Centre Universitaire AbdelhafidBoussouf / Mila
Module : Modélisation et Simulation des Systèmes Electromécaniques
Master 2 / EM Année Universitaire 2021/2022

Série TD N° 01

Exercice N° 01 :

Soient les modèlesd'états suivants :

1/ $\dot{x}_1 = x_1 + u$, $\dot{x}_2 = 2x_1 + 3x_2 + 2u$, $y = 2x_1 - 3x_2$

2/ $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$, $y = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Trouver leurs fonctions de transfert en appliquant la formule : $F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C.(sI - A)^{-1}.B + D$

Exercice N° 02 :

Passage du modèle d'état à l'équation de transfert

$A = \begin{pmatrix} \frac{-f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix}$;$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = 0$.

En appliquant la relation : $(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C.(sI - A)^{-1}.B + D$

Trouver la fonction de transfert de la MCC (**réponse : voir cours**).

Exercice N° 03 :

Soit la fonction du MCC suivante : $u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t)$, $e(t) = k_{e}\omega$,

$Ce = J\frac{d\omega}{dt} + f\omega$, $Cr = 0$, $Ce = k_m.i$,on admet que$k = k_e = k_m$

1/ Donner une représentation d'état en posant $x_1=i$ et $x_2=\omega$, entrée la tension $\boldsymbol{u}$, la sortie la vitesse ω.

2/ Donner une représentation d'état en posant $x_1=\omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$, entrée la tension $\boldsymbol{u}$, la sortie la vitesse ω.

3/ Donner une autre représentation en choisissant : $x_1=\theta$ et $x_2 = \omega = \frac{d\theta}{dt}$, $x_3 = i$

entrée la tension $\boldsymbol{u}$, la sortie la position θ.

4/ Donner une représentation graphique pour chaque solution.

5/Donner l'allure de la vitesse pour les entrées 100, 102 et 104 successivement pour les exemples 1, 2 et 3.

Réponses TD 01

Exercice N° 01 :

Exercice N° 02 :

Exercice N° 03 :

1/ La représentation d'état pour : $x_1=i$ et $x_2=\omega$, entrée la tension $\boldsymbol{u}$, la sortie la vitesse ω.

La fonction du MCC est : $u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t) \Rightarrow u(t) = Rx_1 + L\frac{dx_1}{dt} + kx_2$

$$\Rightarrow \frac{dx_1}{dt} = -\frac{R}{L}x_1 - \frac{k}{L}x_2 + \frac{1}{L}u$$

$e(t) = k\omega = kx_2$,

$Ce = J\dfrac{d\omega}{dt} + f\omega = ki \;\Longrightarrow\; J\dfrac{dx_2}{dt} + fx_2 = kx_1 \Longrightarrow$

$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k}{J}x_1 - \frac{f}{J}x_2$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dx_1}{dt} \\ \dfrac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{R}{L} & -\dfrac{k}{L} \\ \dfrac{k}{J} & -\dfrac{f}{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

2/ La représentation d'état pour : $x_1=\omega$ et $x_2 = \frac{d\omega}{dt}$, entrée la tension $\boldsymbol{u}$, la sortie la vitesse ω.

on a : $x_1 = \omega \Longrightarrow \frac{dx_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} = x_2$

de l'équation du mouvement : $Ce = J\frac{d\omega}{dt} + f\omega = ki \;\Longrightarrow i = \frac{J}{k}\frac{d\omega}{dt} + \frac{f}{k}\omega$ on remplace dans :

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + e(t) = R\left[\frac{J}{k}\frac{d\omega}{dt} + \frac{f}{k}\omega\right] + L\frac{d}{dt}\left[\frac{J}{k}\frac{d\omega}{dt} + \frac{f}{k}\omega\right] + k\omega$$

$\Rightarrow u(t) = R\left[\frac{J}{k}x_2 + \frac{f}{k}x_1\right] + L\frac{d}{dt}\left[\frac{J}{k}x_2 + \frac{f}{k}x_1\right] + kx_1$

$\Rightarrow u(t) = \frac{RJ}{k}x_2 + \frac{Rf}{k}x_1 + \frac{LJ}{k}\frac{dx_2}{dt} + \frac{Lf}{k}\frac{dx_1}{dt} + kx_1$

$\Rightarrow u(t) = \frac{RJ}{k}x_2 + \frac{Rf}{k}x_1 + \frac{LJ}{k}\frac{dx_2}{dt} + \frac{Lf}{k}x_2 + kx_1 = \frac{RJ}{k}x_2 + \frac{Rf}{k}x_1 + \frac{LJ}{k}\frac{dx_2}{dt} + \frac{Lf}{k}x_2 + kx_1$

$\Rightarrow u(t) = \left(\frac{RJ}{k} + \frac{Lf}{k}\right)x_2 + \left(\frac{Rf}{k} + k\right)x_1 + \frac{LJ}{k}\frac{dx_2}{dt}$

$\Rightarrow \frac{LJ}{k}\frac{dx_2}{dt} = u(t) - \left(\frac{RJ}{k} + \frac{Lf}{k}\right)x_2 - \left(\frac{Rf}{k} + k\right)x_1$

$\Rightarrow \frac{dx_2}{dt} = -\left(\frac{Rf}{LJ} + \frac{k^2}{LJ}\right)x_1 - \left(\frac{RJ}{L} + \frac{Lf}{J}\right)x_2 + \frac{k}{LJ}u(t)$

et notre représentation sous forme matricielle est :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\left(\frac{Rf}{LJ} + \frac{k^2}{LJ}\right) & -\left(\frac{R}{L} + \frac{f}{J}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{LJ} \end{bmatrix} u$$

3/ La représentation d'état en choisissant : $x_1 = \theta$ et $x_2 = \omega = \frac{d\theta}{dt}$, $x_3 = i$

entrée la tension $\boldsymbol{u}$, la sortie la position θ.

$\frac{dx_1}{dt} = \frac{d\theta}{dt} = \omega = x_2$ éq. (1)

donc : $\frac{dx_2}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt}$

$Ce = J\frac{d\omega}{dt} + f\omega = ki \Rightarrow i = \frac{J}{k}\frac{d\omega}{dt} + \frac{f}{k}\omega = \frac{J}{k}\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{f}{k}\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow x_3 = \frac{J}{k}\frac{dx_2}{dt} + \frac{f}{k}x_2 \Rightarrow$

$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{f}{J}x_2 + \frac{k}{J}x_3$ éq.(2)

et de l'équation générale :

$u = Ri + L\frac{di}{dt} + k\omega = Rx_3 + L\frac{dx_3}{dt} + kx_2 \Rightarrow$

$\frac{dx_3}{dt} = -\frac{k}{L}x_2 - \frac{R}{L}x_3 + \frac{1}{L}u$ éq.(3)

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \\ \frac{dx_3}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{f}{J} & \frac{k}{J} \\ 0 & -\frac{k}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

4/ La représentation graphique pour chaque solution est donnée ci-dessous par les schémas implémentés sur Simulink.

Le bloc rouge pour la première représentation.

Le bloc bleu pour la deuxième représentation.

Le bloc vert pour la troisième représentation.

Si les entrées (u) sont égales on aura la même réponse, les courbes se confondront, car les représentations sont équivalentes.

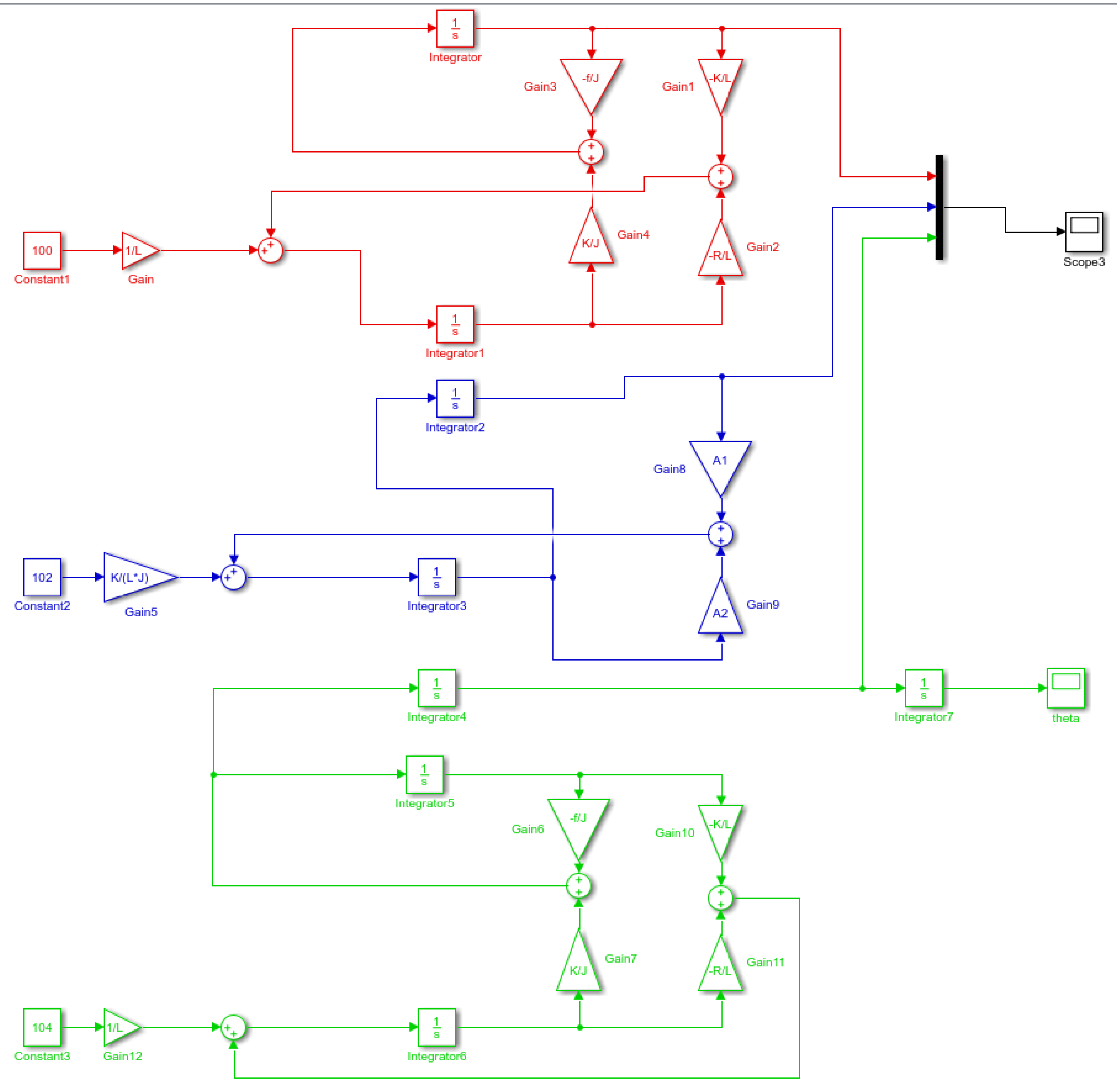
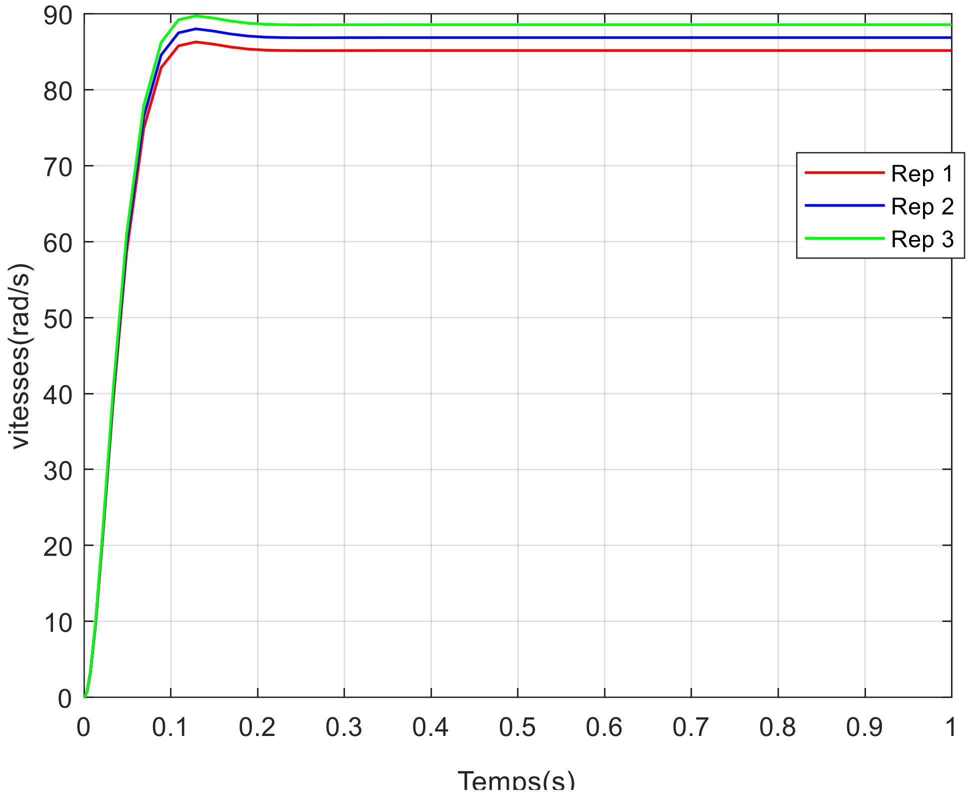


figure (1) : Représentation des solutions par Simulink



figure(2) : Réponses en vitesses.