Centre universitaire Abdalhafid Boussouf Mila
Institut des Sciences et Technologie
Module : Équations différentielles
$3^{\text{ème}}$ année Maths, 2020-2021

Série 2+ Série 3

Exercice 1

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E) : ty^{''} - (t+1)y^{'} + y = t^2,$$

a) Déterminer une solution de l'équation homogène (E_0) de la forme $y(t) = \exp(\alpha t)$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
b) Trouver les solutions de l'équation (E_0).
c) Trouver les solutions de l'équation (E).
d) Déterminer la seule solution de (E) qui vérifiée $y(1) = 0$ et $y'(1) = 2$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle suivante

$$(E_1) : y^{''} - 4y^{'} + 4y = d(x),$$

ou d est une fonction de t.
1) Résoudre (E_1) sans second membre.
2) Trouver la solution particulière de (E_1) quand $d(t) = \exp(-2t)$ puis quand $d(t) = \exp(2t)$.
3) Donner la solution générale de (E_1) quand $d(t) = \dfrac{\exp(2t) + \exp(-2t)}{4}$.

Exercice 3

On considère le système suivant

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{1}{2}(y_1 + e^t y_2), \\ y_2' = \dfrac{1}{2}(e^{-t} y_1 - y_2). \end{cases}$$

(a) Ecrire ce système sous la forme (H).
(b) On pose $Y_1(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 1 \end{pmatrix}$ et $Y_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -e^{-t} \end{pmatrix}$. Montrer que $\{Y_1, Y_2\}$ est un système fondamental de (H).
(c) Déterminer la solution générale de (H).
(d) Donner une matrice fondamentale M de (H)
(e) Trouver la matrice résolvante $R(t, t_0)$ de (H)
(g) Utiliser autre méthode pour trouver la solution générale de (H).

Exercice 4

1) En utilisant la méthode de l'exponentielle de matrice sur le système homogène, résoudre le système $Y' = A_1 Y + B_1(t)$ avec

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad et \quad B_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2) En utilisant la méthode spectrale sur le système homogène, résoudre le système $Y' = A_2 Y + B_2(t)$ avec

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad et \quad B_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5$^{(*)}$

Résoudre les systèmes suivants

$$1) \begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y \\ Y(0) = Y_0 \end{cases} \quad , \quad 2) \begin{cases} Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ Y(t_0) = Y_0 \end{cases} \quad .$$

R de la matière : S. Bourourou