[K_{xy}].[R].\{\delta_{XY}\}$$

Et qui se simplifie en $\{F_{XY}\} = [R]^{-1}.\left[K_{xy}\right].[R].\{\delta_{XY}\}$

Ainsi si nous notons par $[K_{XY}]$, la matrice de rigidité dans le repère (X,Y) la relation de rigidité s'écrit de la même manière que dans le repère (x,y) , ainsi $\{F_{XY}\} = [K_{XY}].\{\delta_{XY}\}$

Et finalement, par identification on arrive à trouver la relation de rigidité dans le repère global en fonction de la rigidité dans le repère local telle que $[K_{XY}] = [R]^{-1}.\left[K_{xy}\right].[R]$

<u>Remarque</u> <u>:</u> dans le cas qui nous intéresse, la transformation de (x,y) vers (X,Y) définie par la matrice [R] est orthogonale. Ainsi nous utilisons la propriété qui donne que l'inverse d'une matrice d'une transformation orthogonale est égale à sa transposé, alors $[R]^{-1} = [R]^{T}$

$$[K_{XY}] = [R]^{T}.\left[K_{xy}\right].[R]$$

Remarque:

comme la matrice est simple, on peut facilement développer cette transformation pour la barre et trouver directement l'expression de la matrice de rigidité dans un repère global quelconque (X,Y) telle que le repère local (x,y) à l'élément soit orienté d'un angle q par rapport à (X,Y)

Ce qui donne en notant par : c= cosq et s=sinq,

$$[K_{XY}] = k.\begin{bmatrix} c^2 & cs & -c^2 & -cs \\ cs & s^2 & -cs & -s^2 \\ -c^2 & -cs & c^2 & cs \\ -cs & -s^2 & cs & s^2 \end{bmatrix}$$

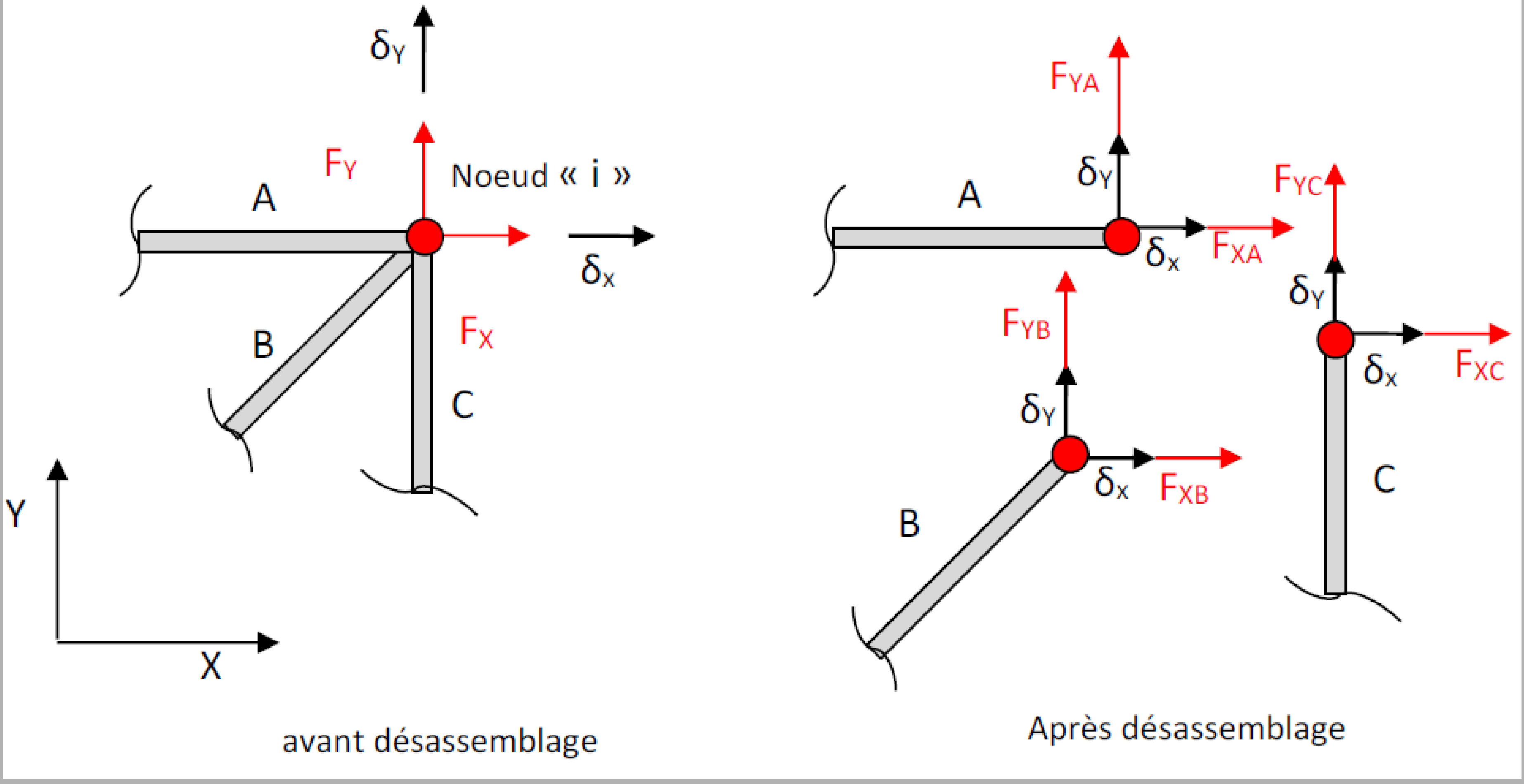
<u>5.4 - Procédure d'assemblage des barres</u> :

En général, la procédure d'assemblage se fait de la même manière que ce qui a été vue auparavant pour les barres.

Cela revient à sommer les termes de rigidités des éléments au niveau de leurs nœuds communs (<u>ddl)</u> <u>par (ddl).</u>

L’essentiel étant de s’assurer de n’assembler que des matrices de rigidités préalablement transformées dans le même repère.
De manière générale, si nous devons donner une définition à l’assemblage, nous pouvons dire que cela revient à exprimer que :
les composantes du déplacement d’un nœud « i » d’une structure sont les mêmes pour tous les éléments connectées à ce nœud « i » pris séparément, car il est déterminé par une seule rigidité obtenue en sommant (lors de l'assemblage) toutes le rigidité en "i" provenant de tous les élément qui y sont connectés
les composantes des efforts en ce nœud doivent s’équilibrer avec les mêmes composantes des efforts provenant des différents éléments pris séparément et connectés en ce nœud
Cela veut dire que l’effort dans une direction pour un nœud d’une structure est égal à la somme des efforts provenant de chaque élément et dans cette même direction (fig 4).

Ainsi , il est aussi nécessaires de procéder à l'assemblage du vecteur forces consistant en la sommation forces (si elles existent) pour chaque nœuds provenant de éléments qui y sont connectés



On voit bien que le nœud « i » après désassemblage, garde pour chaque élément qui y est connecté le même déplacement dA et dB , alors que pour les forces, elles sont telles qu'a l'équilibre nous obtenons:

$$F_X = F_{XA} + F_{XB} + F_{XC}$$

$$F_Y = F_{YA} + F_{YB} + F_{YC}$$

Résumé: La Procédure d'assemblage concerne :

- l'Assemblage des matrices de rigidités
- l'Assemblage des vecteurs forces

5.4-1-Exemples d'assemblages avec des éléments de barres:

a – barres alignées

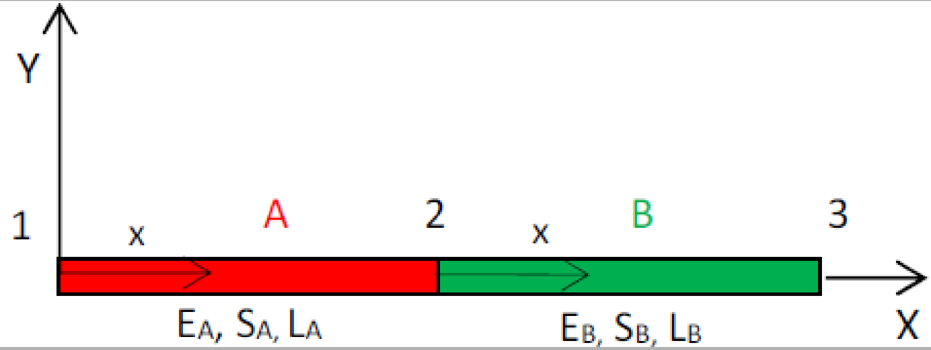
Soit un barreau AB modélisé par deux éléments de barre (A) et (B). Dans ce cas, les repères locaux

(x) des deux éléments de barre coïncident avec (X,Y) choisi pour le Barreau comme repère global (voir Figure).

les matrices de rigidités des deux éléments s'écrivent dans le repère (x)

$$Barre\ A : \begin{bmatrix} k_A & -k_A \\ -k_A & k_A \end{bmatrix} \quad avec\ \ k_A = \frac{E_A\, S_A}{L_A}$$

$$Barre\ B\ : \begin{bmatrix} k_B & -k_B \\ -k_B & k_B \end{bmatrix} \quad avec\ \ k_B = \frac{E_B\, S_B}{L_B}$$

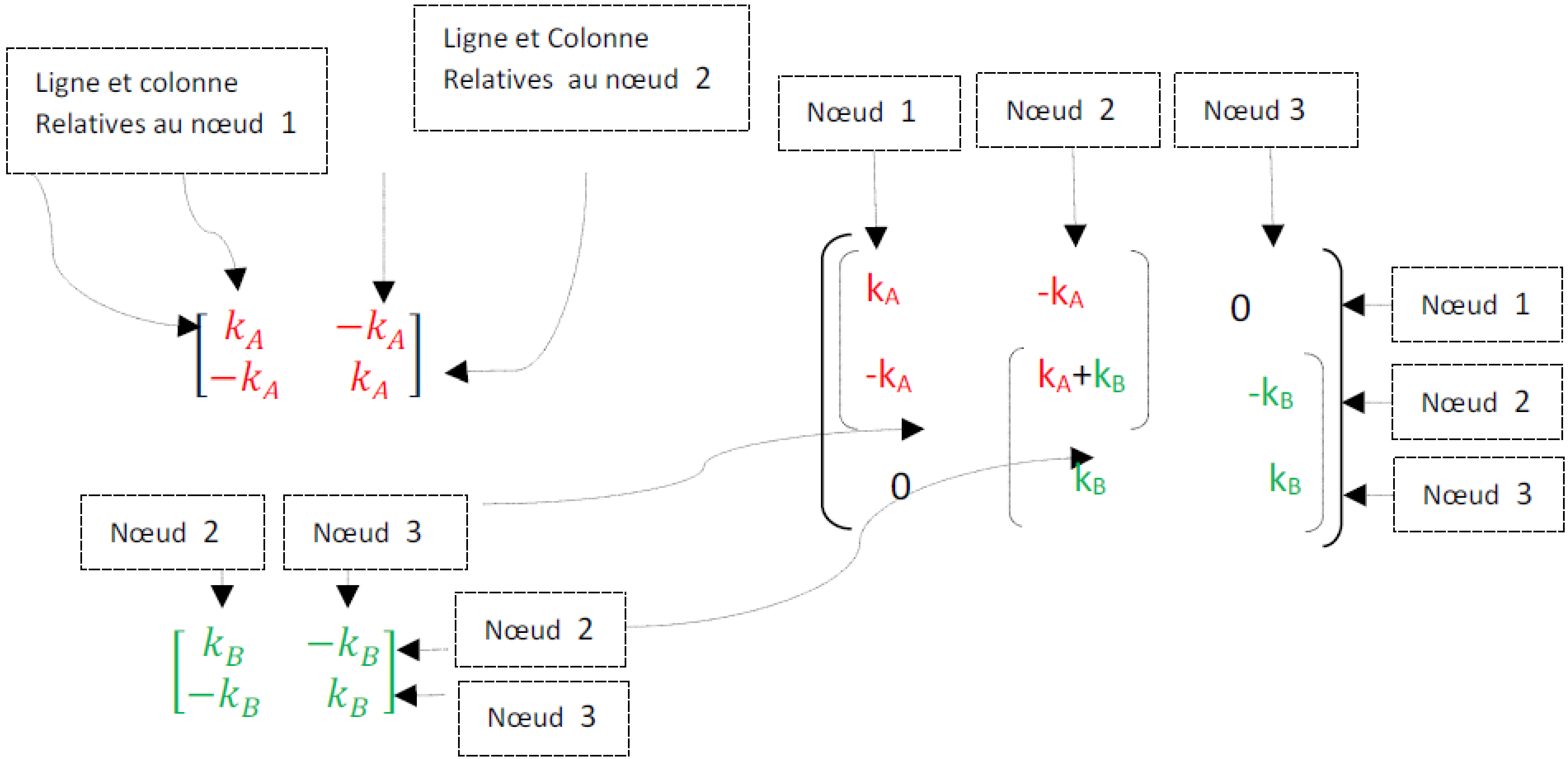


L'assemblage dans ce cas se fera dans le repère global (X,Y) <u>sans transformation des matrice de</u> <u>rigidité des deux barres</u> . En effet, les repères locaux (x) des barres sont confondus avec le repère global (X,Y).

<u>Remarque</u> : on remarque que dans ce cas seul le (ddl) de déplacement axiale intervient (pas de projection de déplacement) car les barres sont alignées sur l'axe (X).

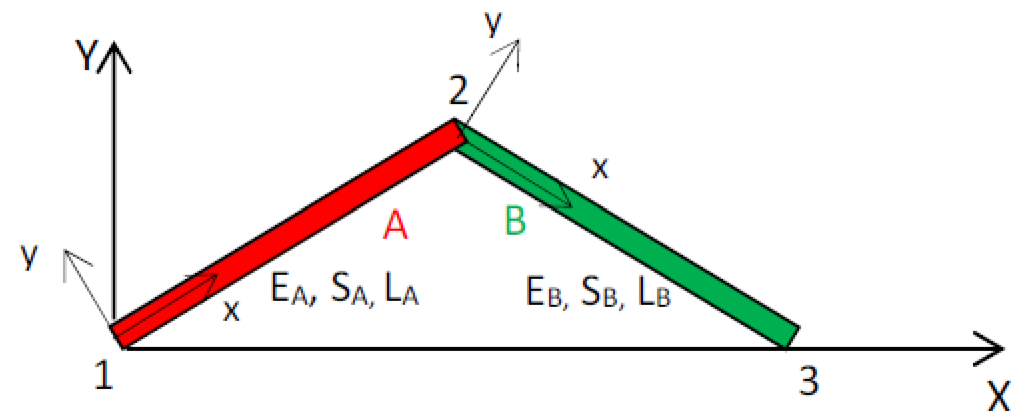
Les matrices de rigidités des barres A et B contiennent respectivement les rigidités relatives aux ddl des nœuds 1 et 2 et des nœuds 2 et 3. Ainsi pour la barre A, la ligne 1 et la colonne 1 de la matrice de rigidité, correspondent au ddl du déplacement axial au nœud 1 et de même, la ligne 2 et la colonne 2 de la matrice de rigidité, correspondent au ddl du déplacement axial au nœud 2 (même raisonnement pour la barre B et les nœuds 2 et 3).

lors de l'assemblage, le nœuds 2 est commun aux deux barres ainsi la matrice de rigidité de la structure assemblée (le barreau) contiendra les rigidités des nœuds 1 , 2 et 3 issues des deux matrices de rigidité comme illustré sur le schéma suivant : il suffit pour procéder à l'assemblage de former la matrice de rigidité de la structure (le barreau) en plaçant les termes de rigidités des barres (en respectant les numéro des nœuds) dans la matrice de rigidité de la structure et en veillant a sommer les rigidités qui proviennent d'un même nœud (comme dans notre cas : le nœud 2).


Ligne et colonne Relatives au nœud 1
Ligne et Colonne Relatives au nœud 2
Nœud 1
Nœud 2
Nœud 3
Nœud 1
Nœud 2
Nœud 3
Nœud 2
Nœud 3
Nœud 2
Nœud 3

b – barres non alignées

Les matrices de rigidité des éléments A et B s'écrivent dans les repères locaux (x,y) :



Matrice de rigidité de l'élément **A** sur (x,y)

$$\begin{bmatrix} k_A & 0 & -k_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_A & 0 & k_A & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité de l'élément **B** sur (x,y)

$$\begin{bmatrix} k_B & 0 & -k_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -k_B & 0 & k_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour pouvoir procéder à l'assemblage, il faut que les deux matrices de rigidités des éléments A et B soient transformées dans le repère global commun aux deux éléments (X,Y),
Ainsi et après transformation dans le repère global, notons par :

Matrice de rigidité de l'élément **A** sur (X,Y)

$$\begin{bmatrix} k_A^{11} & k_A^{12} & k_A^{13} & k_A^{14} \\ k_A^{21} & k_A^{22} & k_A^{23} & k_A^{24} \\ k_A^{31} & k_A^{32} & k_A^{33} & k_A^{34} \\ k_A^{41} & k_A^{42} & k_A^{43} & k_A^{44} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité de l'élément **B** sur (X,Y)

$$\begin{bmatrix} k_B^{11} & k_B^{12} & k_B^{13} & k_B^{14} \\ k_B^{21} & k_B^{22} & k_B^{23} & k_B^{24} \\ k_B^{31} & k_B^{32} & k_B^{33} & k_B^{34} \\ k_B^{41} & k_B^{42} & k_B^{43} & k_B^{44} \end{bmatrix}$$

Remarque : la différence avec l'exemple précédent est que lors de la transformation de (x,y) vers (X,Y), il y a création (par projection) de deux (d.d.l) par nœud, selon X et selon Y.

ainsi pour l'élément A :

Colonnes relatives au nœud **1** (ddl u_1 et v_1)

Colonnes relatives au nœud **2** (ddl u_2 et v_2)

Lignes relatives au nœud **1** (ddl u_1 et v_1)

Lignes relatives au nœud **2** (ddl u_2 et v_2)

$$\begin{bmatrix} k_A^{11} & k_A^{12} & k_A^{13} & k_A^{14} \\ k_A^{21} & k_A^{22} & k_A^{23} & k_A^{24} \\ k_A^{31} & k_A^{32} & k_A^{33} & k_A^{34} \\ k_A^{41} & k_A^{42} & k_A^{43} & k_A^{44} \end{bmatrix}$$

et pour l'élément B :

$$
\begin{array}{c|c}
 & \text{Colonnes relatives au nœud } \mathbf{2} \text{ (ddl } u_2 \text{ et } v_2 \qquad \text{Colonnes relatives au nœud } \mathbf{3} \text{ (ddl } u_3 \text{et } v_3\text{)} \\
\begin{array}{c} \text{Lignes relatives au nœud } \mathbf{2} \text{ (ddl } u_2 \text{ et } v_2\text{)} \\ \\ \text{Lignes relatives au nœud } \mathbf{3} \text{ (ddl } u_3 \text{ et } v_3\text{)} \end{array} &
\begin{bmatrix}
k_B^{11} & k_B^{12} & k_B^{13} & k_B^{14} \\
k_B^{21} & k_B^{22} & k_B^{23} & k_B^{24} \\
k_B^{31} & k_B^{32} & k_B^{33} & k_B^{34} \\
k_B^{41} & k_B^{42} & k_B^{43} & k_B^{44}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Apres assemblage (selon le principe déjà vu) nous obtenons :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc} \text{nœud 1 (ddl } u_1 \text{ et } v_1) & \text{nœud 2 (ddl } u_2 \text{ et } v_2) & \text{nœud 3 (ddl } u_3 \text{ et } v_3) \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{nœud 1 (ddl } u_1 \text{ et } v_1) \\ \\ \\ \text{nœud 2 (ddl } u_2 \text{ et } v_2) \\ \\ \\ \text{nœud 3 (ddl } u_3 \text{ et } v_3) \end{array} &
\left[\begin{array}{cc|cc|cc}
k_A^{11} & k_A^{12} & k_A^{13} & k_A^{14} & 0 & 0 \\
k_A^{21} & k_A^{22} & k_A^{23} & k_A^{24} & 0 & 0 \\
\hline
k_A^{31} & k_A^{32} & k_A^{33} + k_B^{11} & k_A^{34} + k_B^{12} & k_B^{13} & k_B^{14} \\
k_A^{41} & k_A^{42} & k_A^{43} + k_B^{21} & k_A^{44} + k_B^{22} & k_B^{23} & k_B^{24} \\
\hline
0 & 0 & k_B^{31} & k_B^{32} & k_B^{33} & k_B^{34} \\
0 & 0 & k_B^{41} & k_B^{42} & k_B^{43} & k_B^{44}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

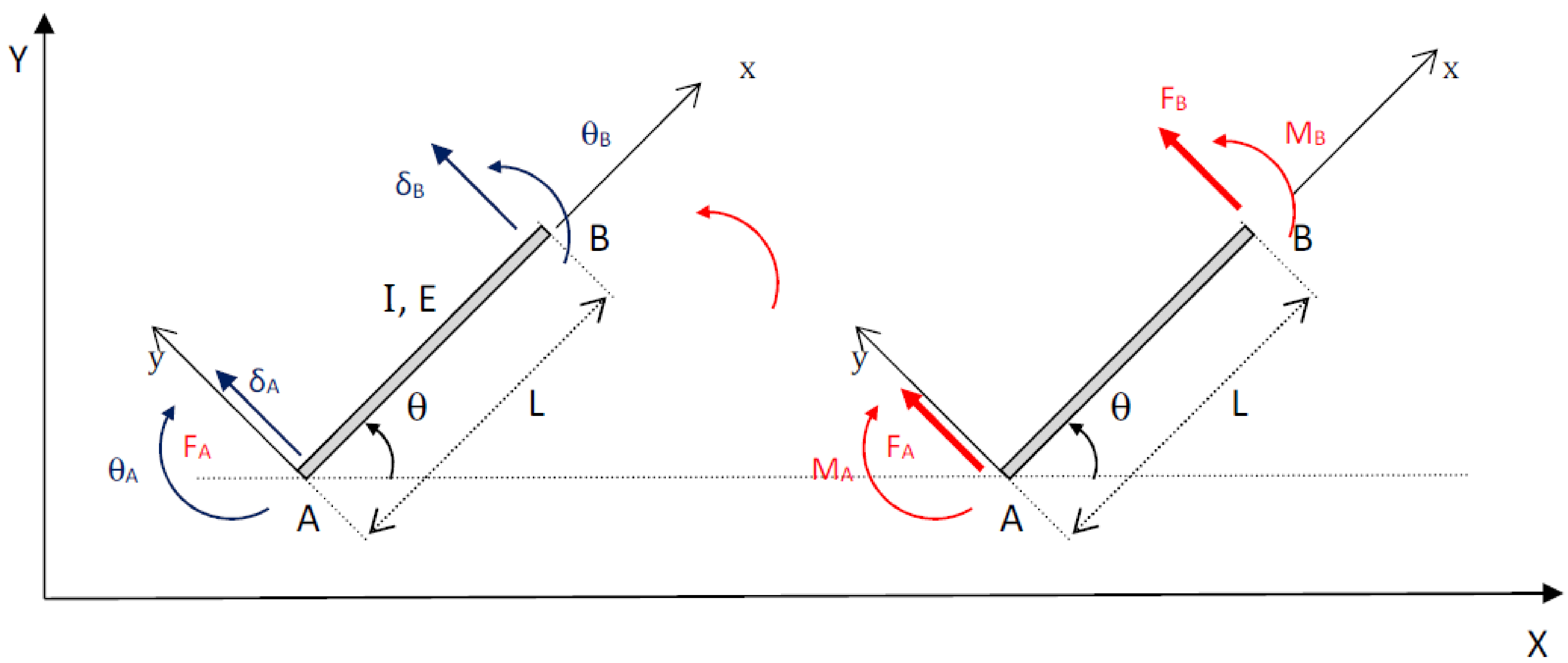
il est claire que quelque soit la numérotation choisie, cela aboutit lors de la résolution exactement au même résultat.

Remarque : nous avons présenté quelques exemples simples d'assemblage pour les éléments de barres. Il faut préciser que la procédure présentée reste la même pour tous les autres éléments.

5.4-2- Exemples d’assemblages avec d'autres éléments

a- Poutres Générale à deux nœuds:

L'élément poutre générale est composé d'un l'élément de barre (déjà vue) sur lequel est superposé l'élément travaillant en flexion suivant :



Pour le cas de la poutre de flexion uniquement nous donnons directement sa relation de rigidité dans le même repère local que celui de la barre.

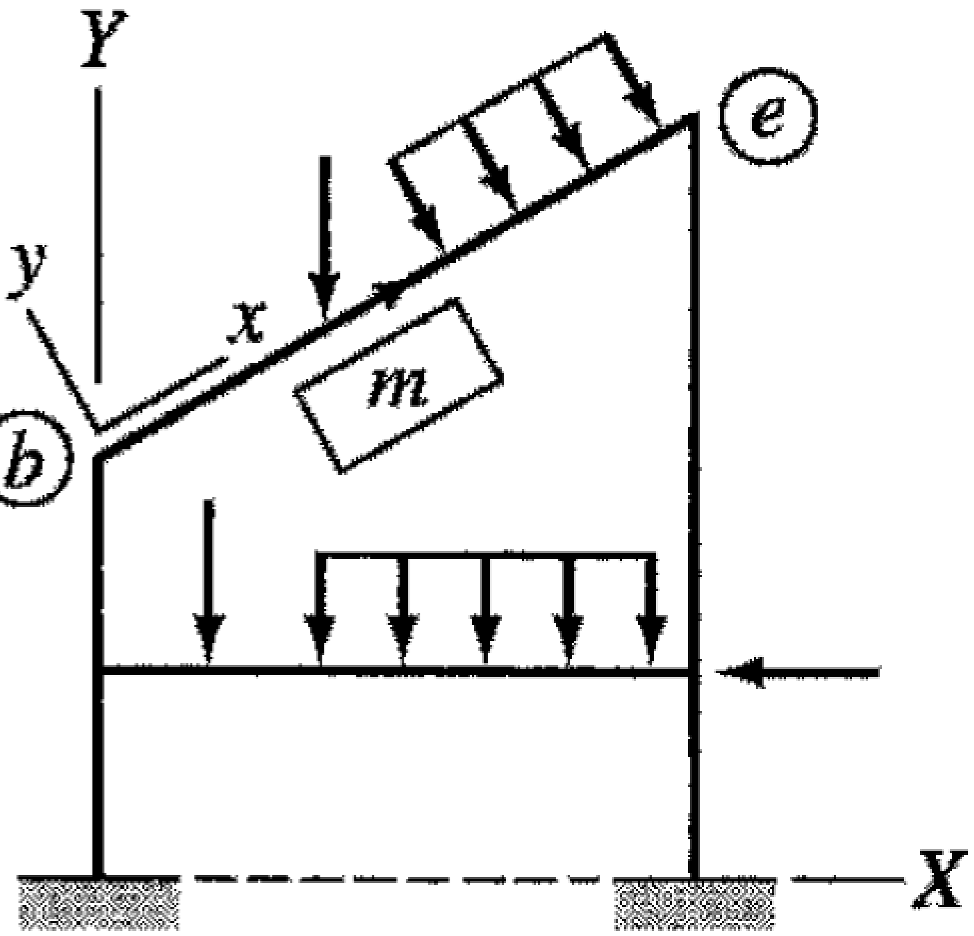
$$\begin{Bmatrix} F_{yA} \\ M_A \\ F_{yB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{yA} \\ \theta_A \\ \delta_{yB} \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

ainsi la relation de rigidité l'élément de poutre générale (barre + poutre flexion) arrangé selon le numéro du nœuds s'écrit :

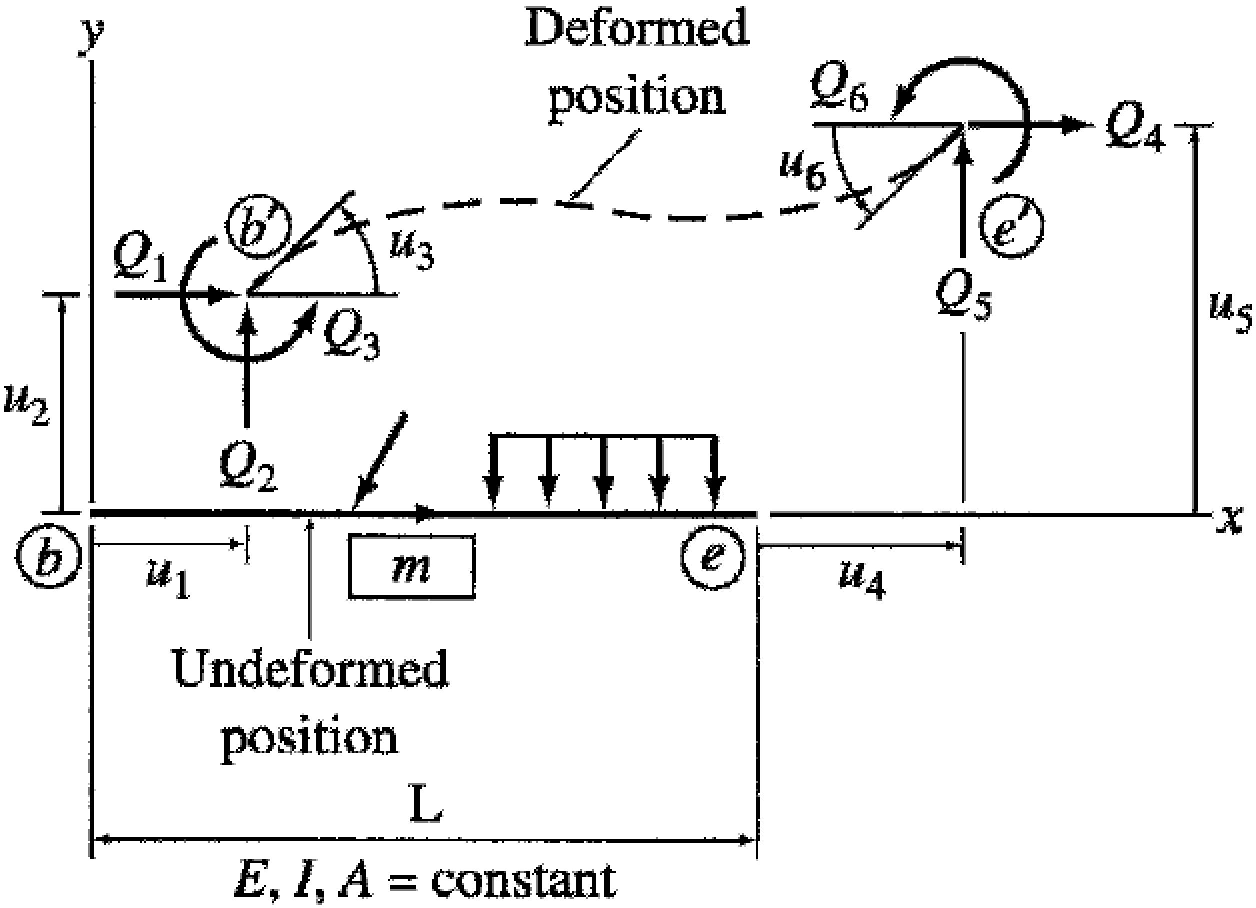
$$\begin{Bmatrix} F_{xA} \\ F_{yA} \\ M_A \\ F_{xB} \\ F_{yB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{ES}{L} & 0 & 0 & \frac{-ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{-ES}{L} & 0 & 0 & \frac{ES}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{-6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \frac{-6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} \delta_{xA} \\ \delta_{yA} \\ \theta_A \\ \delta_{xB} \\ \delta_{yB} \\ \theta_B \end{Bmatrix}$$

Pour l'élément de Poutre générale, la procédure d'assemblage reste globalement la même que pour l'élément de barre, la seule différence réside dans la taille de leurs matrice de rigidité. En effet, L'élément de barre possède 2 ddl par nœud (u,v) et l'élément de poutre générale possède 3 ddl par nœud (u,v,θ)

Exemple

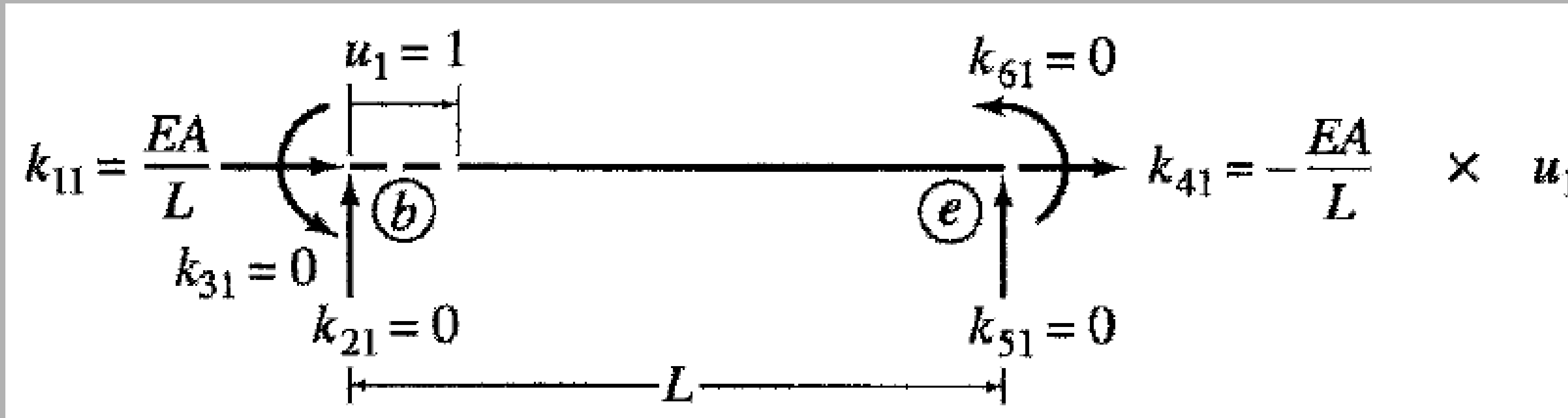


(a) Frame

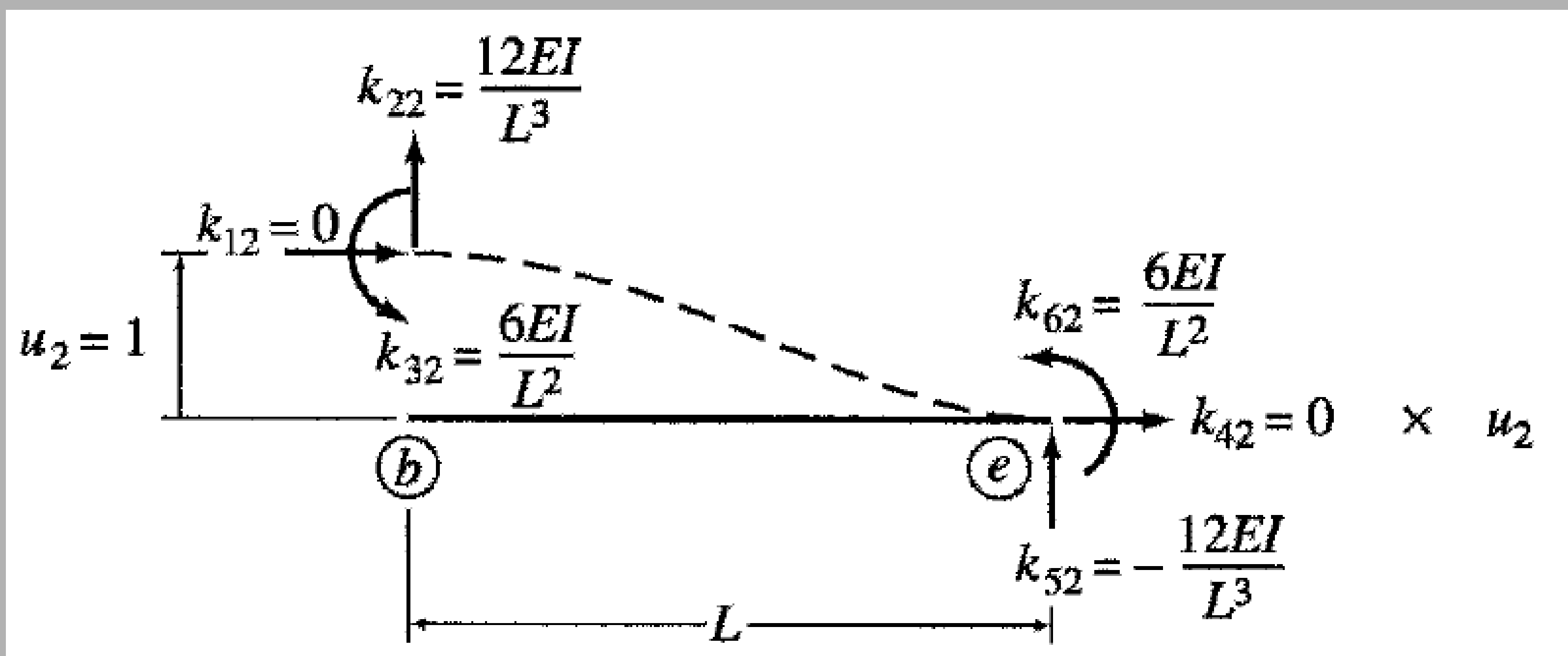


(b) Frame Member — Local Coordinates

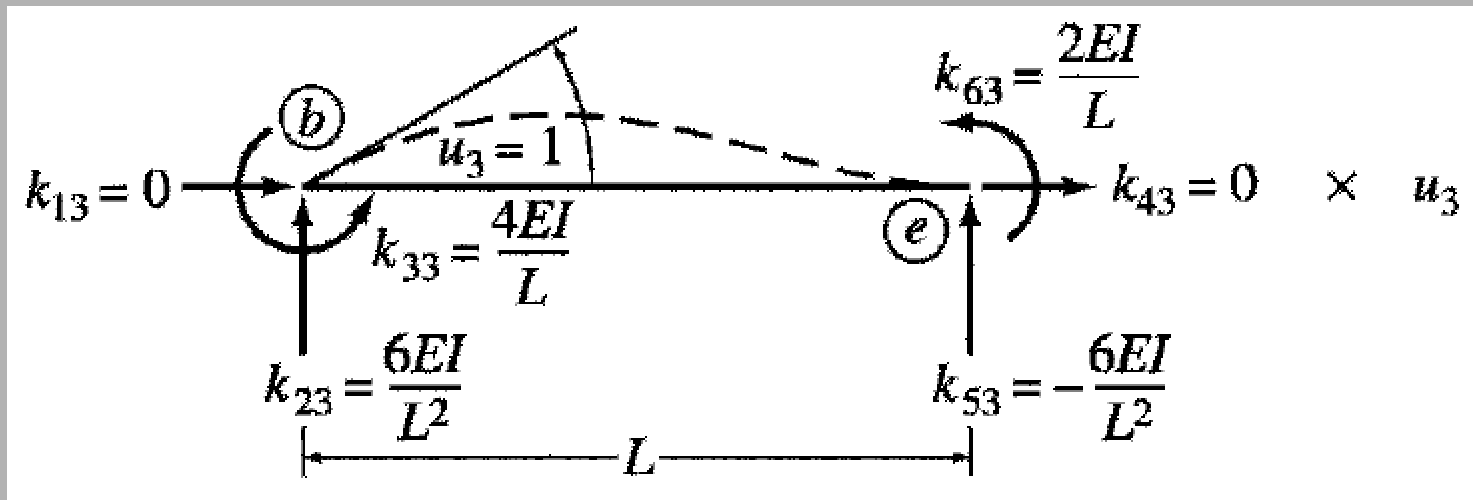
=


$u_1 = 1$
$k_{61} = 0$
$k_{11} = \frac{EA}{L}$
$k_{41} = -\frac{EA}{L}$
$\times \quad u_1$
b
e
$k_{31} = 0$
$k_{21} = 0$
$k_{51} = 0$
L

+

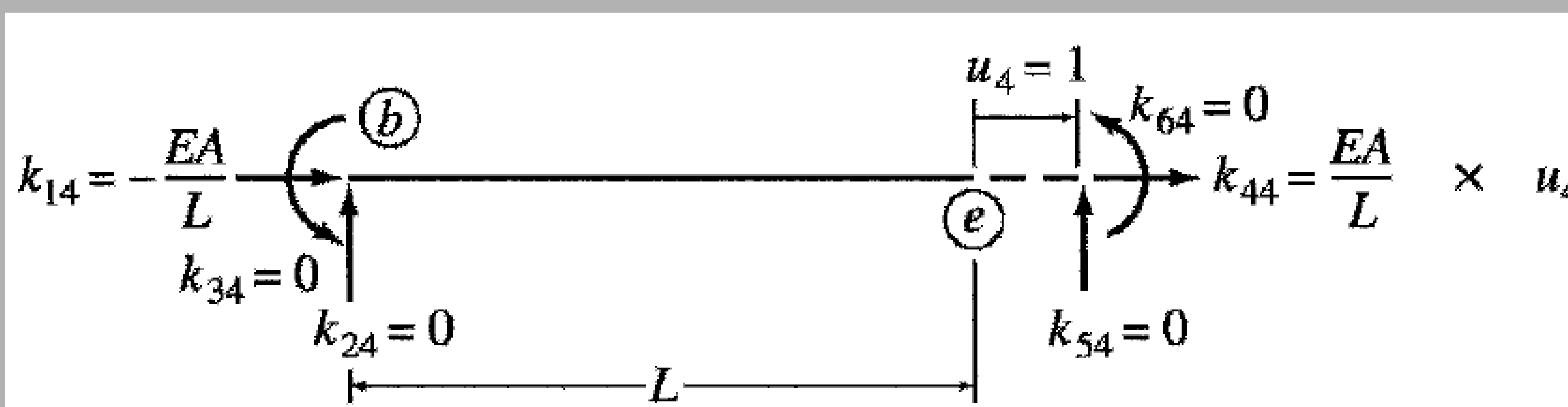

$k_{22} = \frac{12EI}{L^3}$
$k_{12} = 0$
$u_2 = 1$
$k_{32} = \frac{6EI}{L^2}$
$k_{62} = \frac{6EI}{L^2}$
$k_{42} = 0$
$\times \quad u_2$
b
e
$k_{52} = -\frac{12EI}{L^3}$
L

+



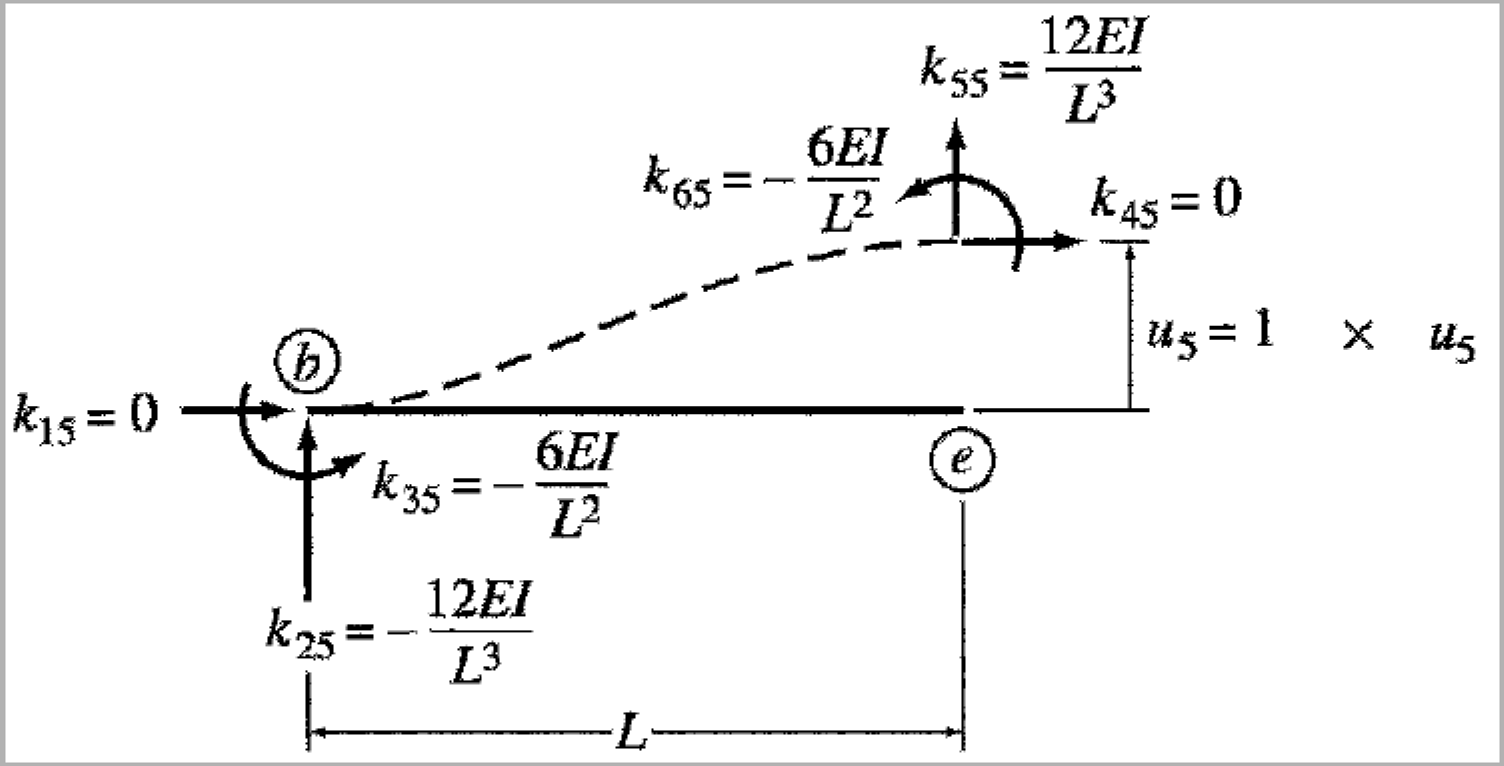
$k_{63} = \frac{2EI}{L}$
b
$u_3 = 1$
$k_{13} = 0$
$k_{43} = 0$
$\times \quad u_3$
$k_{33} = \frac{4EI}{L}$
e
$k_{23} = \frac{6EI}{L^2}$
$k_{53} = -\frac{6EI}{L^2}$
L

+



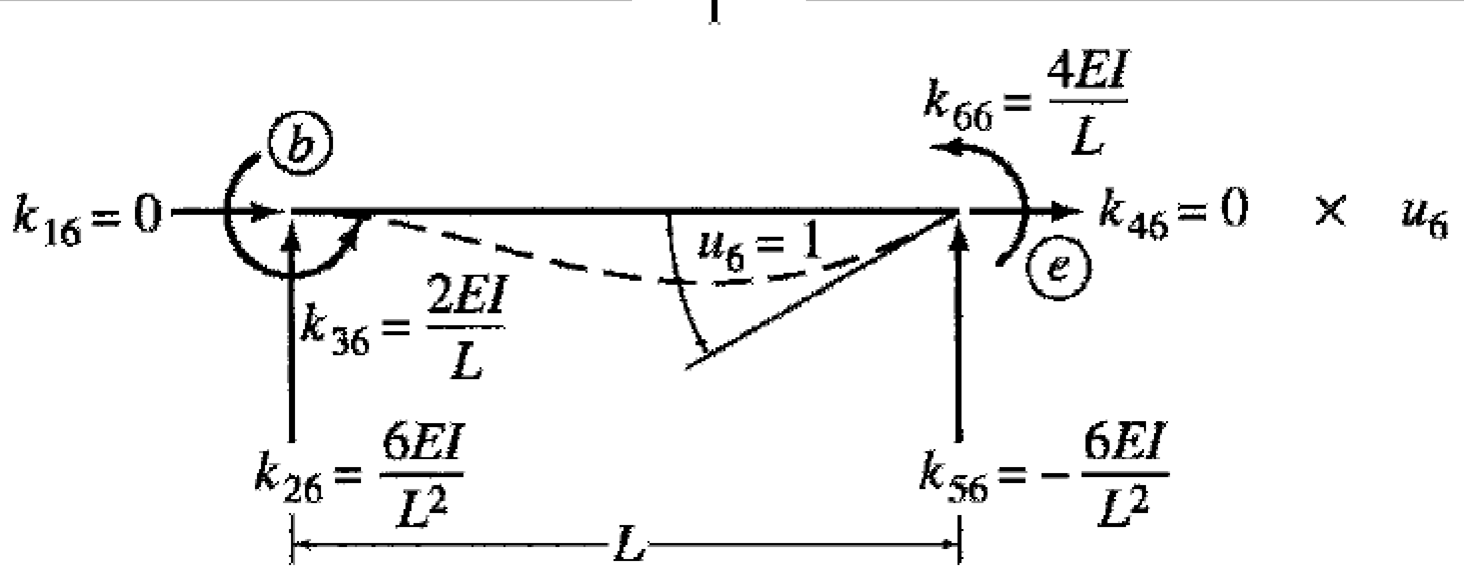
$u_4 = 1$
$k_{64} = 0$
b
$k_{14} = -\frac{EA}{L}$
$k_{44} = \frac{EA}{L}$
$\times \quad u_4$
e
$k_{34} = 0$
$k_{24} = 0$
$k_{54} = 0$
L

+



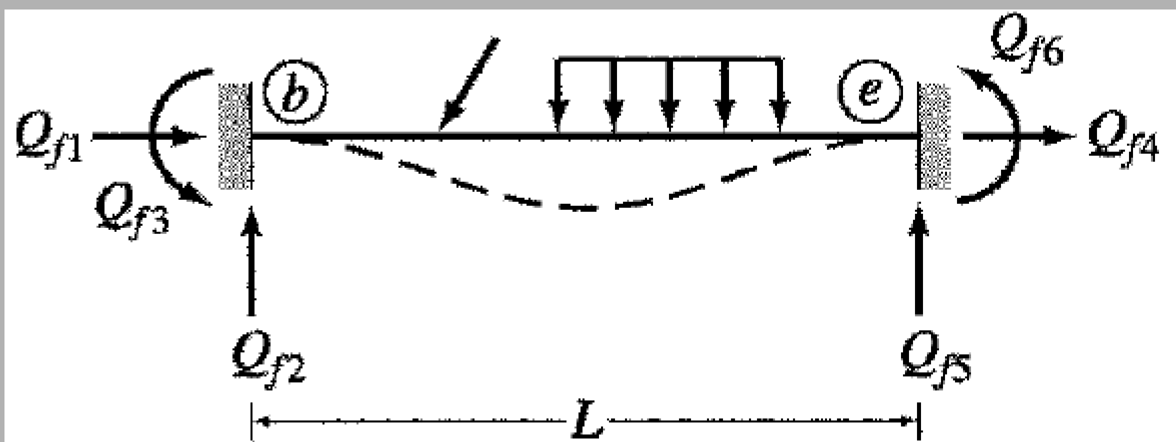
$k_{55} = \frac{12EI}{L^3}$
$k_{65} = -\frac{6EI}{L^2}$
$k_{45} = 0$
$u_5 = 1$
$\times$ u_5
b
$k_{15} = 0$
e
$k_{35} = -\frac{6EI}{L^2}$
$k_{25} = -\frac{12EI}{L^3}$
L

+



$k_{66} = \frac{4EI}{L}$
b
$k_{16} = 0$
$k_{46} = 0$
$\times \quad u_6$
$u_6 = 1$
e
$k_{36} = \frac{2EI}{L}$
$k_{26} = \frac{6EI}{L^2}$
$k_{56} = -\frac{6EI}{L^2}$
L

+



Q_{f6}
b
e
Q_{f1}
Q_{f4}
Q_{f3}
Q_{f2}
Q_{f5}
L

Donc

$$Q_1 = k_{11}u_1 + k_{12}u_2 + k_{13}u_3 + k_{14}u_4 + k_{15}u_5 + k_{16}u_6 + Q_{f1}$$

$$Q_2 = k_{21}u_1 + k_{22}u_2 + k_{23}u_3 + k_{24}u_4 + k_{25}u_5 + k_{26}u_6 + Q_{f2}$$

$$Q_3 = k_{31}u_1 + k_{32}u_2 + k_{33}u_3 + k_{34}u_4 + k_{35}u_5 + k_{36}u_6 + Q_{f3}$$

$$Q_4 = k_{41}u_1 + k_{42}u_2 + k_{43}u_3 + k_{44}u_4 + k_{45}u_5 + k_{46}u_6 + Q_{f4}$$

$$Q_5 = k_{51}u_1 + k_{52}u_2 + k_{53}u_3 + k_{54}u_4 + k_{55}u_5 + k_{56}u_6 + Q_{f5}$$

$$Q_6 = k_{61}u_1 + k_{62}u_2 + k_{63}u_3 + k_{64}u_4 + k_{65}u_5 + k_{66}u_6 + Q_{f6}$$

Sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ Q_4 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{f1} \\ Q_{f2} \\ Q_{f3} \\ Q_{f4} \\ Q_{f5} \\ Q_{f6} \end{bmatrix}$$

ou

$$\mathbf{Q} = \mathbf{k}\mathbf{u} + \mathbf{Q}_f$$

$$k_{41} = -k_{11} = -\frac{EA}{L}$$

$$k_{21} = k_{31} = k_{51} = k_{61} = 0$$

$$k_{14} = -\frac{EA}{L}$$

$$k_{44} = \frac{EA}{L}$$

$$k_{24} = k_{34} = k_{54} = k_{64} = 0$$

$$k_{32} = k_{62} = \frac{6EI}{L^2}$$

$$k_{22} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{52} = -\frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{12} = k_{42} = 0$$

$$k_{15} = k_{45} = 0 \qquad k_{25} = -\frac{12EI}{L^3} \qquad k_{35} = k_{65} = -\frac{6EI}{L^2} \qquad k_{55} = \frac{12EI}{L^3}$$

$$k_{33} = \frac{4EI}{L} \qquad k_{63} = \frac{2EI}{L}$$

$$k_{23} = \frac{6EI}{L^2} \qquad k_{53} = -\frac{6EI}{L^2}$$

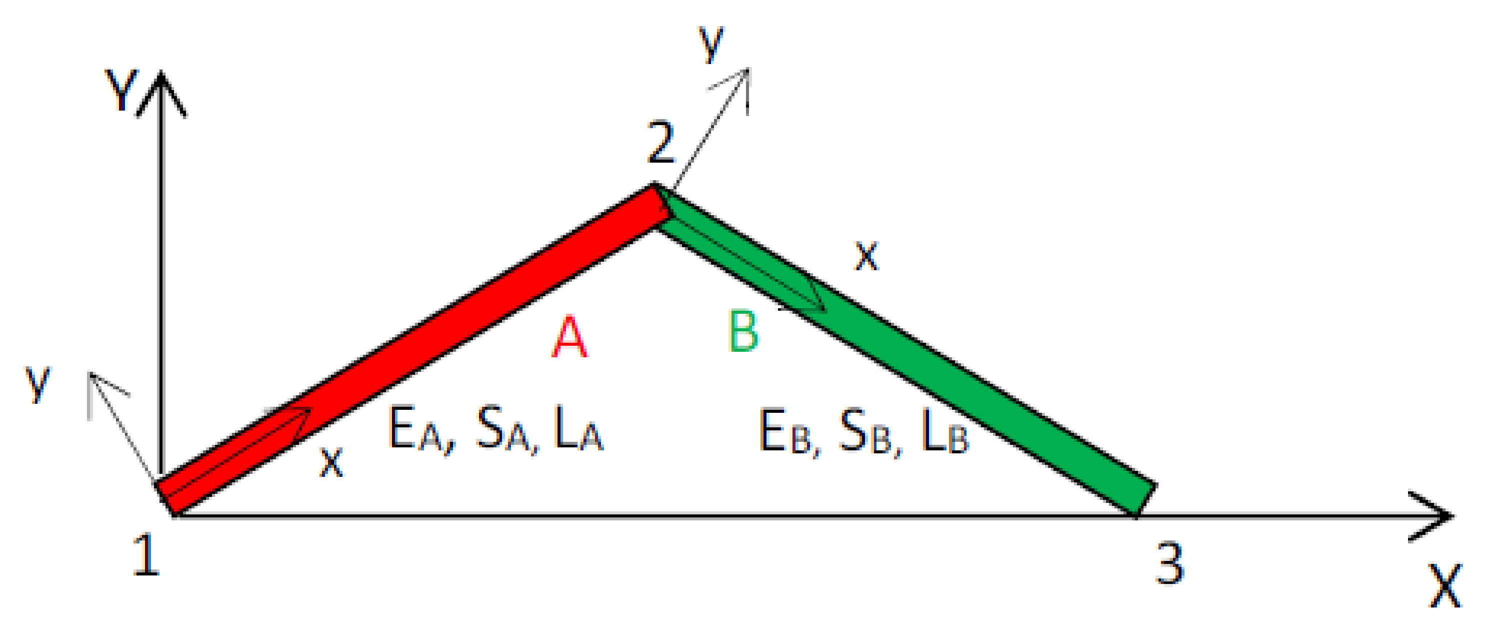
$$k_{16} = k_{46} = 0$$

$$k_{26} = -k_{56} = \frac{6EI}{L^2} \qquad k_{36} = \frac{2EI}{L} \qquad k_{66} = \frac{4EI}{L}$$

$$\mathbf{k} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 6L & 0 & -12 & 6L \\ 0 & 6L & 4L^2 & 0 & -6L & 2L^2 \\ -\frac{AL^2}{I} & 0 & 0 & \frac{AL^2}{I} & 0 & 0 \\ 0 & -12 & -6L & 0 & 12 & -6L \\ 0 & 6L & 2L^2 & 0 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

a – Poutres non alignées

prenons l'exemple des barres inclinées et remplaçons les par des poutres inclinées.



les éléments poutre possèdent 3 ddl par nœuds (u, v, θ), Les matrices de rigidité des éléments A et B s’écrivent alors dans leurs repères locaux (x,y) :

Matrice de rigidité de l'élément A sur (x,y) local

Noeuds 1 (local) avec 3 ddl (u,v,θ)

Noeuds 2 (local) avec 3 ddl (u,v,θ)

Noeuds 1

Noeuds 2

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{63} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité de l’élément B sur (x,y) local

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \text{Noeuds 1 (local) avec 3 ddl } (u,v,\theta) & \text{Noeuds 2 (local) avec 3 ddl } (u,v,\theta) \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Noeuds 1} \\ \\ \\ \text{Noeuds 2} \end{array} &
\begin{bmatrix}
k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\
k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\
k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\
k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\
k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\
k_{61} & k_{63} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Pour pouvoir procéder à l'assemblage, il faut que les deux matrices de rigidités des éléments A et B soient transformées dans le repère global (X,Y) commun aux deux éléments Ainsi et après transformation dans le <u>repère global</u>, nous obtenons (pour simplifier, nous notons les termes des matrice dans le repère global en lettre majuscule (k---> K):

Matrice de rigidité de l'élément A sur (X,Y) global

Noeuds 1 (global) avec 3 ddl (u,v,θ)

Noeuds 2 (global) avec 3 ddl (u,v,θ)

Noeuds 1

Noeuds 2

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\ K_{61} & K_{63} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66} \end{bmatrix}$$

Matrice de rigidité de l'élément B sur (X,Y) global

$$
\begin{array}{c c}
 & \begin{array}{cc} \text{Noeuds } 2 \text{ (global) avec 3 ddl } (u,v,\theta) & \text{Noeuds } 3 \text{ (global) avec 3 ddl } (u,v,\theta) \end{array} \\
\begin{array}{c} \text{Noeuds } 2 \\ \\ \\ \text{Noeuds } 3 \end{array} &
\begin{bmatrix}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\
K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\
K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\
K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\
K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\
K_{61} & K_{63} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

Après assemblage nous obtenons :

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccc}\text{nœud 1 (ddl } u_1 \text{et } v_1) & \text{nœud 2 (ddl } u_2 \text{et } v_2) & \text{nœud 3 (ddl } u_3 \text{et } v_3)\end{array} \\
\begin{array}{c}\text{nœud 1 (ddl } u_1 \text{et } v_1) \\ \\ \\ \text{nœud 2 (ddl } u_2 \text{et } v_2) \\ \\ \\ \text{nœud 3 (ddl } u_3 \text{et } v_3)\end{array} &
\left[\begin{array}{ccc|ccc|ccc}
K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} & 0 & 0 & 0 \\
K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} & 0 & 0 & 0 \\
K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} & 0 & 0 & 0 \\
\hline
K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} + K_{11} & K_{45} + K_{12} & K_{46} + K_{13} & K_{14} & K_{15} & K_{16} \\
K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} + K_{21} & K_{55} + K_{22} & K_{56} + K_{23} & K_{24} & K_{25} & K_{26} \\
K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} + K_{31} & K_{65} + K_{32} & K_{66} + K_{33} & K_{34} & K_{35} & K_{36} \\
\hline
0 & 0 & 0 & K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} & K_{46} \\
0 & 0 & 0 & K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} & K_{56} \\
0 & 0 & 0 & K_{61} & K_{62} & K_{63} & K_{64} & K_{65} & K_{66}
\end{array}\right]
\end{array}
$$

5.5 - Résolution du système après assemblage

5.5 -1 Relation de rigidité et conditions aux limites CL

La relation de rigidité d'une structure composée de barres ou de poutres s'écrit après assemblage :

$$\{F_S\} = [K_S].\{q_S\}$$

$\{F_S\}$: Vecteur Force assemblé

$[K_S]$: Matrice de rigidité assemblée

$\{q_S\}$: Vecteur déplacement inconnu à déterminer

Cette relation a été obtenue sans avoir eu recours aux conditions aux limites de la structure. Elle représente donc une structure dont tous les nœuds (donc les ddl) sont encore libres de tout appuis et peut donc bouger librement sans se déformer. Une telle structure n'a pas de solution car elle subit en cas de chargement un mouvement de corps rigide (déplacements sans déformations).

Un tel système est indéterminé. De ce fait, la relation matricielle de rigidité qui le régit ne peut donc pas donner de solution. Mathématiquement , cela se traduit par la singularité de la matrice [K_S] (inexistence d'inverse de la matrice de rigidité).

En général ce genre de système est le résultat de structures dite hypostatiques qui sont indéterminée car mal conditionnées et aboutissant à des systèmes avec plus d’équations que d’inconnues ?

Quelles solutions à ce problème ?

Il faut pouvoir <u>réécrire</u> les relations de rigidités obtenues après assemblage en tenant compte des conditions aux limites (CL) de la structure à étudier et veiller à imposer ces conditions aux limites(ou d’appuis) en nombre suffisant pour que <u>le système soit au moins isostatique. (condition</u> <u>**nécessaire pour avoir une solution).**</u>

Remarque : *il évident que l'introduction des CL dans les relations de rigidité de la barre ou de la poutre seuls n'a pas de sens. Les CL concernent évidemment seulement les structures à étudier.*

Types d'appuis : les conditions d'appuis des nœuds dépendent donc de leurs (ddl). Il existe deux états concernant les appuis des nœuds ou plus précisément leurs (ddl)

(**ddl) libre :** cela veut dire que le nœud concerné est libre de bouger selon la direction de ce (ddl). La valeur de ce déplacement dans ce cas est l'inconnue du problème. Cependant la force conjuguée à ce déplacement selon ce (ddl) doit être imposée (c'est une donnée du problème)

(**ddl) Imposé :** cela veut dire que le (ddl) du nœud concerné est imposé à une valeur qui est une donnée du problème. La force conjuguée selon ce (ddl) imposé est une inconnue du problème : c'est la réaction de liaison.

5.5-2- Méthode de traitement des conditions d’appuis

Le traitement des conditions d’appui se traduit par des opérations à effectuer sur la relation de rigidité du système à résoudre pour rendre

- La Matrice [K_S] non singulière
- Faire en sorte que les valeurs imposées soient prises en comptes lors de la résolution du système

Ils existent plusieurs méthodes d’introduction de conditions d’appuis :

- Parmi ces méthodes, la plus simple consiste à éliminer les équations liées aux ddl imposés, ce qui permet de réduire le système d’équations algébriques et ainsi la taille de la matrice de rigidité, jusqu'à ce le système admette une solution.

La matrice ainsi réduite devient inversible et permet la résolution du système avec les inconnues restantes. Mais si cette méthode a l'avantage de présenter le principe de résolution, elle n'est, par contre, pas utilisée dans les programmes de calcul matriciel car elle modifie la taille de la matrice de rigidité ce qui n'est pas pratique.

En effet, dans la pratique il existe plusieurs autres méthodes d'introduction des conditions aux limites sans modifier la taille de la matrice de rigidité. Elles présentent des facilités lors de leur programmation et permettent de calculer les autres inconnues résultantes des conditions d'appuis (Réactions). (Utilisée par exemple dans la méthodes de éléments finis)

Nous présentons dans ce qui suit, la plus simple

5.5-3 Méthode directe d’introduction des conditions d’appuis

La relation de rigidité d’une structure après assemblage (tous ses nœuds sont encore libres de tout appuis) s’écrit :

$$[K_S].\{q_S\} = \{F_S\}$$

$[K_S]$, $\{F_S\}$ matrice de rigidité et vecteur force après assemblage et avant modification par les conditions d'appuis.

Après développement :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

Le système est a (n) inconnue q , donc la matrice de rigidité est de taille (nxn) et le vecteur F et q sont de taille (n)

Considérant qu'un (ddl) du vecteur des déplacements, sa $(i)^{ieme}$ par exemple, soit connue et imposée à une valeur donnée $\bar{q}$. Ainsi : $q_i = \bar{q}$

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \bar{q} \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix}$$

Pour maintenir l'équilibre, l'introduction de cette valeur de (ddl) imposée à la position (i) va créer une réaction R_i selon ce même (ddl) telle que la relation de rigidité se réécrive :

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \dots & k_{1i} & \dots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{i1} & \dots & k_{ii} & \dots & k_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \dots & k_{ni} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ \bar{q} \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_i + R_i \\ \vdots \\ F_n \end{Bmatrix}$$

Développons encore ce système en système d'équations :

$$\begin{cases} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \cdots + k_{1i}\bar{q} + \cdots + k_{1n}q_n = F_1 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ k_{i1}q_1 + k_{i2}q_2 + \cdots + k_{ii}\bar{q} + \cdots + k_{in}q_n = F_i + R_i \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \cdots + k_{ni}\bar{q} + \cdots + k_{nn}q_n = F_n \end{cases}$$

En réécrivant ce système : équation n° "i" >>>>>>>

$$\begin{cases} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \cdots + 0 + \cdots + k_{1n}q_n = F_1 - k_{1i}\bar{q} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ k_{i1}q_1 + k_{i2}q_2 + \cdots + 0 + \cdots + k_{in}q_n = F_i + R_i - k_{ii}\bar{q} \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \cdots + 0 + \cdots + k_{nn}q_n = F_n - k_{ni}\bar{q} \end{cases}$$

Eliminant maintenant l'équation n° (i) :

$$k_{i1}q_1 + k_{i2}q_2 + \cdots + 0 + \cdots + k_{in}q_n = F_i + R_i - k_{ii}\bar{q}$$

et remplaçant cette équation par l'équation suivante: $\boldsymbol{q_i} = \overline{\boldsymbol{q}}$

Et pour garder la même écriture que l'équation initiale, on la réécrit sous la forme suivante :

$$0\,.\,q_1 + 0.\,q_2 + \cdots + 1\,.\,\boldsymbol{q_i} + \cdots + 0.\,q_n = \overline{\boldsymbol{q}}$$

Réintroduisons cette dernière dans le système d'équations :

$$\begin{cases} k_{11}q_1 + k_{12}q_2 + \cdots + 0.\,\boldsymbol{q_i} + \cdots + k_{1n}q_n = F_1 - k_{1i}\overline{q} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ 0.\,q_1 + 0.\,q_2 + \ldots + 1.\,\boldsymbol{q_i} + \cdots + 0.\,q_n = \overline{\boldsymbol{q}} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ k_{n1}q_1 + k_{n2}q_2 + \cdots + 0.\,\boldsymbol{q_i} + \cdots + k_{nn}q_n = F_n - k_{ni}\overline{q} \end{cases}$$

Et finalement sous forme matricielle

$$\begin{bmatrix} k_{11} & \ldots & 0 & \ldots & k_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ k_{n1} & \ldots & 0 & \ldots & k_{nn} \end{bmatrix} . \begin{Bmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_i \\ \vdots \\ q_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 - k_{1i}\overline{q} \\ \vdots \\ \overline{\boldsymbol{q}} \\ \vdots \\ F_n - k_{ni}\overline{q} \end{Bmatrix}$$

ou plus simplement

$$[\overline{K_S}].\{q_S\} = \{\overline{F_S}\}$$

$[\overline{K_S}]$, $\{\overline{F_S}\}$ matrice de rigidité et vecteur force après modification par les conditions d'appuis

Le système est maintenant avec (n-1) inconnues de déplacements et une inconnue de type force : la réaction. R_i
S’il existe d’autres conditions imposées de déplacements, la procédure se poursuit et se répète exactement de la même manière. Une fois toutes les conditions d’appuis introduites, nous obtenons une matrice de rigidité et un vecteur forces qui ont été modifiés selon les conditions d’appuis de la structure à calculer.

5.5.4. Résolution du système

lorsque toutes les conditions aux limites ont été introduites dans la relation de rigidité, nous pouvons opérer une résolution du nouveau système d’équation, ce qui nous permettra de trouver le vecteur déplacement.

Une fois le vecteur déplacement trouvé, il ne reste plus qu'à revenir aux équations éliminées lors de la procédure pour pouvoir calculer les différentes réactions relatives aux appuis imposés.

Ainsi le calcul de la réactions R_i selon la $(i)^{ieme}$ composante imposée , se fait en utilisant la $(i)^{ieme}$ équation éliminée lors de l'introduction des conditions aux limites qui est :

$$k_{i1}q_1 + k_{i2}q_2 + \cdots + k_{ii}q_i \ + \cdots + k_{in}q_n = F_i + R_i$$

Et donc

$$R_i = \left(\sum_{j=1}^{n} k_{ij}q_j\right) - F_i$$

5.5.5. Charge Equivalentes

Un aspect important concernant l'application des chargement reste a éclaircir.

En effet, le vecteur force extérieure ne peut contenir que des forces appliquées aux nœuds et selon les ddl de ces nœuds. Dans le cas de forces réparties sur les éléments il est nécessaire que ces forces soit transformées, pour chaque barre ou poutre , en forces équivalentes appliquées aux nœuds (et selon les dll de ces éléments).

Par la suite, lors de l'assemblage, ces forces sont sommées pour un même dll appartenant à plusieurs éléments. Evidemment, au préalable il devront, de la même manière que pour les Matrices de rigidités, êtres transformées dans le même repère global.

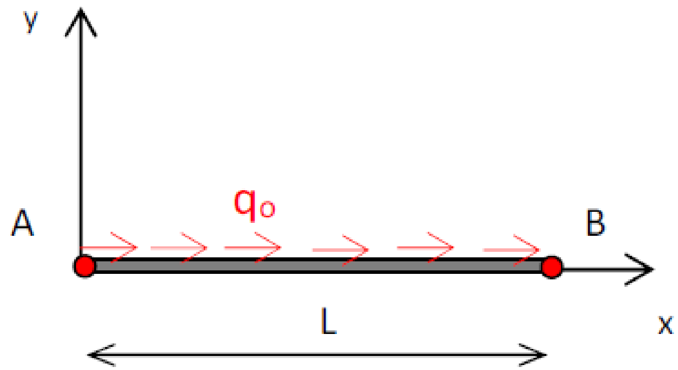
Cet aspect sera présenté plus tard dans le cours lors de la présentation de la méthode des éléments finis dans son développement théorique (Construction des éléments, détermination de leurs matrices de rigidité et de leurs charges équivalentes.

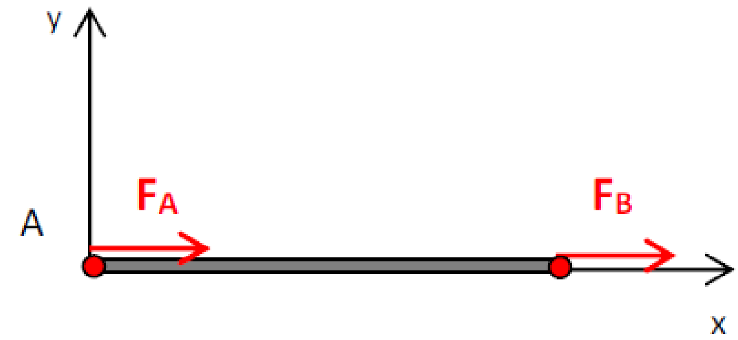
En attendant, et pour pouvoir traiter des exemples pratiques de calcul comportant des charges reparties, on peut présenter quelques exemple de charges équivalentes dans les repères locaux (sans démonstration) concernant des éléments simples comme la barre et la poutre.

Prenons par exemple le cas de courant des charges uniformément reparties :

• *Elément de Barre uniformément chargé avec q_o*

charge réelle appliquée (uniforme) : qo >>>>>>>>> charge équivalent aux nœuds : F_A, F_B

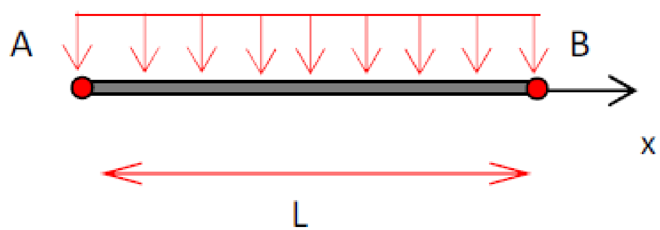


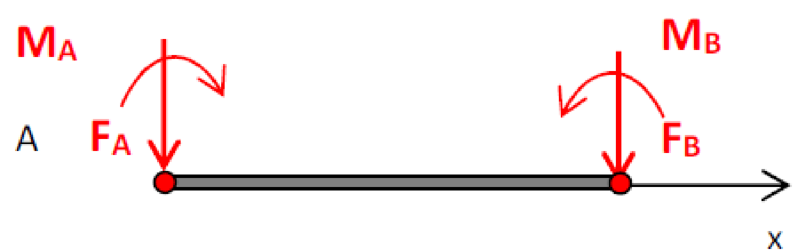


$$\{F_{eq}\} = \begin{Bmatrix} F_A \\ F_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{q_o L}{2} \\ \dfrac{q_o L}{2} \end{Bmatrix}$$

• *Elément de Poutre uniformément chargé avec q_o*

charge réelle appliquée (uniforme) : qo >>>>> charge équivalent aux nœuds : F_A,M_A,F_B, M_B





$$\{F_{eq}\} = \begin{Bmatrix} F_{yA} \\ M_A \\ F_{yB} \\ M_B \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{q_o L}{2} \\ \dfrac{q_o L^2}{12} \\ \dfrac{q_o L}{2} \\ -\dfrac{q_o L^2}{12} \end{Bmatrix}$$

5.5.6. Calcul des efforts dans les éléments.

Il est évident que le calcul des efforts n'a pas de sens dans le repère global. Il doit s'opérer pour chaque barre ou poutre dans son repère local.

Ainsi, a partir du vecteur déplacement global obtenu pour la structure, il faut récupérer pour chaque élément son vecteur déplacements (a partir des connexions). Ce dernier étant déterminé dans le repère global (noté $\{q_e\}_g$) doit d'abord être transformé par la matrice de transformation $[R_e]$ dans le repère local (noté $\{q_e\}_l$) tel que :

$$\{q_e\}_l = [R_e]\{q_e\}_g$$

il suffit ensuite de calculer les efforts dans le repère local selon :

$$\{F_{effort}\} = [K_e]\{q_e\}$$

Remarque :

dans le cas de charge équivalent sur l'élément, et en raison de l'équilibre nous obtenons :

$$\{F_{effort}\} = [K_e]\{q_e\} - \{F_{eq}\}$$

$\{F_{eq}\}$: étant le vecteur de charge équivalent de l'élément dans son <u>repère local</u>