Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf –Mila

01 ANNEE MASTER GENIE CIVIL-STRUCTURE

# Mécanique des structures

LECHEHEB. M

## Chapitre 04:

# Méthode des déplacements

## 4.1. Introduction :

La méthode des déplacements ou des déformations est une des méthodes les plus utilisées pour le calcul des systèmes hyperstatiques. Les déformations (rotations et translations) sont les inconnues.

## 4.2. Nombre d'inconnues de la méthode :

Le nombre d'inconnues de la méthode des déplacements est égal au nombre de rotations des nœuds et le nombre de translations du portique . $N = (N_r + N_t)$

-**Nombre de rotations** : le nombre de rotations d'un portique est égal aux nombre de nœuds intermédiaires rigides (*Nr* = nœuds intermédiaires rigides).

- **Nombre de translations** : le nombre de translations possibles du portique : $N_t = 2n - (b + l)$

$n$ : Nombre total de noeuds (noeuds et appuis).

$b$ : Nombre de barres.

$l$ : Nombre de liaisons (réactions) verticales ou horizontales.

## 4.3. Intérêt de la méthode des déplacements :

On réduit considérablement avec cette méthode le nombre des inconnues surabondantes et elle permet de déterminer la matrice de rigidité unique du système.

**Exemple1 :**

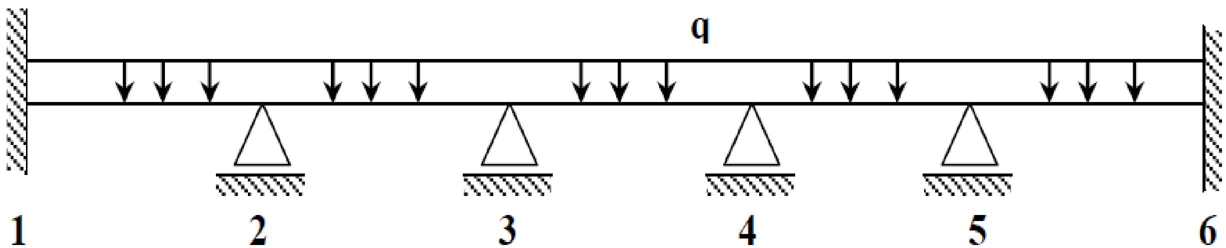


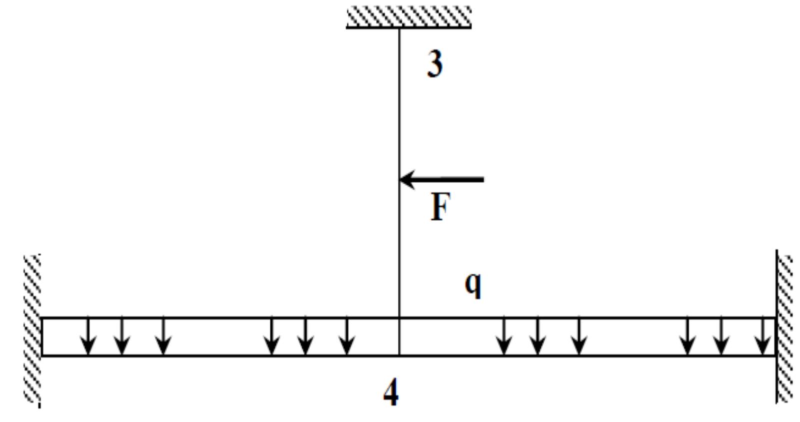

**Figure 4.1** : Poutre hyperstatique

Dans la Figure 4.1, la méthode des trois moments nous donne 6 équations à 6 inconnues ; alors que la méthode des déplacements nous donne seulement 4 inconnues (car les rotations aux nœuds 1 et 6 sont nuls)

**Exemple 2 :**

Dans cet exemple (figure 4.2) nous avons 3 inconnues par liaison encastrée ; ce qui fait en tout 9 inconnues.

La statique nous donne trois équations (une équation de moment et 2 équations de projection de toutes les forces appliquées).




Le degré d'hyperstaticité est ( fois hyperstatique).

Puisque ce système est une structure non déplaçable ($Nt = 2n - (b + l) = 2.4 - (3 + 6) = -1$) alors nous avons seulement une seule inconnue puisque nous avons un seul nœud intermédiaire (le nœud 4). Donc l'inconnues $Z_1$ c'est la rotation au nœud 4.

## 4.4. Principe de la méthode des déplacements

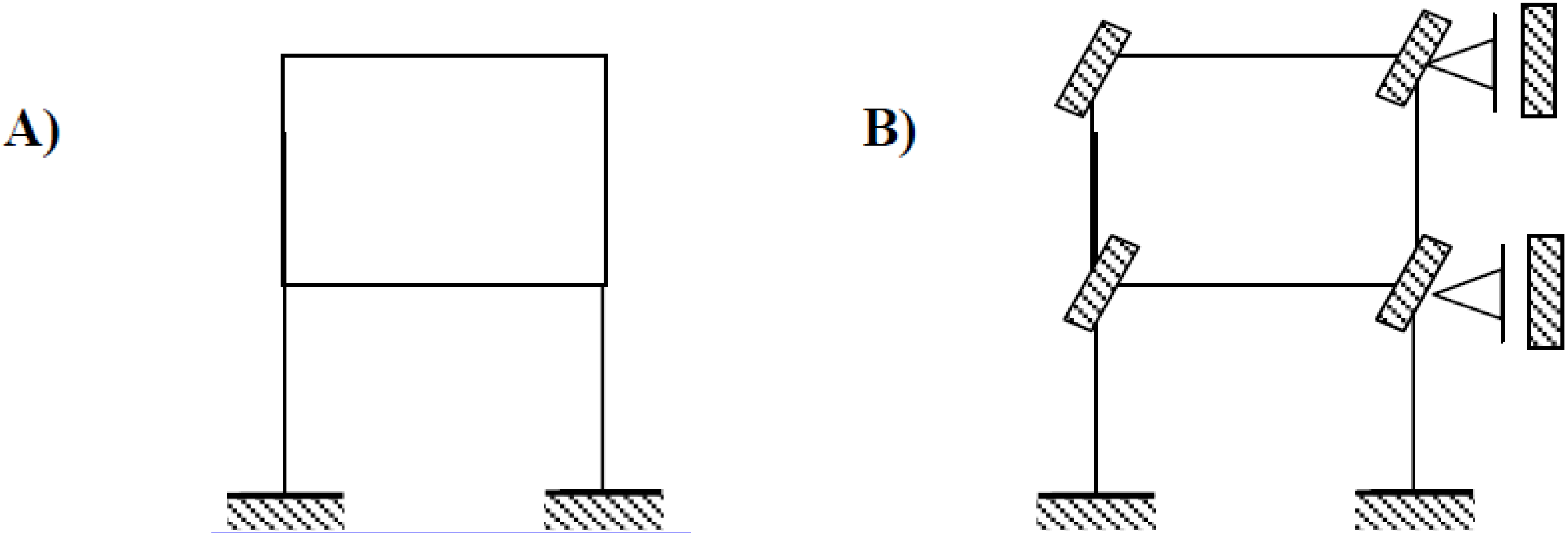
La méthode des déplacements est utilisée pour le calcul des structures constituées de barres droites encastrées dans les nœuds.

Globalement, le principe de la méthode est décrit par les trois étapes suivantes :

**a.** On détermine le système de base en bloquant (encastrements spéciaux) tous les nœuds intermédiaires de la structure réelle dans le cas d'une structure non déplaçable.

Si le système est déplaçable, on bloque aussi les nœuds intermédiaires (encastrements spéciaux) et en bloque aussi les translations à l'aide de butée (Figure 4.3b).

Chaque élément de la structure travaille seul comme le modèle bi-encastré ou encastré-articulé.




**Structure initiale (hyperstatique)**

**Structure de base**

**Figure 4.3 :** Portique hyperstatique

**b.** Afin d'obtenir un système équivalent à la structure initiale, on applique des déplacements (inconnus) correspondant aux liaisons ajoutées (Figure 4.3C).

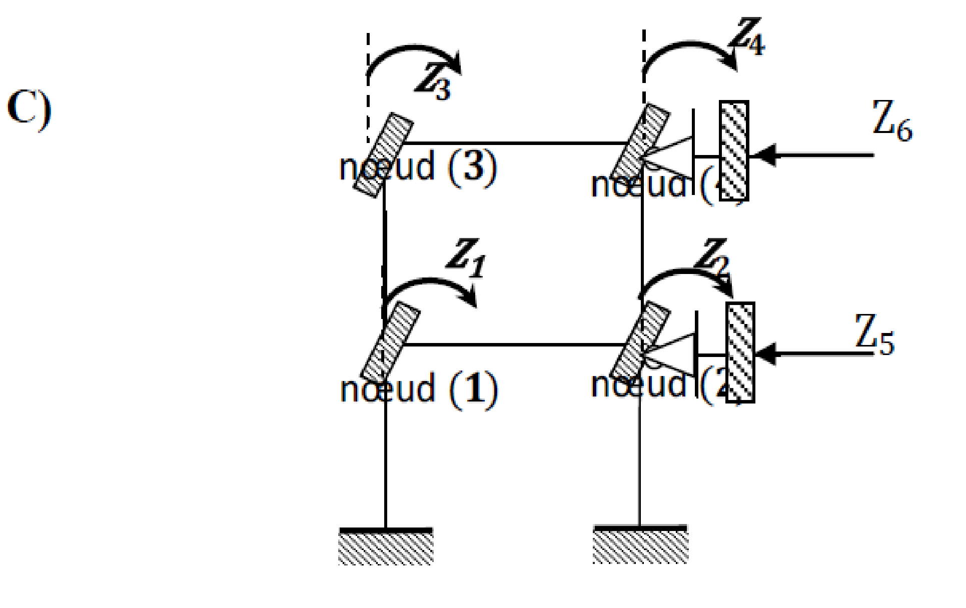



**Figure 4.3 :** Portique hyperstatique

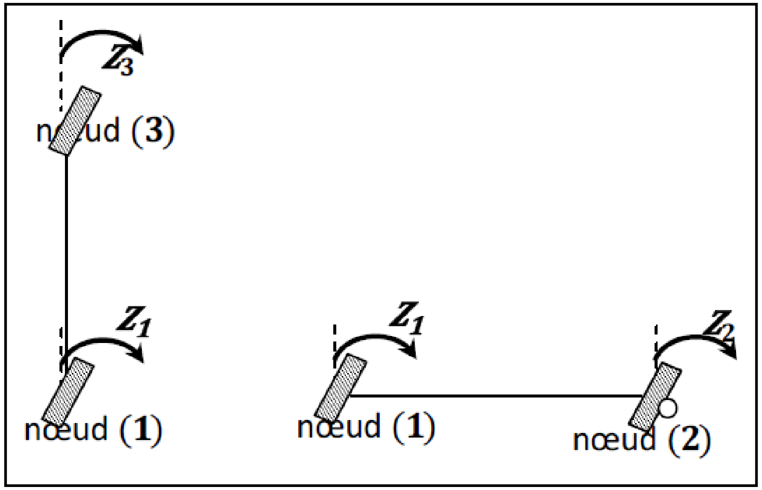
Les inconnues du problème dans le cas considéré (Figure 4.3C) sont : Z1: Rotation du nœud 1. Z2: Rotation du noeud 2. Z3: Rotation du nœud 3. Z4: Rotation du nœud 4. Z5: Translation horizontale des nœuds 1 et 2, la variation de longueur de la barre 1-2 étant négligée. Z6: Translation horizontale des nœuds 3 et 4, la variation de longueur de la barre 3-4 étant négligée.

c. Pour obtenir les déplacements inconnus (Z1, Z2, Z3, Z4, Z5, Z6) on écrit qu'il y a équilibre des réactions (moments ou forces) apparaissant dans chaque liaison ajoutée sous l’effet des forces extérieures et des déplacements imposés. Soit :

Z1=Σ des moments réactifs dans l'encastrement (1) = 0.
Z2=Σ des moments réactifs dans l'encastrement (2) = 0
Z3=Σ des moments réactifs dans l'encastrement (3) = 0.
Z4=Σ des moments réactifs dans l'encastrement (4) = 0.
Z5=Σ des réactions horizontales dans la liaison (2) = 0.
Z6=Σ des réactions horizontales dans la liaison (4) = 0.

**Exemple** : barre 1-2 et barre 1-3 :

**Figure 4.4** : Portique de la figure 4.3. (Exemple : barre 1-2 et 1-3)




Pour terminer, on retient que la méthode des déplacements est caractérisée par :

- Le blocage des rotations des nœuds intermédiaires et des translations du portique.
- Donc un seul système de base possible, donc une façon unique de mettre le problème en équations (de ce fait, la méthode est particulièrement indiquée pour le calcul automatique).

## 4.5. Classification des structures :

On distingue deux types de structures :

**A- Portiques ou structures à nœuds fixes (dit structure non déplaçable):**

Ce sont des structures dont les nœuds ne peuvent subir que des rotations (Figure 4.5). Une structure à nœuds fixes possède autant de nœuds intermédiaires que de rotations inconnues Z.

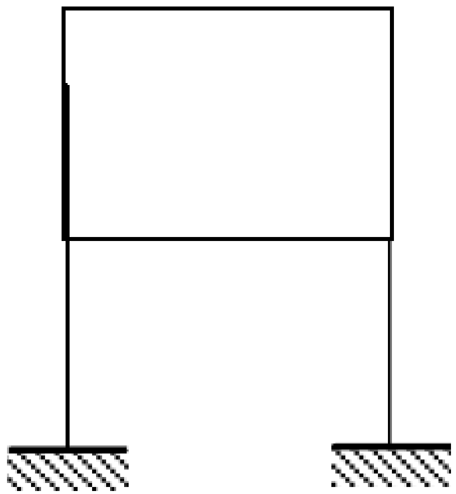
$$N_t = 2n - (b + l) = 2.3 - (2 + 4) = 0$$

$\Rightarrow$ le nombre de translation est nul

**Figure 4.5 :** Système hyperstatique non déplaçable

## B- Portiques à nœuds déplaçables (structures déplaçables)

Ce sont des structures dont les nœuds intermédiaires peuvent subir en même temps des rotations et des translations (Figure 4.6).



$$N_t = 2n - (b + l) = 2.6 - (6 + 4) = 2$$

$\Rightarrow$ deux translations

**Figure 4.6 :** Système hyperstatique déplaçable

## 4.6. Principe du nœud fixe

Considérons le schéma de la Figure 4.7 dans lequel deux barres AB et AC relient un nœud A à deux nœuds B et C qui sont fixes en translation dans le plan XY.

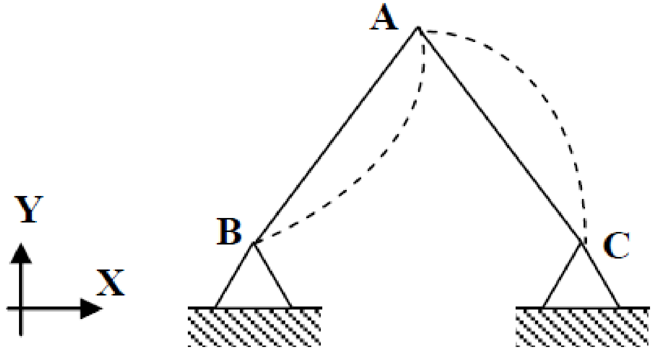



**Figure 4.7 :** Principe du nœud fixe en translation

En toute généralité, le point A ne sera mobile que si les longueurs AB et AC varient.

Le principe du nœud fixe en translation s'énonce comme suit :

Si, dans un plan XY, un nœud A est relié par deux barres AB et AC à deux nœuds B et C, tous deux fixes en translation dans ce plan, le point A peut à son tour être considéré comme fixe en translation.

## 4.7. Principe du nœud mobile

L'hypothèse simplificatrice à la base de la Méthode des rotations, notamment, la déformabilité aux efforts normaux est négligeable, revient à supposer l'incompressibilité des barres.

Les degrés de liberté de la structure à considérer dès lors sont :

- Le degré de liberté en rotation des nœuds.
- Le degré de liberté en translation horizontale de toute la file des éléments horizontaux.
- Le degré de liberté en translation verticale de toute la file des éléments verticaux

Ainsi, il suffit désormais d'un blocage simple en translation selon l'axe d'une file des éléments pour que tous les nœuds de cette file ne translatent pas. En conséquence, la structure cinématiquement déterminée (Figure 4.8) est obtenue en disposant d'un blocage simple associé à chacun des degrés de liberté précités. Les blocages simples ainsi requis, en nombre, constituent les inconnues cinématiques. Celles-ci sont donc de deux natures :

- Les angles de rotation aux nœuds intermédiaires ;
- Les déplacements horizontaux ou verticaux du système.

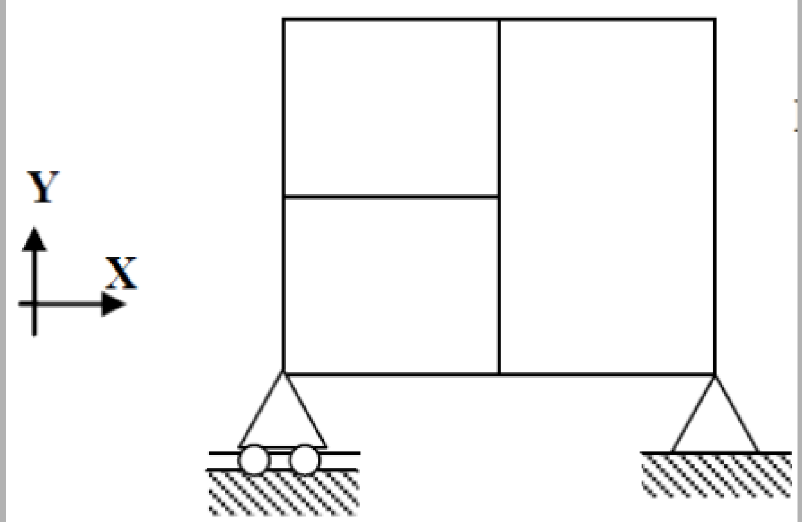
Pour l'exemple de la Figure suivante, on a :

$$N_t = 2n - (b + l) = 2.8 - (10 + 3) = 3$$

$$N_r = 6$$

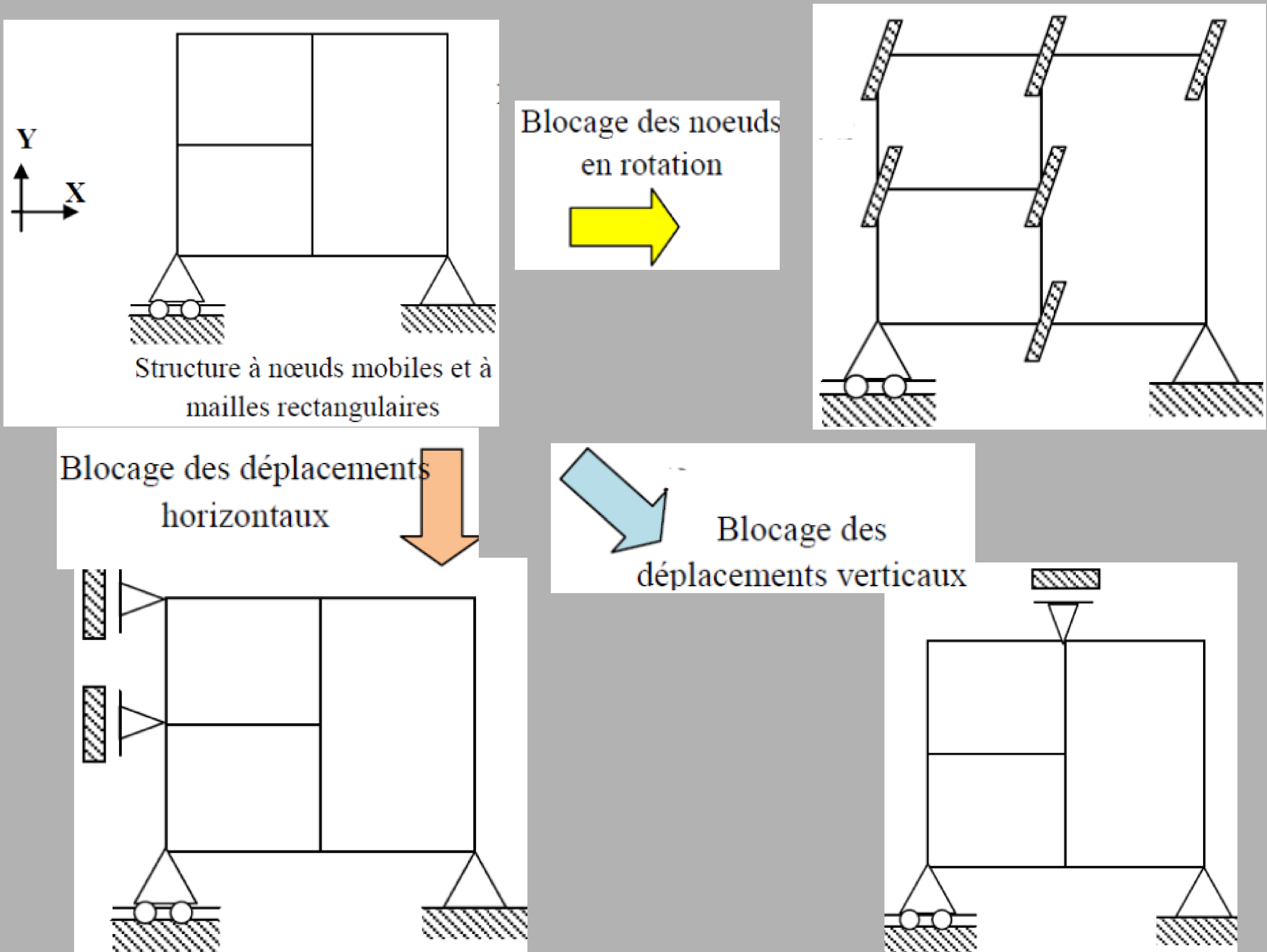
- 6 blocages de rotations de nœuds intermédiaires
- 2 blocages de déplacements horizontaux.
- 1 blocage de déplacements verticaux.

Soit au total M = 9 et la structure d'origine munie de ces 9 blocages simples




Structure à nœuds mobiles et à mailles rectangulaires

Figure 4.8


Y
X
Structure à nœuds mobiles et à mailles rectangulaires
Blocage des noeuds en rotation
Blocage des déplacements horizontaux
Blocage des déplacements verticaux

**4.8. Sollicitations des barres :**

Les barres sont sollicitées soient par :

- Les charges extérieures (réparties, ponctuelles, …) (connues)

Ce sont les inconnues

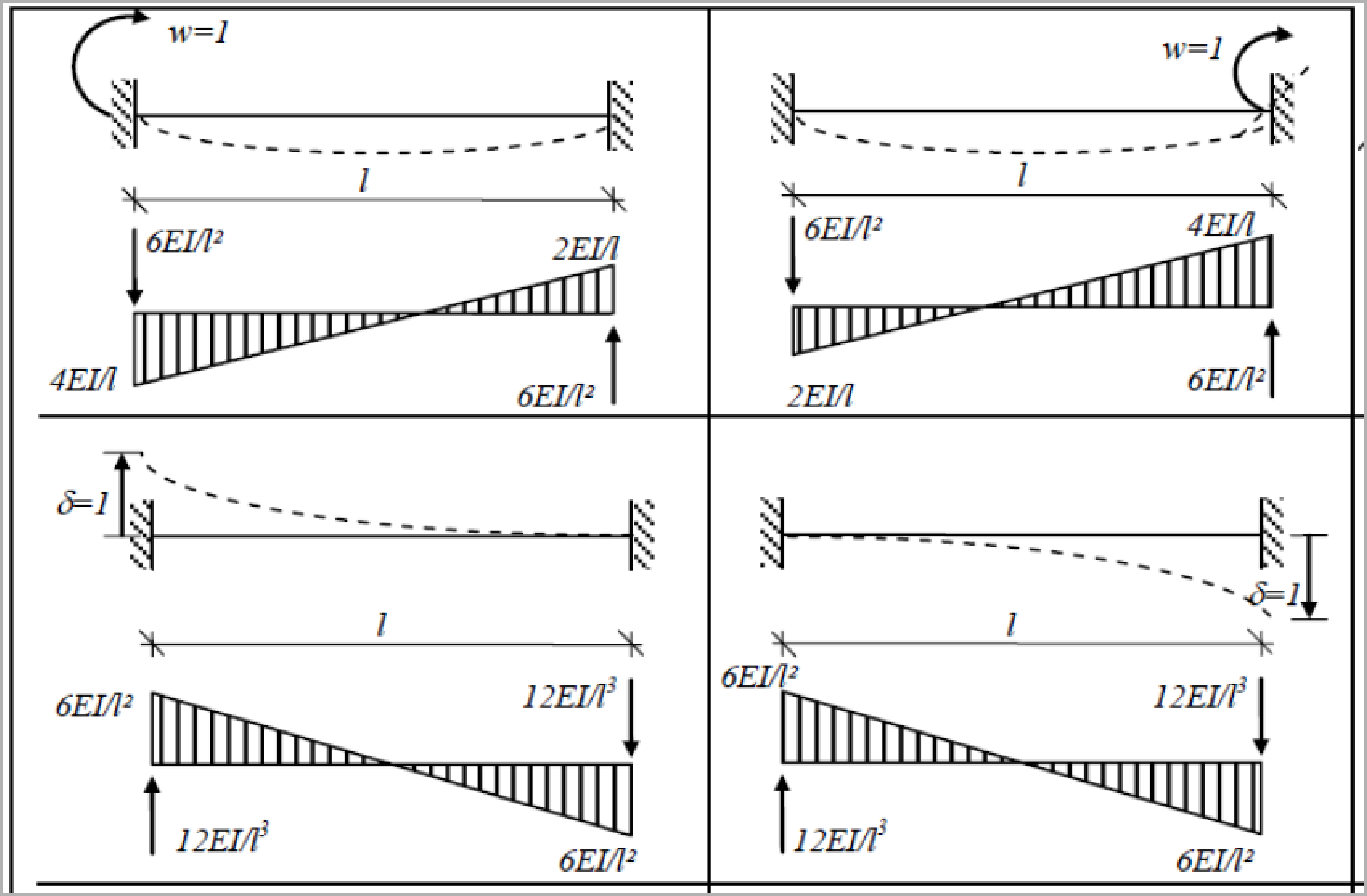
- Les rotations des nœuds intermédiaires …………. } **Ce sont les inconnues**
-Les translations …………………………………......

**4.9. Les moments fléchissants et les réactions des barres soumises à des déplacements et des charges**

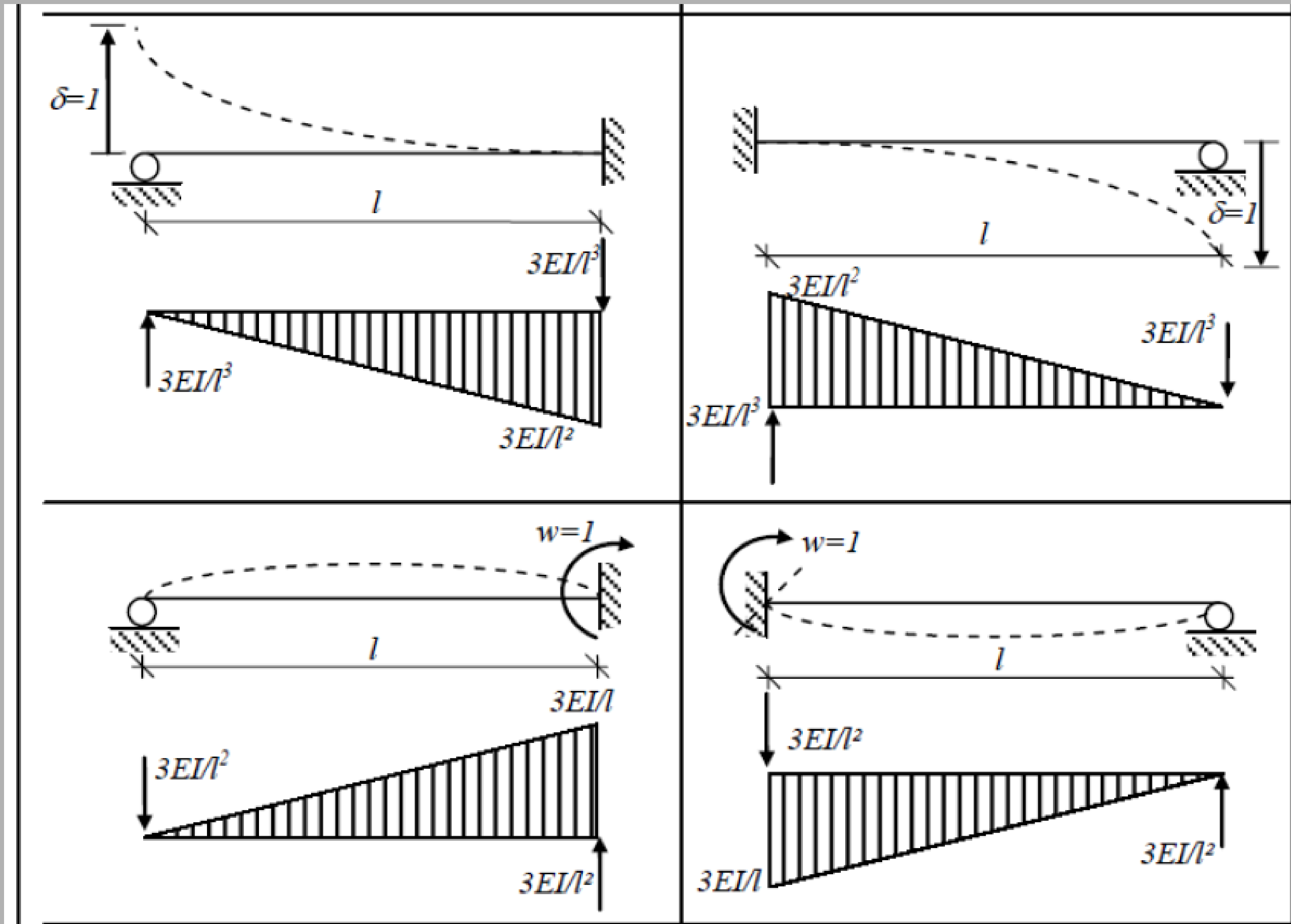
Les calculs des moments et les réactions peuvent être menés par les méthodes exposées précédemment (Méthode des trois moments et Méthode des forces).

Les diagrammes des moments et les réactions des charges extérieures les plus courantes sont regroupés dans les deux tableaux suivants.

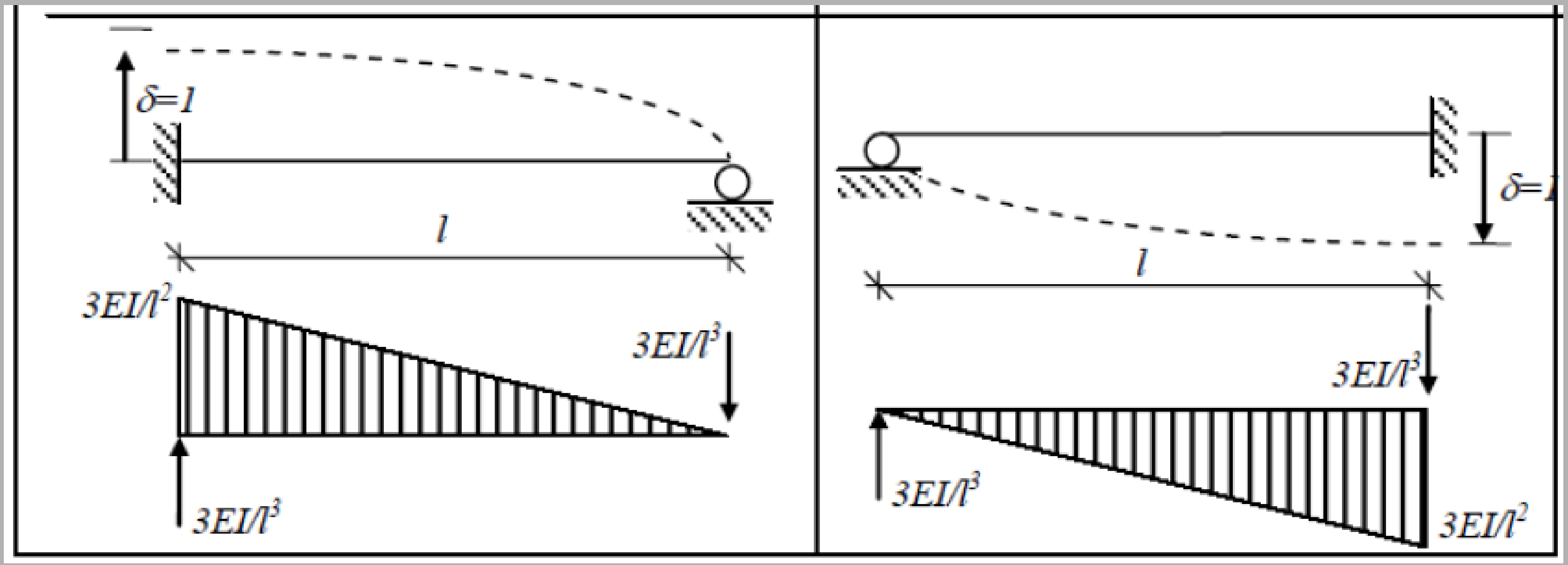
a- Les barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)



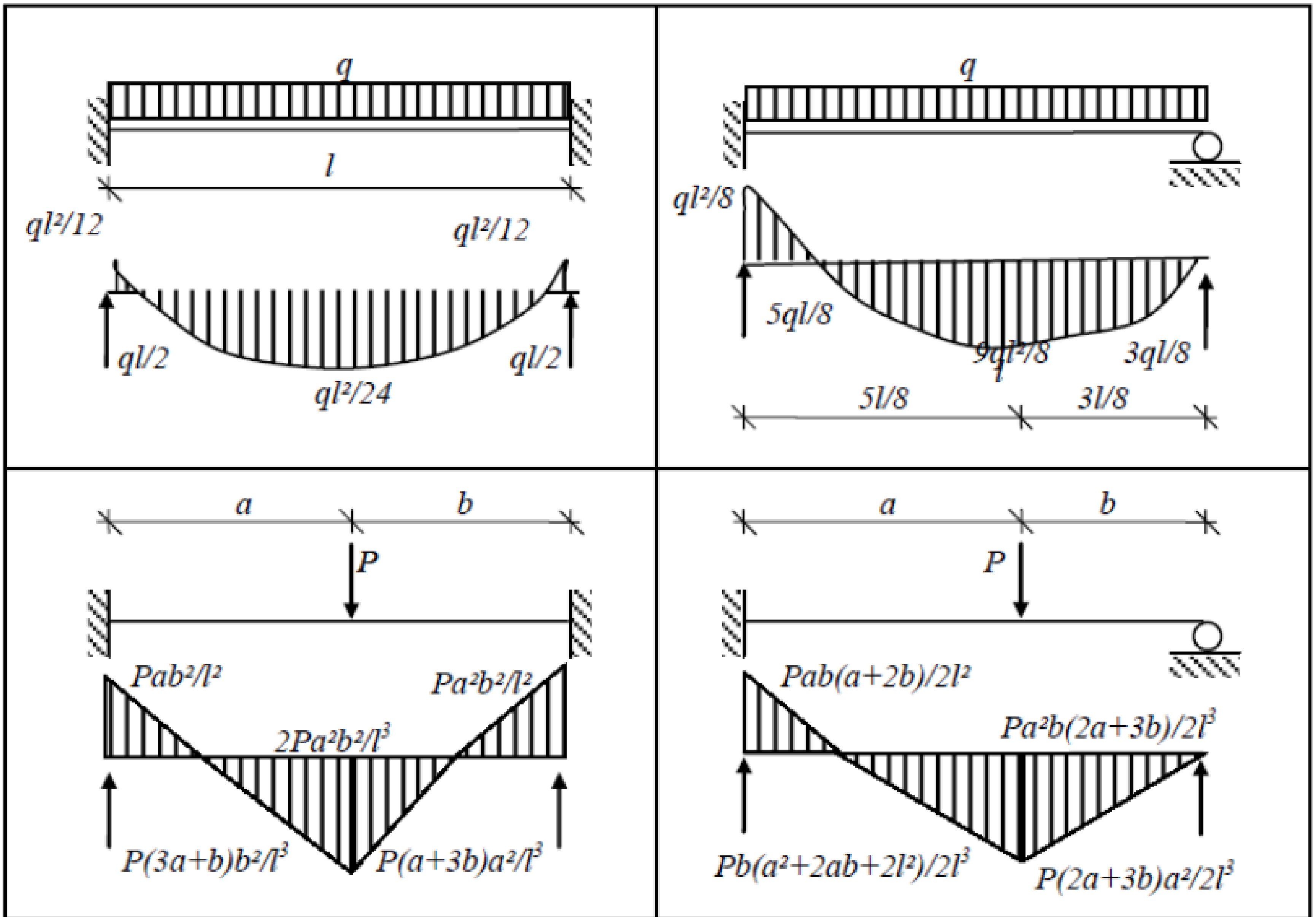
## a- Les barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)



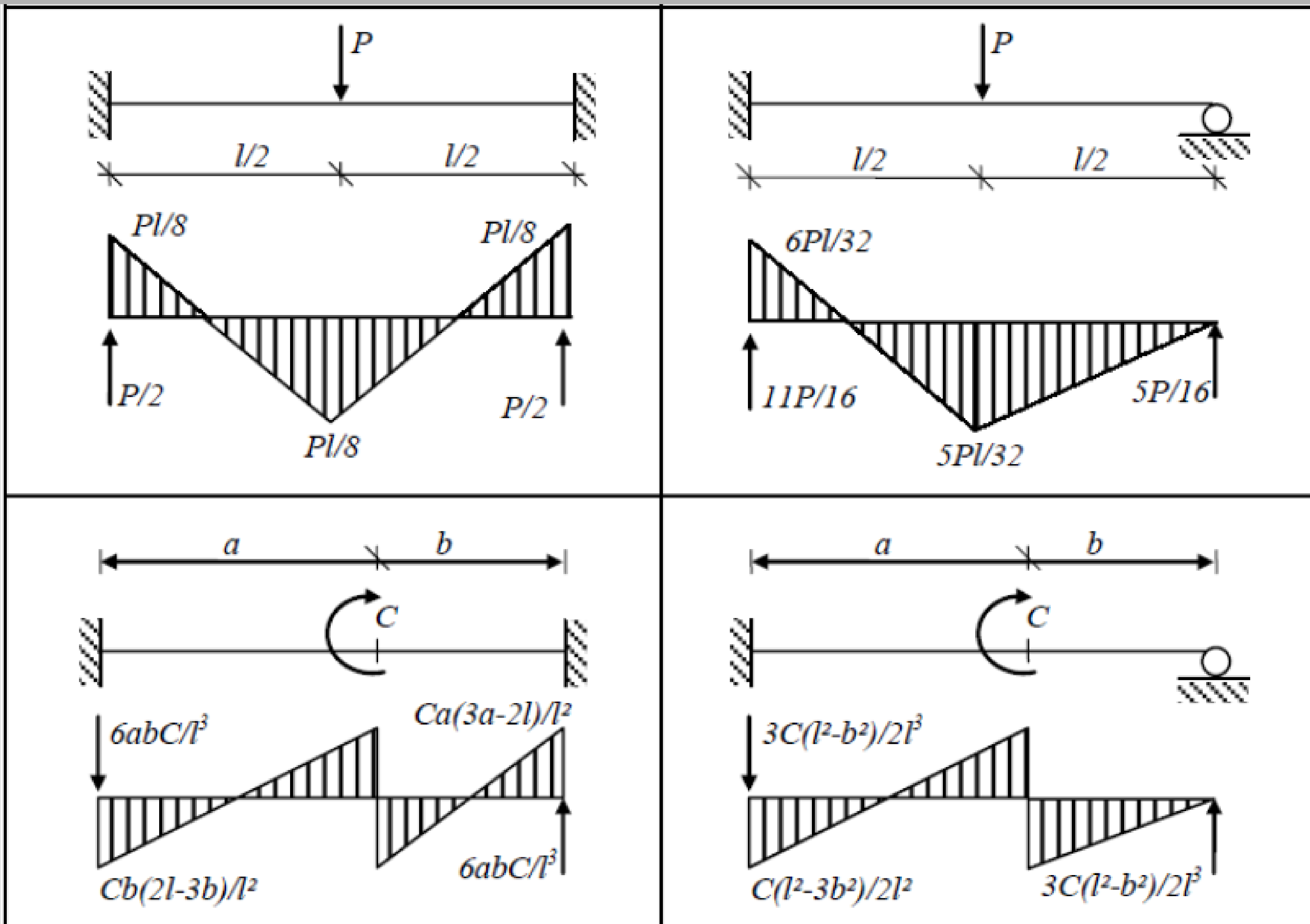
a- Les barres soumises à des déplacements d'appuis (rotations et translations)



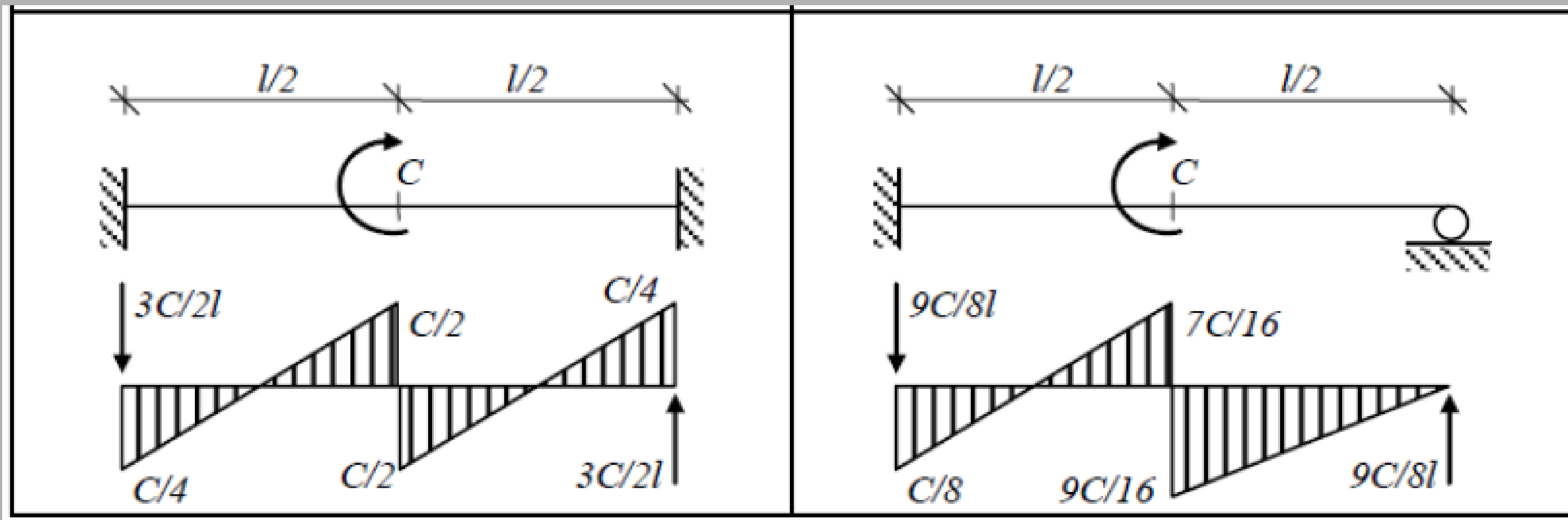
b- Les barres soumises à des charges extérieures (réparties, ponctuelles, … )



b- Les barres soumises à des charges extérieures (réparties, ponctuelles, … )



b- **Les barres soumises à des charges extérieures (réparties, ponctuelles, … )**



## 4.10. Equations d'équilibre

Chaque équation exprime l'équilibre des réactions apparaissant dans une liaison ajoutée. Dans chaque liaison ($i$) introduite, la résultante des réactions, engendrées par les forces extérieures $R_{iF}$ et par les déplacements appliqués $R_{ij}$ ($R_{ij}=r_{ij}.Z_j$), doit être nulle. pour une structure à n inconnues (n déplacements inconnus des nœuds), le système d'équations s'écrit :

$$\begin{cases} r_{11}Z_1 + r_{12}Z_2 + \ldots + r_{1n}Z_n + R_{1F} = 0 \\ r_{21}Z_1 + r_{22}Z_2 + \ldots + r_{21}Z_n + R_{2F} = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ r_{n1}Z_1 + r_{n2}Z_2 + \ldots + r_{nn}Z_n + R_{nF} = 0 \end{cases}$$

Ou encore sous forme condensée :

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij} Z_j + R_{iF} = 0 \text{ avec } i = 1, \ldots, n$$

Sous forme matricielle le système d'équations canoniques s'écrit : $$[r][Z] + [R_F] = 0$$

$[\, r_{ij} \,]$ est appelée matrice de rigidité.

-$R_{iF}$ : réaction qui apparaît dans la liaison ajoutée i sous l'action de la sollicitation globale F .
-$Zj$ est le déplacement inconnu appliqué.
-$rij$ est la réaction dans la liaison i sous l'action d'un déplacement unitaire, rotation ou translation selon la nature de la liaison j, appliqué à la liaison j.

## 4.11. Les étapes de calcul par la méthode des déplacements:

L'application de la méthode des déplacements peut se résumer aux étapes élémentaires suivantes :
-Déterminer le nombre d'inconnues ($Nr\ etNt$)
-Ecrire les n équations canoniques.
- Choisir le système de base (système isostatique le plus simple)
-Tracer le diagramme des moments fléchissants $M0$ du système isostatique due aux charges extérieures ($Z1 = Z2 = \cdots = Zn = 0$)

-Tracer les diagrammes ou épures unitaires $m_i$ ($i$=1,…,$n$) correspondant au système isostatique sans charges extérieures et avec $Z_i$=1 et les autres inconnus nuls.

-On calcul tous les coefficients de réaction ( $r_{ij}$,$R_{i0}$) { l'aide des diagrammes.

-Résolution du système d'équations canoniques pour obtenir les déplacements des nœuds.

-Correction des épures unitaires

$$\mathrm{m}_\mathrm{i}^* = \mathrm{m}_\mathrm{i}\mathrm{Z}_\mathrm{i}(\mathrm{i} = 1 \dots \mathrm{n}).\, \mathrm{m}_1^* = \mathrm{m}_1\mathrm{Z}_1,\ \mathrm{m}_2^* = \mathrm{m}_2\mathrm{Z}_2, \dots, \mathrm{m}_\mathrm{n}^* = \mathrm{m}_\mathrm{n}\mathrm{Z}_\mathrm{n}.$$

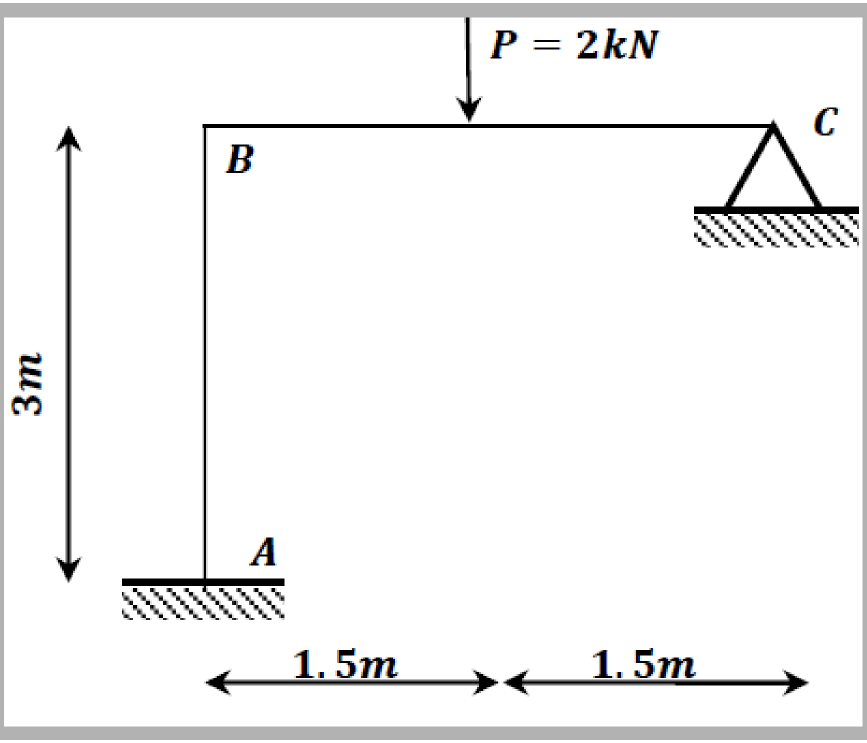
-On fait la somme de

$$\sum \mathrm{m}_\mathrm{i}^* = \mathrm{m}_1^* + \mathrm{m}_2^* + \cdots + \mathrm{m}_\mathrm{n}^*$$

-En dernier, on obtient le diagramme des moments fléchissants final du système hyperstatique réel en faisant la somme des moments suivants

$$\mathrm{M}_{\mathrm{final}} = \mathrm{M}_\mathrm{F} + \sum \mathrm{m}_\mathrm{i}^*$$

**Exemple:** On considère le portique suivant, construire le diagramme du moment fléchissant, de l'effort tranchant et de l'effort normal. EI est constante.



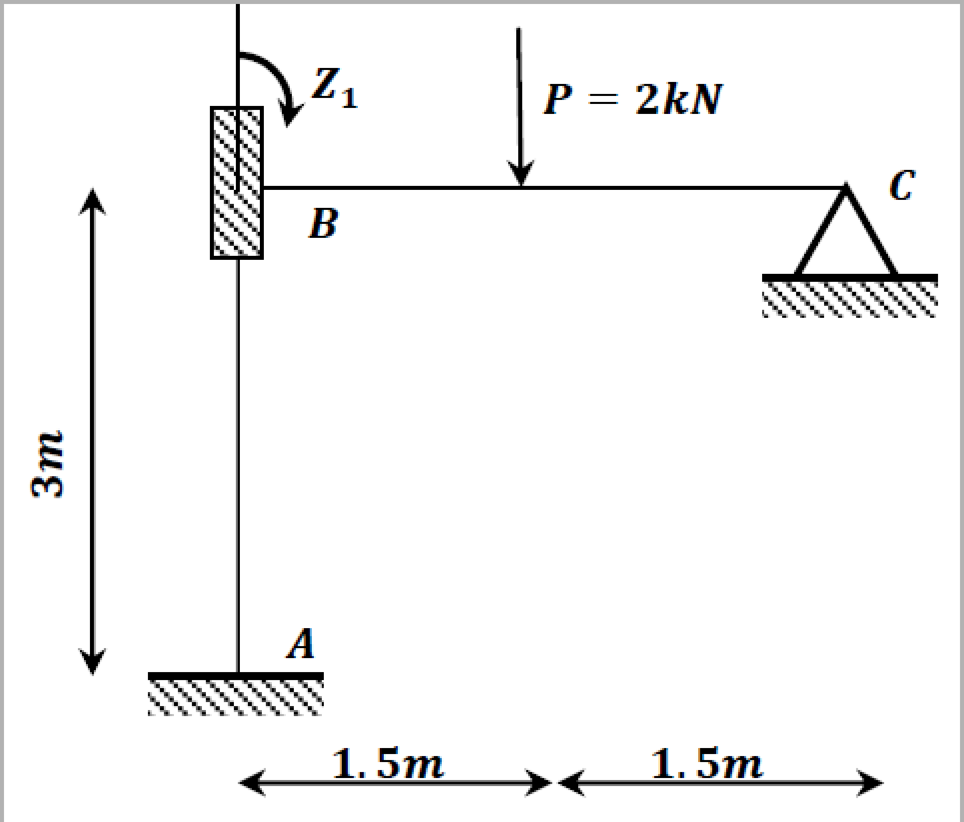

**Le nombre d'inconnus hyperstatique :**

Le nombre de translation $n_t = 2n - (b + l) = 2 * 3 - (2 + 4) = 0$

$\Rightarrow$ Pas de translation (structure à nœuds fixes (non déplaçable)).

Le nombre de rotation $n_r = 1$ on bloque le nœud intermédiaire (le nœud B)

**Système de base :**

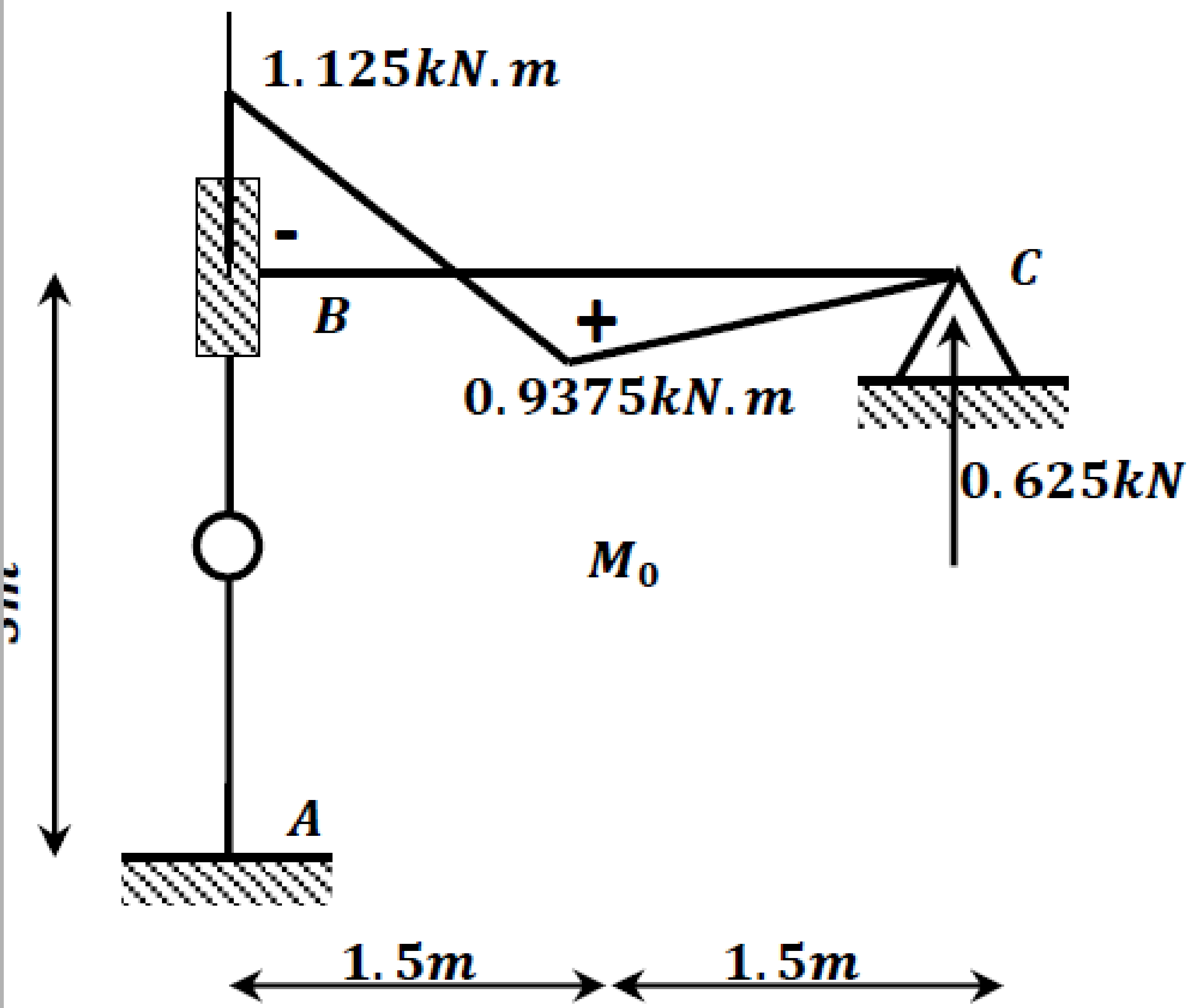



**Système d'équations canonique :**

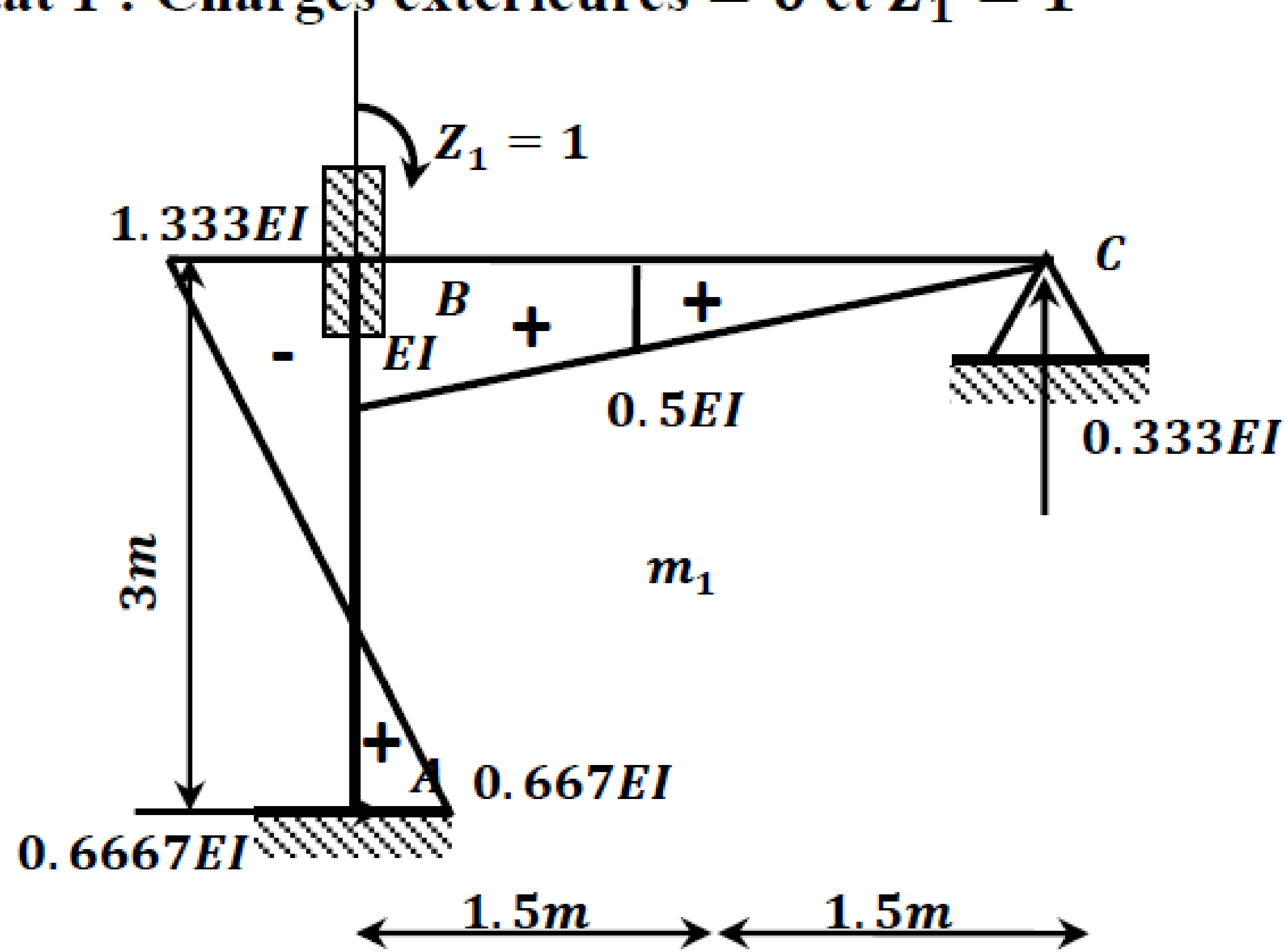
$$r_{11}Z_1 + R_{10} = 0$$

On Trace le diagramme unitaire ($m_1$) et celui des charges extérieures ( $M_0$)

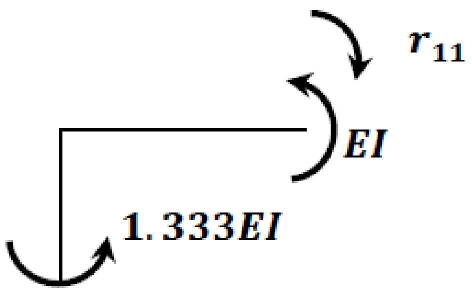
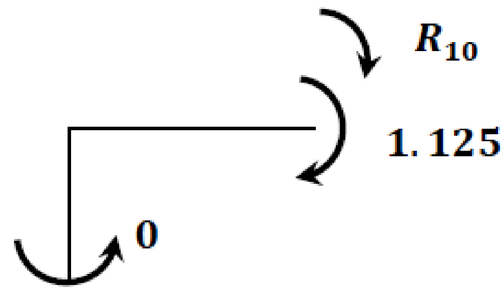
Etat 0 : Charges extérieures $\neq 0$ et $Z_1 = 0$



Etat 1 : Charges extérieures = 0 et $Z_1 = 1$

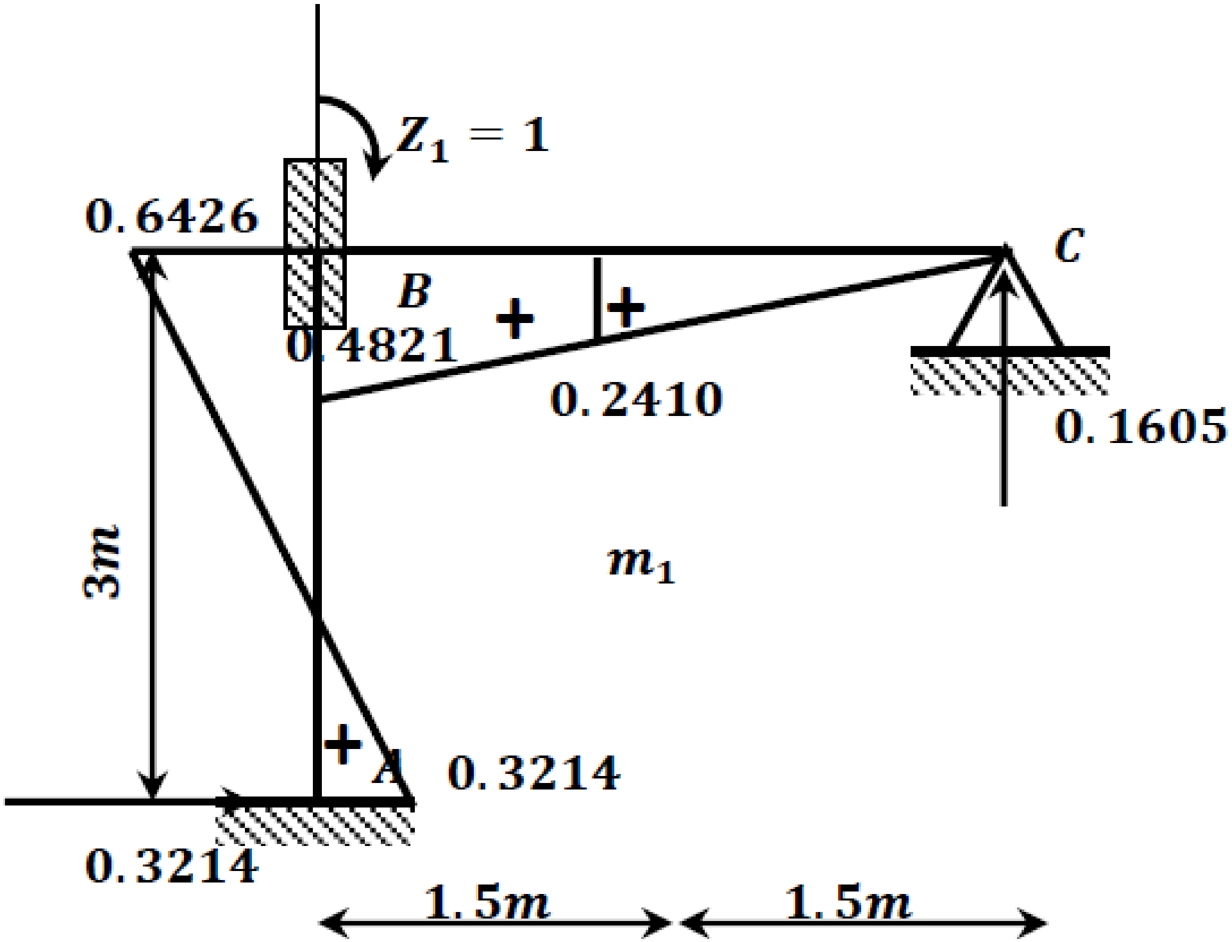


# Calculer les déplacements $r_{ij}$.

<table>
<tr><th>$\boldsymbol{r_{11}}$</th><th>$\boldsymbol{R_{10}}$</th></tr>
<tr><td>Le coefficient $r_{11}$ est calculé de façon à réaliser l’équilibre au nœud B du digramme $m_1$.<br>On indique $r_{11}$ dans le sens de la rotation $Z_1$appliquée à l’encastrement élastique ajouté (voir figure $m_1$)<br><br><br>$\boldsymbol{r_{11} = EI + 1.333EI = 2.333EI}$</td><td>Le coefficient $R_{10}$ est calculé de façon à réaliser l’équilibre au nœud B du digramme $M_0$.<br><br><br>$\boldsymbol{R_{10} = -1.125}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$r_{11}Z_1 + R_{10} = 0 \Rightarrow 2.333EIZ_1 - 1.125 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{Z_1 = \frac{0.4821}{EI}}$</td></tr>
</table>

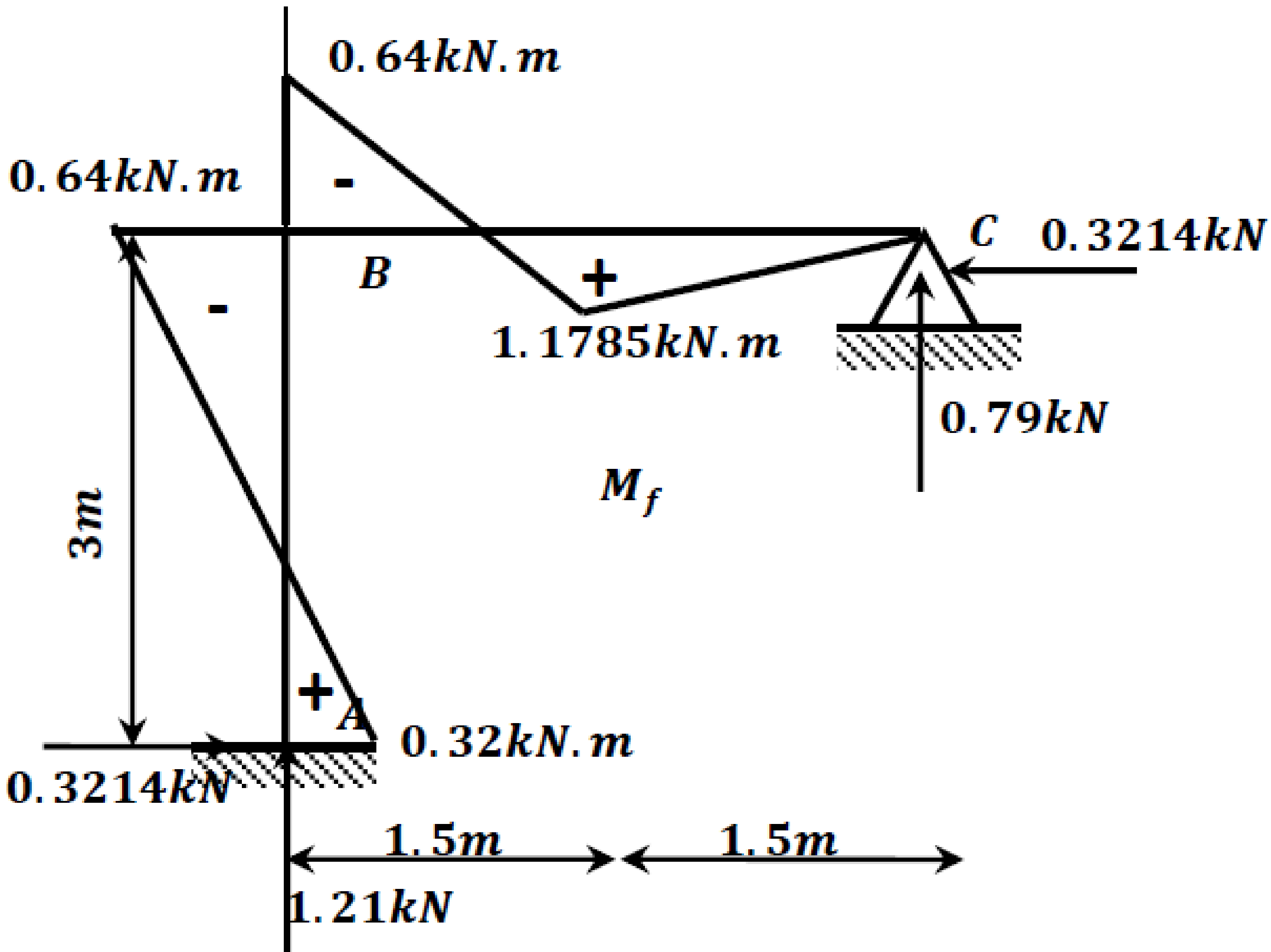
# Correction du diagramme unitaire

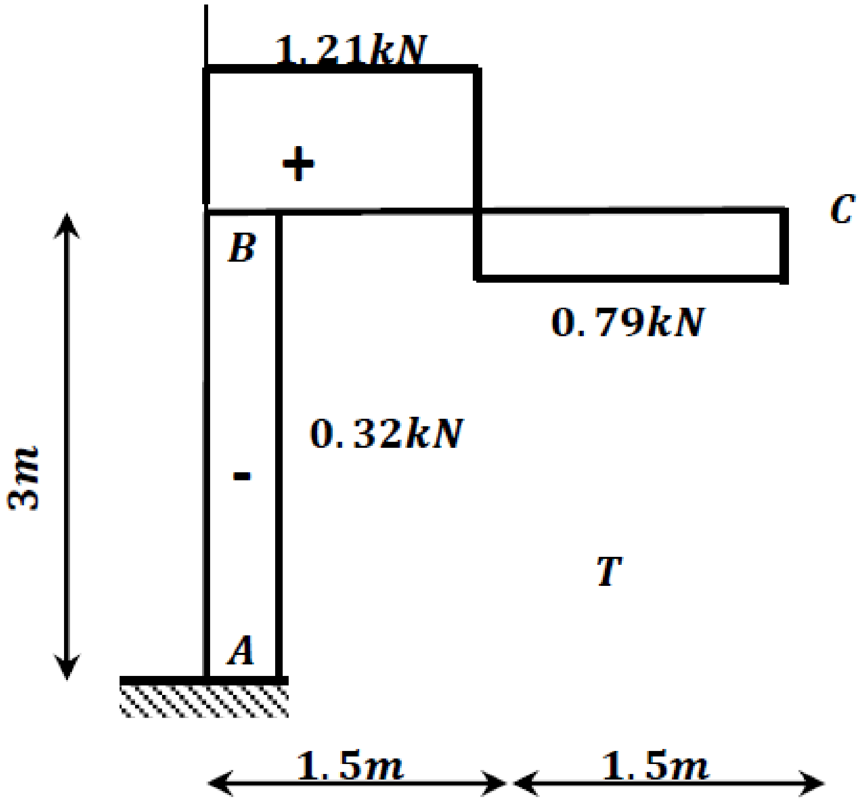
- **Le diagramme corrigé** $m_1 *= m_1 Z_1$



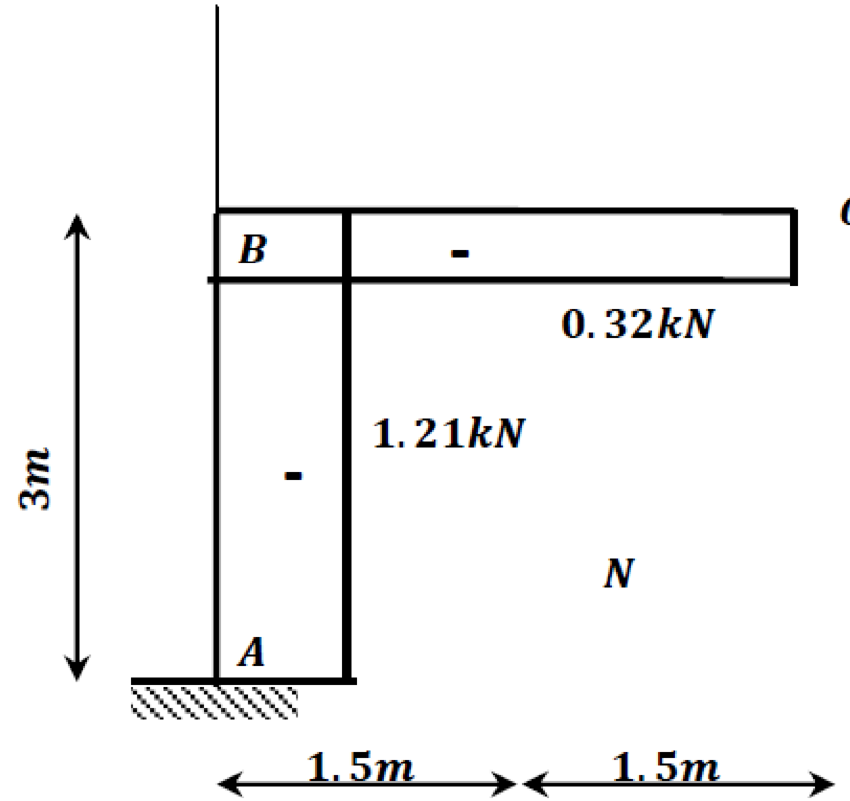
- Les diagrammes finaux :

$$M_f = M_0 + m_1^*$$





1.21kN
+
C
B
0.79kN
0.32kN
-
3m
T
A
1.5m
1.5m

C
B
-
0.32kN
1.21kN
-
3m
N
A
1.5m
1.5m