الفصل الرابع: الحركة النسبية

I- مقدمة:

نقول إن جسما في حالة حركة بالنسبة لأخر إذا تغيرت وضعيته عبر الزمن، في حين إذا لم تتغير وضعيته خلال الزمن، فنقول إن الجسم في حالة سكون نسبي. الحركة والسكون مفهومان نسبيين.

نعتبر حافلة تنقل ركاب تمر بالقرب من منزل:

- المنزل ساكن بالنسبة للأرض.
- المنزل في حالة حركة بالنسبة للشمس.
- الحافلة في حالة حركة بالنسبة للمنزل.
- الركاب في حالة حركة بالنسبة للمنزل.
- الركاب في حالة سكون بالنسبة للحافلة.

إذا الحركة والسكون مفاهيم نسبية: أي بالنسبة لمن نعتبرها.

لاحظ أيضا أن المنزل يمكن اعتباره في حالة حركة بالنسبة للركاب. يجب تحديد المعالم التي بالنسبة لها ندرس الحركة.

في هذا الفصل نريد دراسة المقادير الحركية مثل الوضعية و السرعة و التسارع لنقطة مادية في معلم $R(O,x,y,z)$ عندما تعرف هذه المقادير في معلم $R'(O',x',y',z')$ الذي يكون في حالة حركة بالنسبة لـ $R(O,x,y,z)$. تسمى هذه العملية **بتركيب الحركات**.

نسمي المعلم $R(O,x,y,z)$ **بالمعلم المطلق** و المعلم $R'(O',x',y',z')$ **المعلم النسبي**.

II- السرعة والتسارع في الحركة النسبية:

ليكن لدينا معلمين $R(O,x,y,z)$ و $R'(O',x',y',z')$. الأول ساكن و أشعة وحدته $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ يسمى **المعلم المطلق**. و الثاني أشعة وحدته $(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}')$ في حالة حركة انسحابية و دوارنية بالنسبة للأول، ويسمى **المعلم النسبي**.الحركة بالنسبة للمعلمين تسمى **الحركة المطلقة** و **النسبية** على التوالي.

لتكن النقطة المتحركة في R وR' شعاع موضعها هو:

$\overrightarrow{OM}$ بالنسبة لـ $\boldsymbol{R}$ و $\overrightarrow{O'M}$ بالنسبة لـ $\boldsymbol{R}$.

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad \overrightarrow{O'M} = x'(t)\vec{i}\,' + y'(t)\vec{j}\,' + z'(t)\vec{k}\,'$$

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

- سرعة النقطة $\boldsymbol{M}$ بالنسبة للمعلم $\boldsymbol{R}$ تسمى **<u>السرعة المطلقة</u>** ونرمز لها بـ: $\vec{v}_a$ و سرعتها بالنسبة لـ $\boldsymbol{R'}$ تسمى **<u>السرعة النسبية</u>** و يرمز لها بـ: $\vec{v}_r$:

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k} \qquad \vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} = \frac{dx'}{dt}\vec{i}\,' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}\,' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}$$

- تسارع النقطة $\boldsymbol{M}$ بالنسبة للمعلم $\boldsymbol{R}$ يسمى **<u>التسارع المطلق</u>** ونرمز لها بـ: $\vec{\gamma}_a$ وتسارعها بالنسبة لـ $\boldsymbol{R'}$ تسمى **<u>التسارع النسبي</u>** و يرمز لها بـ $\vec{\gamma}_r$:

$$\vec{\gamma}_a = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right)_R \qquad \vec{\gamma}_r = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{R'}$$

العلاقات السابقة معروفة بإسم الطريقة المباشرة لحساب السرعة المطلقة و التسارع المطلق.

<u>علاقة الإشتقاق بالنسبة للمعلمين R و R'</u>

ليكن الشعاع $\boldsymbol{V(t)}$ مركباته في المعلم $\boldsymbol{R'}$ تعطى كما يلي:

$$\vec{V} = x'\vec{i}\,' + y'\vec{j}\,' + z'\vec{k}\,'$$

المعلم $\boldsymbol{R'}$ متحرك و المعلم $\boldsymbol{R}$ ساكن **<u>ولكن كل واحد يرى نفسه ساكن و يرى المعلم الأخر متحرك</u>** إذا:

$$\left(\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right)_{R'} = \left(\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)_{R'} = \vec{0} \qquad \left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R} = \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R} = \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R} = \vec{0}$$

$$\left(\frac{d\vec{i}\,'}{dt}\right)_{R} \neq \vec{0} \quad \left(\frac{d\vec{j}\,'}{dt}\right)_{R} \neq \vec{0} \quad \left(\frac{d\vec{k}\,'}{dt}\right)_{R} \neq \vec{0} \qquad \left(\frac{d\vec{i}}{dt}\right)_{R'} \neq \vec{0} \quad \left(\frac{d\vec{j}}{dt}\right)_{R'} \neq \vec{0} \quad \left(\frac{d\vec{k}}{dt}\right)_{R'} \neq \vec{0}$$

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_R = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + x'\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_R + y'\left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_R + z'\left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_R$$

$$\|\vec{i}'\| = \|\vec{j}'\| = \|\vec{k}'\| = 1 = cte \qquad \Rightarrow \begin{array}{l} \left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_R \perp \vec{i}' \\ \left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_R \perp \vec{j}' \\ \left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_R \perp \vec{k}' \end{array}$$

يمكننا أن نكتب:

$$\left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{i}', \quad \left(\frac{d\vec{j}'}{dt}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{j}', \quad \left(\frac{d\vec{k}'}{dt}\right)_R = \vec{\Omega} \wedge \vec{k}'$$

$\vec{\Omega}$: هو شعاع دوران المعلم ***R'*** بالنسبة ***R*** و يسمى شعاع سرعة الدوران و يكون دوما موازيا لمحور الدوران. اتجاهه يحدد حسب جهة الدوارن.

<u>**البرهان:**</u> عندما يتم الدوران حول محور من محاور المعلم و بالإتجاه الموجب للدوران, عبارة شعاع الدوران معطى بدلالة السرعة الزاوية مضروب بشعاع الوحدة لهذا المحور.

$$\overrightarrow{OM} = R.\vec{u}_\rho$$

$$\|\overrightarrow{OM}\| = R = cte$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = R.\dot{\theta}.\vec{u}_\theta = R.\dot{\theta}.\vec{k} \wedge \vec{u}_\rho = \dot{\theta}.\vec{k} \wedge R\vec{u}_\rho = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow$$

$$\|\vec{i}'\| = cte \Rightarrow \left(\frac{d\vec{i}'}{dt}\right)_R = \Omega \wedge \vec{i}'$$

$$\boxed{\|\overrightarrow{OM}\| = cte \Rightarrow \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{OM}}$$

بالرجوع لمشتق $\vec{V}$:

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_R = \frac{dx'}{dt}\vec{i}' + \frac{dy'}{dt}\vec{j}' + \frac{dz'}{dt}\vec{k}' + \vec{\Omega} \wedge (x'\vec{i}' + y'\vec{j}' + z'\vec{k}')$$

$$\left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\vec{V}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge V$$

$\vec{\Omega}$ = السرعة الزاوية × شعاع الوحدة للمحور الذي تتم حوله الدوران

<u>العلاقة بين</u> $\vec{v}_a$ **<u>و</u>** $\vec{v}_r$

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_R = \left[\frac{d}{dt}\left(\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}\right)\right]_R$$

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$$\vec{v}_a = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'} + \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M} = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

و هي **<u>قانون تركيب السرعات</u>**:

$$\vec{v}_r = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'}$$

$$\vec{v}_e = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R + \vec{\Omega} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

$\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R$: تمثل سرعة الإنسحاب

$\vec{v}_e$: سرعة الجر و تمثل سرعة المعلم ***R'*** بالنسبة لـ ***R***.

<u>العلاقة بين</u> $\vec{\gamma}_a$ و $\vec{\gamma}_r$:

$$\vec{\gamma}_a = \left(\frac{d\vec{v}_a}{dt}\right)_R = \left[\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_r + \vec{v}_e\right)\right]_R = \left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_R + \left(\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right)_R$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_R=\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{R'}+\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right)_R=\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right]_R=\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R+\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\right]_R$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\right]_R=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\Omega}\wedge\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_R$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\right]_R=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R\wedge\overrightarrow{O'M}+\vec{\Omega}\wedge\left[\left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{R'}+\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right]$$

$$\left[\frac{d}{dt}\left(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M}\right)\right]_R=\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R\wedge\overrightarrow{O'M}+(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r)+\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

$$\left(\frac{d\vec{v}_e}{dt}\right)_R=\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R+\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R\wedge\overrightarrow{O'M}+(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r)+\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

$$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_r+2(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r)+\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R+\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R\wedge\overrightarrow{O'M}++\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

$$\vec{\gamma}_a=\vec{\gamma}_r+\vec{\gamma}_c+\vec{\gamma}_e$$

التسارع النسبي:

$$\vec{\gamma}_r=\left(\frac{d\vec{v}_r}{dt}\right)_{R'}$$

تسارع كوريوليس : وهو تسارع النقطة المادية الناتجة عن ***R'*.** دوران المعلم : $\vec{\gamma}_c=2(\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_r)$

$$\vec{\gamma}_e=\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_R+\left(\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\right)_R\wedge\overrightarrow{O'M}++\vec{\Omega}\wedge(\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{O'M})$$

تسارع الجر: هو تسارع المعلم ***R'*** بالنسبة ***R***

حالات خاصة:

1- حركة انسحابية فقط: $\vec{\Omega}=\vec{0} \Rightarrow \vec{\gamma}_c=\vec{0}$. اذا كانت محاور المعلمين **R** و **R'** متوازية $[(Ox // O'x'), (Oy // O'y'), (Oz // O'z')]$ وكانت المحاور تنتقل في نفس الإتجاه $\vec{i}=\vec{i'}, \vec{j}=\vec{j'}, \vec{k}=\vec{k'}$

2- الحركة دورانية فقط **O≡O'** : و منه $\overrightarrow{OO'}=\vec{0}$ أي $\left[\left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_R=\left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt2}\right)_R=\vec{0}\right]$: و منه $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{O'M}$

3- $\vec{\Omega}=cte$ ومنه $\frac{d\vec{\Omega}}{dt}=\vec{0}$ أي $\frac{d\vec{\Omega}}{dt}\wedge\overrightarrow{O'M}=\vec{0}$

4- $\vec{\Omega}=cte$ و **O≡O'** مزيج بين الحالتين 2 و3 و منه $\vec{v}_e=\vec{\Omega}\wedge\overrightarrow{OM}$ و $\vec{\gamma}_e=\vec{\Omega}\wedge(\overrightarrow{\vec{\Omega}\wedge OM})$ أي $\vec{\gamma}_e=\vec{\Omega}\wedge\vec{v}_e$