les valeurs propres de la matrice A sont de parties réelles strictement négatives, alors le système (1.1) est contrôlabe à zéro en un temps fini t_1 qui peut être assez grand.

Notons ici que si toutes les valeurs propres de la matrice A sont de parties réelles strictement négatives alors la matrice A est dite stable. Cette condition peut être un peu “relaxée” dans le cas particulier où Ω est compact.

Théorème 1.4. ([2], Théorème 6.2.5) Soit le système linéaire (1.1). Supposons que le contrôle $u(t) \in \Omega$ avec Ω un sous espace non vide et compact de $\mathbb{R}^m$ contenant 0 dans son intérieur. Si la condition de Kalman est vérifiée et si de plus toutes les valeurs propres de la matrice A sont de parties réelles négatives ou nulles, alors le système (1.1) est contrôlabe à zéro en un temps fini t_1 qui peut être assez grand.

1.2 Observabilité des systèmes linéaires autonomes

Dans cette section on discute la notion duale de la contrôlabilité, qui est appelée l'observabilité. Pour cela, on a besoin de compléter le système (1.1) par une équation de sortie, d'où

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad \forall t \in [0,T], \qquad x(0) = x_0, \\ z(t) = Cx(t), \end{cases} \tag{1.3}$$

avec $z(t) \in \mathbb{R}^p$ est la sortie et $C: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ est une matrice linéaire bornée.

La solution du système (1.3) est donnée par :

$$z(t) = z(t, x_0, u) = Ce^{tA}x_0 + C\int_0^t e^{(t-\nu)A}Bu(\nu)d\nu, \quad t \in [0,T].$$

La notion d'observabilité montre le fait qu'on puisse déterminer la condition initiale $x_0 \in \mathbb{R}^n$ grâce à une observation de la sortie $z(t) \in \mathbb{R}^p$.

Définition 1.7. ([2], Définition 6.3.2) Le système (1.3) est dit *observable* à l'instant $t_1 \in (0,T]$ si l'état initial $x(0) = x_0$ peut être déterminé à partir de la

©MOKKEDEM F.Z.

sortie $z(\cdot)$ dans l'intervalle $[0, t_1]$ (un intervalle qu'on puisse supposer arbitrairement petit).

Le système (1.3) est dit *observable (en temps quelconque)* s'il est observable à tout instant t_1.

En tenant compte de la forme de la sortie $z(t)$, on voit que l'observation de $z(\cdot)$ nécessite la connaîssance de l'entrée $u(t)$. Suite à la linéarité du système (1.3), on peut supposer (sans perte de généralité) que $u(t) = 0$, voir [1]. Puis on définit la map d'observabilité par la solution du système (1.3) associée à $u(t) = 0$.

Définition 1.8. ([1], Définition I.I.2.2) *La map d'observabilité* du système (1.3) définie sur $[0, T]$ est la fonctionnelle linéaire bornée $\mathcal{O} : \mathbb{R}^n \to L^2(0, T; \mathbb{R}^p)$ définie pour tout $t \in [0, T]$ par :

$$\mathcal{O}(t)x_0 = z(t, x_0, 0) = Ce^{tA}x_0.$$

En multipliant cette map d'observabilité par sa transposée $\mathcal{O}^T : L^2(0, T; \mathbb{R}^p) \to \mathbb{R}^n$, on obtient ce qu'on appelle la gramienne d'observabilité.

Définition 1.9. ([6], Définition 4.1.12) *La gramienne d'observabilité* du système (1.3) définie sur $[0, T]$ est la fonctionnelle linéaire bornée $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ définie pour tout $t \in [0, T]$ par :

$$\mathcal{W}(t) = \mathcal{O}^T\mathcal{O}(t) = \int_0^t e^{\nu A^T} C^T C e^{\nu A} d\nu,$$

où A^T est la matrice transposée de A et C^T est la matrice transposée de C.

En utilisant ces deux opérateurs, on peut montrer que la notion d'observabilité est équivalente aux propriétés suivantes :

Théorème 1.5. ([1], Définition I.I.2.2) Le système (1.1) est observable en temps fini $t_1 \in (0, T]$ si et seulement si une des conditions suivantes est vérifiée :

– La map d'observabilité $\mathcal{O}(t_1)$ est injective, ce qui revient à dire :

$$Ker\ \mathcal{O}(t_1) = \{0\}.$$

©MOKKEDEM F.Z.

– La gramienne d'observabilité $\mathcal{W}(t_1)$ est définie positive, c'est à dire :

$$\mathcal{W}(t_1) > 0.$$

– La condition suivante est vérifiée :

$$Ce^{\nu A}x = 0 \quad \forall \nu \in [0,T] \Longrightarrow x = 0.$$

Comme dans la contrôlabilité, une étude analogue à la précédente reste vraie si le système linéaire (1.3) est non autonome (voir [8]) ou s'il est défini sur des espaces de dimension infinie (voir [6], Chapitre 4). De plus, une condition analogue à celle de Kalman peut être donnée pour vérifier l'observabilité du système linéaire (1.3).

Définition 1.10. [2] *La matrice d'observabilité* du système (1.3) est la matrice $pn \times n$ définie par :

$$O(A,C) \quad = \quad \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Théorème 1.6. ([2], Théorème 6.3.3) Le système linéaire (1.3) est observable en temps $t_1 \in (0,T]$ si et seulement si la matrice $O(A,C)$ est de rang maximal, c'est à dire :

$$rang\; O(A,C) = n.$$

On peut même utiliser les matrices transposées de A et de C au lieu de A et C elles mêmes. Précisément :

Théorème 1.7. ([1], Théorème I.I.2.3) Le système linéaire (1.3) est observable en temps $t_1 \in (0,T]$ si et seulement si

$$rang\left[C^T, A^TC^T, \cdots, (A^{n-1})^TC^T\right] = n.$$

©MOKKEDEM F.Z.

Encore une fois on voit que l'observabilité des systèmes linéaires autonomes ne dépend ni du temps final t_1 ni de condition initiale x_0.

Finalement, on termine cette section par un résultat montrant la dualité entre la contrôlabilité d'un système linéaire et l'observabilité de son système dual. On appelle *système dual* du système (1.3) le système donné par les matrices transposées de A, de B et de C par (voir [8]) :

$$\begin{cases} \dot{\xi}(t) = A^T\xi(t) + C^T v(t), \quad \forall t \in [0,T], \quad \xi(T) = \xi_T, \\ \eta(t) = B^T\xi(t), \end{cases} \tag{1.4}$$

où $\xi \in \mathbb{R}^n$ est l'état du système dual, $v \in L^2(0,T;\mathbb{R}^m)$ est le contrôle et $\eta \in \mathbb{R}^p$ est la sortie. Remarquons que le système dual est donné par une condition finale. La condition initiale peut être observée comme suit :

Théorème 1.8. [6] Le système linéaire (1.4) est observable en temps $t_1 \in (0,T]$ si et seulement si il existe une constante $a > 0$ telle que

$$a \parallel \xi(0) \parallel^2 \leq \int_0^{t_1} \parallel B^T\xi(t) \parallel^2 dt, \quad \forall \xi_T \in \mathbb{R}^n.$$

Cette condition est équivalente à dire que

$$\text{si} \quad B^T\xi(t) = 0 \quad \text{pour tout} \quad t \in [0,t_1] \quad \text{alors} \quad \xi = 0.$$

Cette dernière propriété est équivalente à la contrôlabilité du système (1.1) (voir Théorème 1.1). Ce dernier résultat montre la dualité entre la contrôlabilité d'un système linéaire et l'observabilité de son système adjoint :

Théorème 1.9. (([1], Section I.I.2.3) ou bien ([6], Lemme 4.1.13))

- Le système (1.3) est observable sur $[0,t_1]$ si et seulement si son système adjoint (1.4) est contrôlable sur $[0,t_1]$.
- Le système (1.4) est observable sur $[0,t_1]$ si et seulement si son système adjoint (1.3) est contrôlable sur $[0,t_1]$.

©MOKKEDEM F.Z.

1.3 Stabilisation des systèmes linéaires autonomes

La contrôlabilité est une notion très forte dans la théorie du contrôle. Des fois des notions moins fortes sont suffisantes en applications, comme par exemple la stabilité. Soit le système non contrôlé (qui peut être linéaire ou non linéaire) suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x(t)), & \forall t \geq 0, \\ x(0) = x_0. \end{cases} \tag{1.5}$$

On appelle *un point d'équilibre* du système (1.5) (s'il existe) tout point $x^* \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$f(t, x^*) = 0 \qquad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Le système (1.5) est dit stable si un petit décalage loin du point d'équilibre à l'instant $s > 0$ conduit à une convergence de la solution vers le point d'équilibre à tout moment $t \geq s$.

Définition 1.11. ([2], Définition 4.2.3)

– Le système (1.5) est dit *stable* au sens de Lyapounov si pour tout $s > 0$ et tout $\epsilon > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\| x(s) - x^* \| \leq \alpha \Longrightarrow \| x(t) - x^* \| \leq \epsilon \quad \text{pour tout} \quad t \geq s$$

où x^* est un point d'équilibre du système (1.5).

Le système (1.5) est dit *asymptotiquement stable* au sens de Lyapounov s'il est stable au sens de Lyapounov et pour tout $s > 0$, il existe un $\beta > 0$ tel que

$$\| x(s) - x^* \| \leq \beta \Longrightarrow \lim_{t \to +\infty} \| x(t) - x^* \| = 0,$$

où x^* est un point d'équilibre du système (1.5).

Revenons maintenant au cas linéaire autonome dont $f(t, x(t)) = Ax(t)$ avec $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une matrice constante bornée. Remarquons que dans ce cas $x^* = 0$ est un point d'équilibre.

©MOKKEDEM F.Z.

Théorème 1.10. ([2], Théorème 6.3.1) Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

- Le système linéaire
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t), & \forall t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \tag{1.6}$$
est asymptotiquement stable au sens de Lyapounov.
- La matrice A est stable, c'est à dire les parties réelles de toutes les valeurs propres de A sont strictement négatives.

Cependant la matrice A n'est pas toujours stable. Donc on espère la modifier en ajoutant un terme BF tel que la nouvelle matrice perturbée $A + BF$ soit stable. Ceci s'appelle la stabilisation du système (1.6).

Définition 1.12. ([2], Définition 6.3.1) Le système (1.6) est dit *stabilisable* par feedback s'il existe une matrice feedback F donnant un contrôle feedback $u = Fx$ qu'en l'ajoutant au système (1.6) on obtient

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = (A + BF)x(t), & \forall t \geq 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

avec $A + BF$ une matrice stable.

Rappelons que dans les théorèmes 1.3 et 1.4 il fallait ajouter d'autres conditions à celle de la stabilité de la matrice A pour avoir la contrôlabilité du système (1.1). Le résultat suivant montre que la contrôlabilité du système (1.1) garantit sa stabilisation. Donc la contrôlabilité des systèmes linéaires autonomes implique leurs stabilisation mais la réciproque est fausse.

Théorème 1.11. ([1], Corollaire I.I.2.1) Si le système (1.1) est contrôlable, alors il est stabilisable.

©MOKKEDEM F.Z.