

## Chapitre 5

### Modélisation dynamique des machines asynchrones

#### I. Introduction

La machine asynchrone, occupe une large plage d'application au détriment des machines synchrones et à courant continu. Elle présente un système dynamique non linéaire. Par conséquent, sa commande nécessite la disponibilité d'un modèle représentant fidèlement son comportement au niveau de ses modes électriques, électromagnétiques et mécanique.

Ce chapitre présentera la modélisation linéarisée de la machine asynchrone en la mettant sous forme d'état afin de valider cette modélisation par une simulation implantée sous le logiciel MATLAB.

#### II.1. Description

La machine asynchrone se compose :

D'un primaire, généralement le stator fixe, portant un bobinage le plus souvent triphasé, logé dans des encoches régulièrement réparties sur la face interne du stator et relié à la source d'alimentation.

D'un secondaire, généralement le rotor mobile autour de l'axe de symétrie de la machine, qui peut être soit bobiné et fermé sur lui-même, soit à cage d'écureuil.

#### II.2. Hypothèses de travail

Afin de faciliter l'étude de la machine asynchrone et la mise en équation, les hypothèses généralement admises sont:

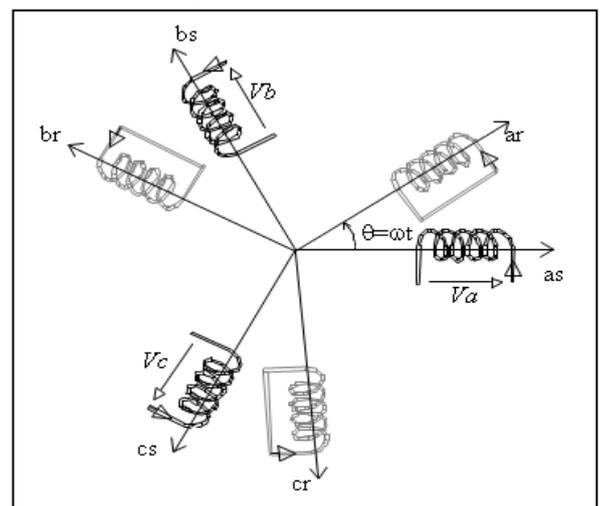
- Le bobinage est réparti de manière à donner une f.m.m. sinusoïdale s'il est alimenté par des courants sinusoïdaux.
- Régime non saturé, le phénomène d'hystérésis et les courants de Foucault en plus l'effet de peau sont négligés.
- Le régime homopolaire est nul.

Dans ces conditions, si on considère que le moteur à induction est triphasé au stator et au rotor figure (I.1).

Les trois types d'équations traduisant le comportement du moteur sont :

- Les équations électriques.
- Les équations magnétiques.
- L'équation mécanique.

**Figure (I.1) :** Model triphasé de la machine asynchrone.



### II.3. Equations électriques

Les enroulements des trois phases statoriques sont décalés dans l'espace d'un angle de  $2\pi/3$  et également ceux du rotor et peuvent être représentés comme indiquée en figure (I.1). Les phases rotoriques sont court circuitées sur elle mêmes.  $\theta$  est l'angle électrique entre l'axe de la phase (as) statorique et la phase (ar) rotorique. En appliquant la loi d'Ohm généralisée à chaque phase du stator (respectivement rotor), on aura les équations de tension suivantes.

$$\begin{cases} [V_s] = [R_s][I_s] + \frac{d}{dt}[\Phi_s] \\ [V_r] = [R_r][I_r] + \frac{d}{dt}[\Phi_r] \end{cases} \quad (I-1)$$

où :  $[X_{s,r}] = [X_a \ X_b \ X_c]^T$  : Vecteur d'élément tension ou courant ou flux statorique (respectivement rotorique).

$$\text{avec : } [R_s] = \begin{bmatrix} R_s & 0 & 0 \\ 0 & R_s & 0 \\ 0 & 0 & R_s \end{bmatrix} \quad [R_r] = \begin{bmatrix} R_r & 0 & 0 \\ 0 & R_r & 0 \\ 0 & 0 & R_r \end{bmatrix}$$

$[R_s]$  : matrice des résistances statorique.

$R_s$  : résistance d'une phase du stator.

$[R_r]$  : matrice des résistances rotorique.

$R_r$  : résistance d'une phase du rotor.

### II.4. Equations magnétiques

Les hypothèses, présentées précédemment, conduisent à une matrice des inductances qui établit les relations linéaires entre les flux totalisés et les courants :

$$\begin{cases} [\Phi_s] = [L_{ss}][I_s] + [M_{sr}][I_r] \\ [\Phi_r] = [M_{rs}][I_s] + [L_{rr}][I_r] \end{cases} \quad (I-2)$$

$$\text{tel que : } [M_{rs}] = [M_{sr}]^T \quad \text{et : } [L_{ss}] = \begin{bmatrix} l_s & m_s & m_s \\ m_s & l_s & m_s \\ m_s & m_s & l_s \end{bmatrix}, \quad [L_{rr}] = \begin{bmatrix} l_r & m_r & m_r \\ m_r & l_r & m_r \\ m_r & m_r & l_r \end{bmatrix}$$

$$[M_{sr}] = [M_{rs}] = M_0 \begin{bmatrix} \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta & \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) \\ \cos(\theta + \frac{2\pi}{3}) & \cos(\theta - \frac{2\pi}{3}) & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$[M_0]$  : représente la valeur maximale des inductances mutuelles entre phases statoriques et rotoriques.

$\theta$  : l'angle de rotation du rotor par rapport au stator.

$[L_{ss}]$  : matrice d'inductances statorique.

$[L_{rr}]$  : matrice d'inductances rotorique.       $[M_{sr}]$  : matrice des inductances mutuelle stator-rotor.

$L_s = l_s - m_s$  : inductance propre cyclique du stator.  $L_r = l_r - m_r$  : inductance propre cyclique du rotor.

$M = \frac{3}{2}M_0$  : la mutuelle inductance cyclique stator-rotor.

## II.5. Equation mécanique

Pour étudier les caractéristiques dynamiques, on introduit l'équation du mouvement suivante:

$$\mathbf{J} \frac{d\Omega}{dt} = C_e - C_r - f_v \Omega \quad (\text{I-3})$$

$J$  : moment d'inertie de la partie tournante.       $\Omega$  : vitesse mécanique du moteur

$f_v$  : coefficient de frottement visqueux.       $C_e$  : couple électromagnétique.

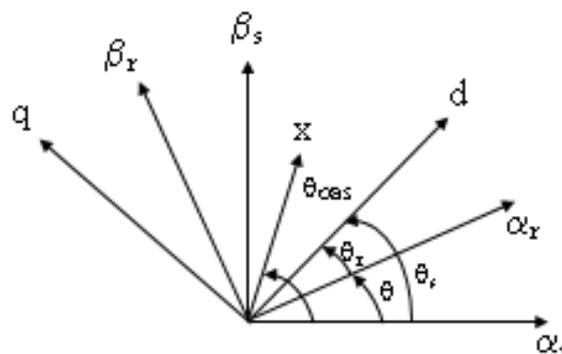
$C_r$  : couple de charge.

Le stator et le rotor de la machine asynchrone présentent une isotropie électrique et magnétique, ce qui implique que seule la matrice inductance mutuelle  $[M_{sr}]$  est fonction de la position  $\theta$ . Les coefficients des équations (I.1) et (I.2) sont donc variables, la résolution analytique du système devient pratiquement difficile d'où l'adaptation d'un changement de base sur les grandeurs physiques (tension, courant et flux) indépendant de la position  $\theta$ , ce passage est appelé transformation de Park.

### III.1. Transformation de Park

Elle permet de transformer les enroulements statoriques et rotoriques disposés sur trois axes (a, b, c) en des enroulements équivalent du point de vue électriques et magnétiques disposés sur deux axes (d,q) ou ( $\alpha\beta$ ).

Elle est constituée d'une transformation triphasé-diphasé suivie d'une rotation. Elle permet de passer du repère (abc) vers le repère ( $\alpha\beta$ ) puis vers le repère (dq). Le repère ( $\alpha\beta$ ) est toujours fixe par rapport au repère (abc), par contre le repère (dq) est mobile. Il forme avec le repère fixe ( $\alpha\beta$ ) l'angle, dit angle de transformation de PARK.



**Figure (I.2) : Transformation de PARK**

$\theta$  : l'angle de rotation du rotor par rapport au stator.

$\theta_s$  : angle de rotation de (dq) par rapport au stator.

$\theta_r$  : angle de rotation de (dq) par rapport au rotor.

Les angles sont liés par la relation :  $\theta_s = \theta + \theta_r$

La transformation triphasé-diphasé est donnée par :

$$\begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix} = C_{32} \begin{bmatrix} x_a \\ x_b \\ x_c \end{bmatrix}, \quad C_{32} = k \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$k = \sqrt{\frac{2}{3}}$  ; utilisé pour les transformations conservant la puissance (Concordia).

$k = \frac{2}{3}$  ; utilisé pour les transformations conservant l'amplitude (Clark).

Afin de mieux visualiser l'échange d'énergie entre armatures, il est plus commode de ramener leurs équations à un référentiel commun d'observation [6]. D'où l'utilisation de la matrice de rotation  $\mathbf{P}(\theta_{\text{OBS}})$ .

$$\begin{bmatrix} x_d \\ x_q \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\theta_{\text{OBS}}) \begin{bmatrix} x_\alpha \\ x_\beta \end{bmatrix}; \quad \text{avec : } \mathbf{P}(\theta_{\text{OBS}}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{\text{OBS}} & \sin \theta_{\text{OBS}} \\ -\sin \theta_{\text{OBS}} & \cos \theta_{\text{OBS}} \end{bmatrix};$$

Pour le stator :  $\theta_{\text{OBS}} = \theta_s$  et pour le rotor :  $\theta_{\text{OBS}} = \theta$ .

**III.2.Choix du référentiel**

Le choix du référentiel se fait selon la commodité de l'application [6], il existe principalement trois cas :

- ❖ référentiel commun lié au stator,  $(T_{\text{OBS}}) \equiv (\text{S})$ ,  $\omega_{\text{OBS}} = 0$ .
- ❖ référentiel commun lié au rotor,  $(T_{\text{OBS}}) \equiv (\text{R})$ ,  $\omega_{\text{OBS}} = \omega_r = p \cdot \Omega$
- ❖ référentiel commun lié au synchronisme statorique (champ tournant),  $(T_{\text{OBS}}) \equiv (\text{C})$ ,  $\omega_{\text{OBS}} = \omega_s$  ;  
 $\omega = \omega_s - \omega_r$

**IV.1 Modèle vectoriel de la machine asynchrone**

L'interaction des champs magnétiques pulsatoires génèrent un champ magnétique tournant.

Tout vecteur peut être représenté par un vecteur tournant de la forme :

$$x = k(x_a + x_b e^{j\frac{2\pi}{3}} + x_c e^{-j\frac{2\pi}{3}}) \quad (\text{I.4})$$

Compte tenu des relations entre différentes grandeurs, il est possible d'étendre la notion de vecteur tournant à tout ensemble de grandeurs triphasés  $[I_s]$ ,  $[V_s]$ ,  $[\Phi_s]$ ,  $[\Phi_r]$ .

#### IV.2 Relation de passage entre référentiels

Sachant que la norme de  $\bar{x}$  définie par  $x$  est invariante quelques soient les repères en rotations :

- ❖ Dans le stator (S):  $\bar{x}^{-(S)} = x.e^{j\theta_s}$
- ❖ Dans le rotor (R):  $\bar{x}^{-(R)} = x.e^{j\theta_r}$
- ❖ Dans le référentiel tournant (C):  $\bar{x}^{-(T)} = x.e^{j\theta_{OBS}}$

Passage stator –rotor et réciproquement :

$$\bar{x}^{-(S)} = \bar{x}^{-(R)}e^{j\theta} \quad \text{ou} \quad \bar{x}^{-(R)} = \bar{x}^{-(S)}e^{-j\theta}$$

Passage stator – $T_{OBS}$  et réciproquement :

$$\bar{x}^{-(S)} = \bar{x}^{-(T)}e^{j\theta_{OBS}} \quad \text{ou} \quad \bar{x}^{-(T)} = \bar{x}^{-(S)}e^{-j\theta_{OBS}}$$

Passage rotor –  $T_{OBS}$  et réciproquement :

$$\bar{x}^{-(R)} = \bar{x}^{-(T)}e^{j(\theta_{OBS}-\theta)} \quad \text{ou} \quad \bar{x}^{-(T)} = \bar{x}^{-(R)}e^{-j(\theta_{OBS}-\theta)}$$

#### IV.3 Model tension et flux

Par application de la notion du vecteur tournant au système d'équation (I.1) et (I.2) on aura le système en terme vectoriel (complexe) comme suit :

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{-(S)} = R_s \bar{i}_s^{-(S)} + \frac{d\bar{\Phi}_s^{-(S)}}{dt} \\ \bar{v}_r^{-(R)} = R_r \bar{i}_r^{-(R)} + \frac{d\bar{\Phi}_r^{-(R)}}{dt} \end{cases} \quad (I.5)$$

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_s^{-(S)} = L_s \bar{i}_s^{-(S)} + M \bar{i}_r^{-(S)} \\ \bar{\Phi}_r^{-(R)} = L_r \bar{i}_r^{-(R)} + M \bar{i}_s^{-(R)} \end{cases} \quad (I.6)$$

L'exposant  $^{(s)}$  (resp  $^{(r)}$ ) dans les systèmes d'équation (I.5) et (I.6) signifie que les variables sont prises dans le référentiel stationnaire, tandis que l'indice  $_{(s)}$  (resp  $_{(r)}$ ), signifie qu'il s'agit des variables du stator (resp. du rotor).  $\bar{V}, \bar{I}, \bar{\Phi}$  : Sont respectivement les vecteurs de tension, de courant et de flux.

On utilisant les relations de passage, on ramène toutes les grandeurs au référentiel commun ( $T_{OBS}$ ).

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{-(T)}e^{j\theta_{OBS}} = R_s \bar{i}_s^{-(T)}e^{j\theta_{OBS}} + \frac{d(\bar{\Phi}_s^{-(T)}e^{j\theta_{OBS}})}{dt} \\ \bar{v}_r^{-(T)}e^{j(\theta_{OBS}-\theta)} = R_r \bar{i}_r^{-(T)}e^{j(\theta_{OBS}-\theta)} + \frac{d(\bar{\Phi}_r^{-(T)}e^{j(\theta_{OBS}-\theta)})}{dt} \end{cases} \quad (I.7)$$

Après simplification on aura le système d'équation vectorielle de tension qui représente le modèle de la machine dans le référentiel du champ tournant.

$$\begin{cases} \bar{v}_s^{(T)} = R_s \bar{i}_s^{(T)} + \frac{d\bar{\Phi}_s^{(T)}}{dt} + j\omega_{OBS} \bar{\Phi}_s^{(T)} \\ \bar{v}_r^{(T)} = R_r \bar{i}_r^{(T)} + \frac{d\bar{\Phi}_r^{(T)}}{dt} + j(\omega_{OBS} - \omega_r) \bar{\Phi}_r^{(T)} \end{cases} \quad (I.8)$$

Et également la représentation du modèle flux :

$$\begin{cases} \bar{\Phi}_s^{(S)} = L_s \bar{i}_s^{(S)} + M \bar{i}_r^{(S)} \\ \bar{\Phi}_r^{(R)} = L_r \bar{i}_r^{(R)} + M \bar{i}_s^{(R)} \end{cases} \quad (I.9)$$

Le couple électromagnétique :

$$C_e = p \operatorname{Im}[\bar{i}_s \bar{\Phi}_s^*] \quad (I.10)$$

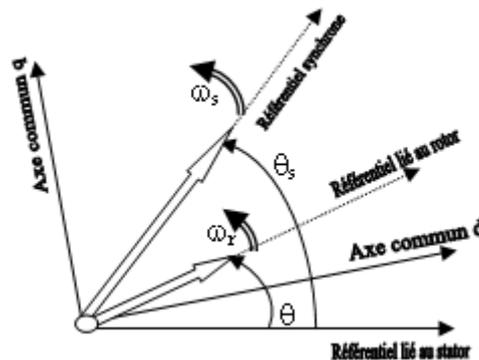


Figure (I.3) : Choix du référentiel dans un système d'axes commun

## V. Model d'état de la machine asynchrone

Ainsi, pour le cas du référentiel synchronisme, qui semble le plus utilisé nous avons le modèle qui suit, après séparation des parties réelles et imaginaires, avec  $\omega_{obs} = \omega_s$  :

Equations de tension :

$$\begin{cases} V_{ds} = R_s I_{ds} + \frac{d\Phi_{ds}}{dt} - \omega_s \Phi_{qs} \\ V_{qs} = R_s I_{qs} + \frac{d\Phi_{qs}}{dt} + \omega_s \Phi_{ds} \\ V_{dr} = R_r I_{dr} + \frac{d\Phi_{dr}}{dt} - (\omega_s - \omega_r) \Phi_{qr} \\ V_{qr} = R_r I_{qr} + \frac{d\Phi_{qr}}{dt} + (\omega_s - \omega_r) \Phi_{dr} \end{cases} \quad (I.11)$$

Equations de flux :

$$\begin{cases} \Phi_{ds} = L_s I_{ds} + M I_{dr} \\ \Phi_{qs} = L_s I_{qs} + M I_{qr} \\ \Phi_{dr} = L_r I_{dr} + M I_{ds} \\ \Phi_{qr} = L_r I_{qr} + M I_{qs} \end{cases} \quad (I.12)$$

Le couple électromagnétique peut être dérivé de l'expression de la co-énergie ou obtenu à l'aide d'un bilan de puissance. Il en résulte plusieurs expressions toutes égales :

$$C_e = p(\Phi_{ds} I_{qs} - \Phi_{qs} I_{ds}) \quad (I.13)$$

$$C_e = p(\Phi_{qr} I_{dr} - \Phi_{dr} I_{qr}) \quad (I.14)$$

$$C_e = pM(I_{qs} I_{dr} - I_{ds} I_{qr}) \quad (I.15)$$

$$C_e = \frac{pM}{L_r} (\Phi_{dr} I_{qs} - \Phi_{qr} I_{ds}) \quad (I.16)$$

### V.1 Model d'état

Choisissons de fixer le repère (dq) au champ tournant.

L'avantage d'utiliser ce référentiel, est d'avoir des grandeurs constantes en régime permanent. Il est alors aisé d'en faire la régulation.

Le système d'équation différentielle d'ordre 4 et le système d'équation des flux décrivent d'une manière générale le fonctionnement de la machine. Il permet de concevoir une représentation d'état pour le processus de contrôle en choisissant deux variables d'état parmi quatre ( $I_s$ ,  $I_r$ ,  $\Phi_s$ ,  $\Phi_r$ ). les états utilisés sont ceux données au moins par une mesure d'état ( $I_s$ ) tel que ( $I_s$ ,  $I_r$ ), ( $I_s$ ,  $\Phi_s$ ) et ( $I_s$ ,  $\Phi_r$ ).

Le modèle de la machine dans le repère (dq) lié au champ tournant pour un vecteur d'état  $[x] = [I_{ds} \ I_{qs} \ \Phi_{dr} \ \Phi_{qr}]^t$  et de tension de commande  $[V] = [V_{ds} \ V_{qs}]$  est donné sous forme condensé tel que :

$$[\dot{x}] = A.[x] + B.[u]$$

$$\begin{cases} \frac{dI_{ds}}{dt} = -\left(\frac{1}{\sigma T_s} + \frac{1-\sigma}{\sigma T_r}\right)I_{ds} + \omega_s I_{qs} + \frac{1-\sigma}{\sigma M T_r} \Phi_{dr} + \frac{1-\sigma}{M \sigma} p \Omega \Phi_{qr} + \frac{1}{\sigma L_s} V_{ds} \\ \frac{dI_{qs}}{dt} = -\omega_s I_{ds} - \left(\frac{1}{\sigma T_s} + \frac{1-\sigma}{\sigma T_r}\right)I_{qs} - \frac{1-\sigma}{M \sigma} p \Omega \Phi_{dr} + \frac{1-\sigma}{M T_r \sigma} \Phi_{qr} + \frac{1}{\sigma L_s} V_{qs} \\ \frac{d\Phi_{dr}}{dt} = \frac{M}{T_r} I_{ds} - \frac{1}{T_r} \Phi_{dr} + (\omega_s - p \Omega) \Phi_{qr} \\ \frac{d\Phi_{qr}}{dt} = \frac{M}{T_r} I_{qs} - (\omega_s - p \Omega) \Phi_{dr} - \frac{1}{T_r} \Phi_{qr} \end{cases} \quad (I.17)$$

Avec;  $\omega_r = p \Omega$  : pulsation mécanique.  $\sigma = 1 - \frac{M^2}{L_r L_s}$  : coefficient de dispersion de la machine.

$T_s = \frac{L_s}{R_s}$ ,  $T_r = \frac{L_r}{R_r}$  : constante de temps des courants statoriques resp(rotoriques).

L'équation mécanique :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{J} (C_e - f_v \Omega - C_r) \quad (I.18)$$

Modéliser la machine de cette manière permet de réduire le nombre de grandeurs qu'on a besoin de connaître pour pouvoir simuler le fonctionnement de la machine. En effet, seules les valeurs instantanées des tensions statoriques et du couple résistant doivent être déterminées pour les imposer à la machine.

$$A = \begin{bmatrix} -\left(\frac{1}{\sigma T_s} + \frac{1-\sigma}{\sigma T_r}\right) & \omega_s & \frac{1}{MT_r} \frac{1-\sigma}{\sigma} & \frac{1-\sigma}{M\sigma} p\Omega \\ -\omega_s & -\left(\frac{1}{\sigma T_s} + \frac{1-\sigma}{\sigma T_r}\right) & -\frac{1-\sigma}{M\sigma} p\Omega & \frac{1-\sigma}{MT_r \sigma} \\ \frac{M}{T_r} & 0 & -\frac{1}{T_r} & \omega_s - p\Omega \\ 0 & \frac{M}{T_r} & -(\omega_s - p\Omega) & -\frac{1}{T_r} \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma L_s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma L_s} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (I.19)$$

$$\text{et } [U] = [V_{ds} \quad V_{qs}]$$

## V.2 Simulation du modèle présenté

Pour la résolution du système (I.17) et (I.18), on a recours aux méthodes numériques suffisamment appréciable pour les phénomènes évoluant avec des constantes de temps de l'ordre de celles existant dans les systèmes électromagnétiques; telles que les machines électriques.

Pour la simulation du modèle suscitée, nous avons développé un programme sous le logiciel MATLAB, en effet ce n'est qu'une résolution numérique des équations différentielles (I.17) et (I.18) par la méthode de Runge Kutta.

Le moteur asynchrone est alimenté directement à partir du réseaux d'alimentation triphasé équilibré de fréquence  $f_s=50\text{Hz}$ , et tensions simples  $V_a, V_b, V_c$  où :

$$V_a = V_{\max} \sin(\omega_s t)$$

$$V_b = V_{\max} \sin\left(\omega_s t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$V_c = V_{\max} \sin\left(\omega_s t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

$$\text{Avec : } \omega_s = 2\pi f_s ; V_{\max} = 220\sqrt{2} .$$

## VI. Résultats de simulation

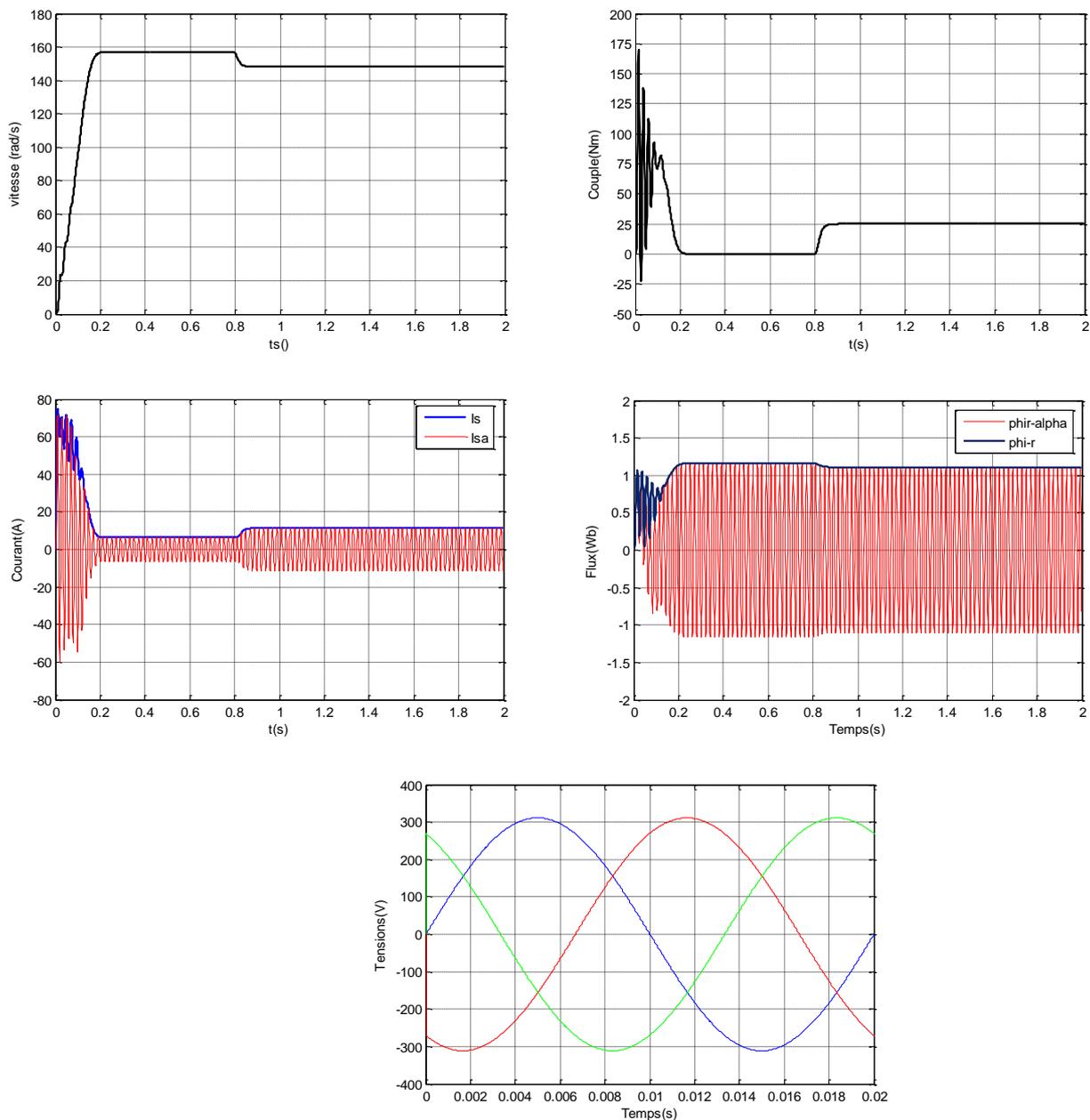
Les courbes de la figure (I.4) représentent les résultats de simulation du démarrage à vide de la MAS suivi de l'application du couple de charge à  $t=0,8s$ . Le modèle est simulé dans le référentiel

(d,q) lié au champ tournant. De ces courbes, on aperçoit que le temps d'établissement est de 0,2s pour toutes les grandeurs.

La vitesse atteint la valeur de synchronisme 157rad/s, machine bipolaire, sans dépassement et se stabilise au régime permanent. Après l'introduction du couple de charge à  $t=0,8s$  la vitesse se dégrade au dessous de sa valeur nominale.

Le couple admet une forte valeur (fort appel de courant au démarrage, bref mais important) avec des oscillations puis se rétablit et atteint la valeur du couple de charge  $C_r=25Nm$ .

Le passage triphasé-biphasé est bien illustré sur la courbe du courant, où le courant  $I_s$  qui, en régime établi est continu, enveloppe le courant de phase  $I_{sa}$ , qui, est lui pulsant avec  $\omega_s$ .



**Figure (I.4)** Résultat de simulation de la MAS, démarrage à vide suivi de l'introduction du couple de charge.

### **Bibliographie**

S. Bazi « Contribution à la commande robuste de la MAS par la technique PSO » Thèse de Magister, Univ. Batna.