

Chapitre 1. Propriétés dynamiques de la machine à courant continu

1. Introduction générale / Modèle d'état

1. Introduction

La modélisation des systèmes dynamiques est prépondérante dans l'étude de ceux-ci. En effet, la connaissance du modèle mathématique permettant de décrire l'évolution au cours du temps la dynamique de ce système. Il est nécessaire de posséder des informations sur le comportement du système sous l'influence des commandes, des perturbations, au cours du temps, et comment cette évolution se traduit au niveau des sorties. L'ensemble de ces informations constitue le modèle. Concernant la modélisation des systèmes dynamiques, plusieurs ouvrages peuvent être consultés, [voir bibliographie]. Le modèle du système peut être soit linéaire soit non linéaire et soit stationnaire, soit non stationnaire. La modélisation est largement utilisée dans l'identification des paramètres du système, la commande et la détection des défauts.

2. Système dynamique

Un système dynamique est caractérisé par les trois concepts suivants :

- Les fonctions à réaliser qui correspondent aux objectifs pour lesquels le système a été créé (but d'existence).
- La structure qui correspond aux moyens mis en œuvre pour accomplir la fonction du système. Généralement, la structure d'un système correspond à l'organisation matérielle et/ou logicielle de ressources qui peuvent faire intervenir plusieurs technologies.

Classiquement, on peut catégoriser les différentes structures des systèmes dynamiques selon leur nature technologique. Les systèmes dynamiques peuvent donc être classifiés de la façon suivante :

- Les systèmes électriques ou électroniques, logiques ou analogiques,
 - Les systèmes thermoélectriques,
 - Les systèmes mécaniques,
 - Les systèmes informatiques,
 - Les systèmes biologiques, chimiques, etc...
- le comportement qui caractérise la forme d'accomplissement par le système d'une ou plusieurs fonctions.

Un système est dit dynamique si son comportement évolue au cours du temps. Il peut être représenté du point de vue conceptuel par le schéma suivant :



Figure (1) : Schéma général d'un système dynamique

Le comportement d'un système dynamique traduit ainsi l'évolution au cours du temps des sorties en fonction des entrées appliquées. D'une autre manière, on peut dire qu'un système dynamique traduit la relation de **causalité** entre les entrées (causes) et les sorties (effets). Cette relation entre les entrées et les sorties constitue le modèle ou le processus du système.

Du point de vue système, les entrées et sorties sont des grandeurs physiques quantifiables. Du point de vue modèle, les entrées et sorties correspondent à des variables externes quantifiées. Ainsi, les entrées et sorties d'un système revêtent un caractère informationnel quantitatif sur le comportement du système du fait même de la nature analytique du modèle. Pour le système, cet apport informationnel est réalisé par la connaissance (entrées connues) ou par la mesure (sorties mesurées à l'aide de capteurs par exemple). Les entrées connues d'un système sont des entrées dites de commande. Les entrées sont connues ou données car elles correspondent à des sorties d'un autre système permettant leur connaissance. Les entrées de commande peuvent soit être directement mesurées à la sortie du système qui les génère, soit être calculées. Les entrées sont transformées en grandeurs d'action par l'intermédiaire d'autres systèmes que l'on nomme actionneurs. Le schéma représenté à la figure (2) donne la structure d'un système dynamique en boucle ouverte.

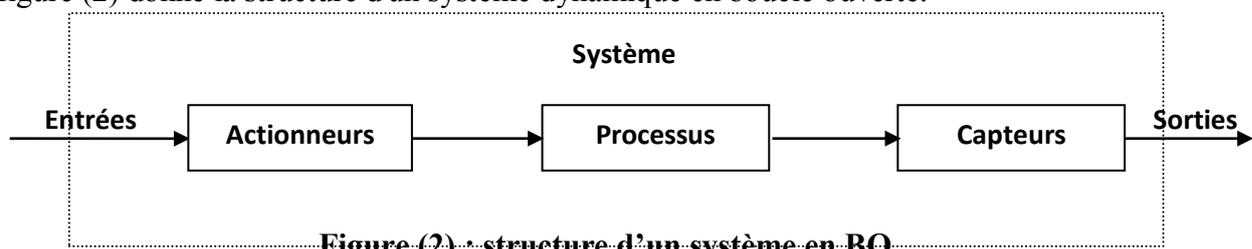


Figure (2) : structure d'un système en BO

Finalement, un système dynamique pourra se caractériser par :

- La représentation mathématique de son comportement appelé modèle mathématique du système,
- son organisation générale englobant les trois sous systèmes : actionneurs, processus et capteurs,
- son interaction avec un système de contrôle permettant de générer les entrées qui vont assurer l'accomplissement de la fonction désirée en sortie.

3. Représentation des systèmes

Lors l'étude des systèmes, ils peuvent être représentés par des modèles linéaires, 3 types de représentation de ces modèles sont possibles :

a. La forme différentielle entrée-sortie : La description mathématique du fonctionnement d'un système consiste à écrire l'ensemble des relations algébriques et différentielles qui relient les m variables d'entrées représentées par un vecteur noté $u(t)$, les n variables de sorties représentées par un vecteur noté $y(t)$ et les variables internes du système. À l'aide de la méthode des graphes de fluence, il est possible d'éliminer des relations mathématiques définies, les variables internes et ainsi obtenir des relations algébriques et différentielles qui lient les sorties et les entrées. On obtient finalement une relation liant les variables d'entrées et de sorties suivantes :

$$\sum_{i=c}^n a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^m b_i \frac{d^i u}{dt^i}$$

où :

— les coefficients a_i et b_i sont des constantes réelles, telles que a_c , a_n , b_0 et b_m soient non nuls ;

- n, m sont des entiers positifs tels que $m \leq n$ pour que le système soit causal ; n est l'ordre du système ;
- $c \leq n$ est un entier positif ou nul appelé classe du système.

La solution $y(t)$ de cette équation, appelée réponse temporelle du système

b. La matrice de transfert entrée-sortie : La matrice de transfert entrée-sortie, notée $F(s)$ ou "s" représente l'opérateur de dérivation ($s=d/dt$; *opérateur de Laplace*), décrit l'évolution de la sortie $y(t)$ en fonction de l'entrée $u(t)$ dans le domaine de Laplace:

$$y(s) = F(s).u(s)$$

Transformée de Laplace: Soit $f(t)$ un signal causal à temps continu. La transformée de Laplace de ce signal est définie par

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt.$$

c. la forme d'état.

Elle est utilisée pour la modélisation des systèmes. Lors de la conception de méthode de commande, il est nécessaire d'utiliser soit la matrice de transfert entrée-sortie, soit la forme d'état.

4. Équation d'état

4.1 Représentation mathématique

L'état d'un modèle représente l'ensemble des paramètres nécessaires pour connaître le comportement de la sortie d'un système en fonction des entrées auxquelles il est soumis.

Modéliser un système grâce à ces équations d'état consiste à construire un modèle ne faisant intervenir que des équations différentielles d'ordre 1. La structure de la représentation d'état est commune à tous les systèmes linéaires et un système continu linéaire à coefficients constants est décrit par l'équation d'état suivante, nommée forme canonique (LTI=systèmes Linéaires à Temps Invariant ou *Linear Time Invariant Systems*) :

$$\text{Cas continu :} \quad \dot{x} = Ax + Bu \quad (1.a)$$

$$y = Cx + Du \quad (1.b)$$

L'espace d'état est \mathbf{R}^n , on suppose qu'il y a \mathbf{p} sorties et \mathbf{m} entrées. Les variables d'état, de sorties et d'entrées sont regroupées respectivement dans le vecteur d'état x , le vecteur de sorties y et le vecteur d'entrées u . Les relations sont linéaires et peuvent donc s'écrire sous forme matricielle.

Dans les deux cas, continu et discret, on parlera du système (A, B, C, D) avec $x \in \mathbf{R}^n$,

$y \in \mathbf{R}^p$, $u \in \mathbf{R}^m$ et où :

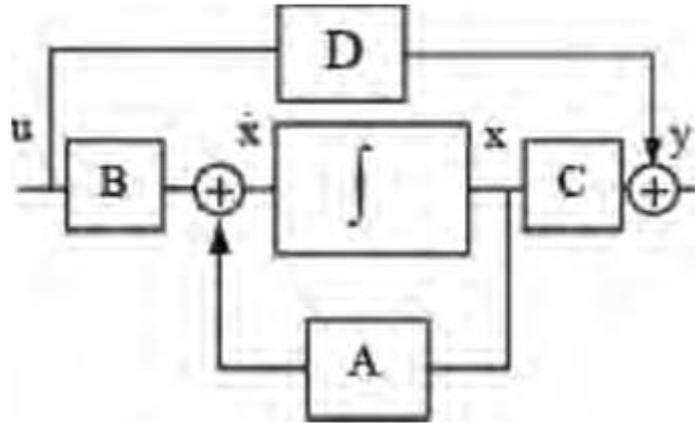
$A [n \times n]$ est la matrice d'état

$B [n \times m]$ est la matrice d'entrée

$C [p \times n]$ est la matrice de sortie

$D [p \times m]$ est le *transfert direct entrée/sortie*.

Les équations (1) et (2) sont représentées par les schémas de la figure 3.



Figure(3) : Schéma standard pour la forme canonique (continu).

4.2 Quelques définitions

État : l'état d'un système dynamique est le plus petit ensemble de variables, de grandeurs, tel que la connaissance de cet ensemble à l'instant $t = t_0$, ainsi que celle du signal d'entrée pour $t \geq t_0$, suffit à déterminer complètement le comportement du système pour $t \geq t_0$.

Variables d'état : ce sont les variables, grandeurs qui constituent l'état du système.

Vecteur d'état : de manière plus mathématique, l'on représente l'état par une concaténation de l'ensemble des variables d'état en un vecteur, à priori réel, de dimension n , que l'on note $x = [x_1, \dots, x_n]^T$.

Espace d'état : Il s'agit tout simplement de l'espace vectoriel dans lequel le vecteur d'état x est susceptible d'évoluer, chaque instance de x étant associée à un point de cet espace. Cet espace est donc \mathbb{R}^n .

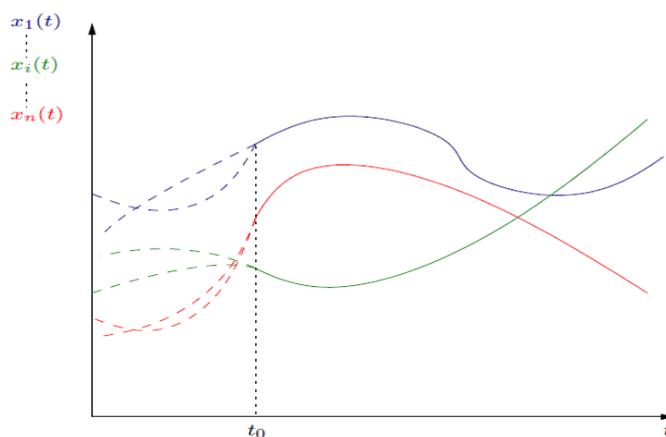


Figure (4) : L'évolution des composantes de $x(t)$ après t_0 (trait plein) est indépendante de leur évolution avant t_0 (pointillés)

4.3 Propriétés des systèmes à temps continu

Les systèmes décrits précédemment possèdent tous les propriétés de linéarité et d'invariance, au moins localement autour d'un point de fonctionnement. Le cas échéant, c'est même précisément pour avoir ces propriétés que l'on se place en un point de fonctionnement. Elles sont en effet d'un grand intérêt en terme de représentation, comme nous le verrons plus loin.

Linéarité

(Linéarité d'un système) Soit y_1 et y_2 les réponses d'un système Σ excité séparément par les entrées u_1 et u_2 . Soit α un réel quelconque. Le système est linéaire si sa sortie vaut $\alpha y_1 + y_2$ en réponse à l'entrée $\alpha u_1 + u_2$ (figure 5).

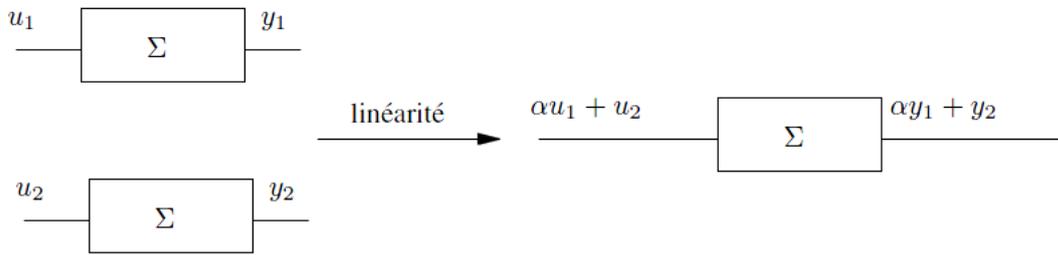


Figure (5) : Linéarité d'un système

Un système linéaire répond donc notamment au principe de superposition. Donc la relation entre la sortie $y(t)$ et l'entrée $u(t)$ est linéaire.

Remarque : pour étudier un système il doit être linéaire ou linéarisé autour d'un point dit de fonctionnement ou d'équilibre.

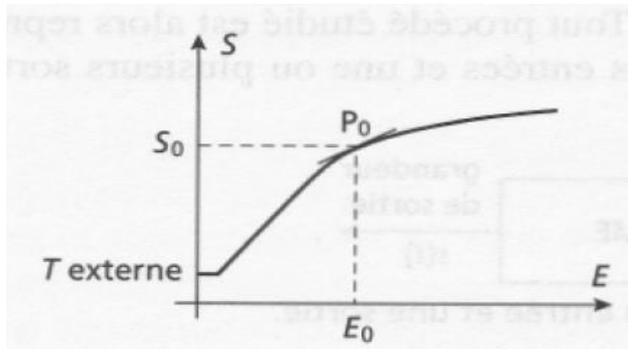


Figure 06 : étude en un point P_0 de fonctionnement d'un système non linéaire

Invariance

(Invariance en temps d'un système) Un système est dit invariant si une même commande, appliquée à deux instants différents produit la même sortie aux instants considérés (figure 7).

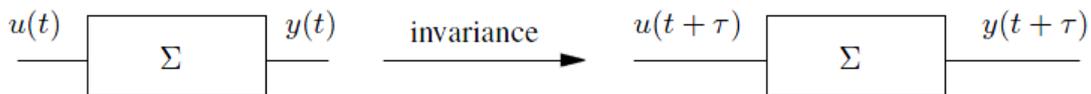


Figure (7) : Invariance d'un système

Principe de causalité

Un système d'entrée $u(t)$ et de sortie $y(t)$ est dit causal si, $\forall t < 0, u(t) = 0 \Rightarrow y(t) = 0$.

Cela signifie que la réponse du système ne précède pas son excitation. On retiendra notamment que tout système physiquement réalisable est causal.

Causalité d'un signal : Un signal $f(t)$ à temps continu est causal si $f(t) = 0; \forall t < 0$.

Exemple:

Soit un circuit RLC comme dans la figure 8 :

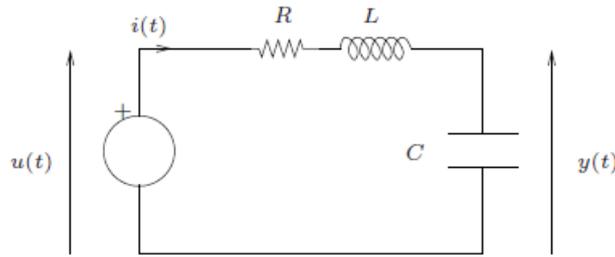


Figure (8) : Circuit RLC

$$\begin{cases} u(t) = Ri(t) + L \frac{di}{dt} + y(t) \\ y(t) = \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \Leftrightarrow \frac{dy(t)}{dt} = \frac{1}{C} i(t) \end{cases}$$

Soit : $x_1=i$ et $x_2=y$

$$\begin{cases} u(t) = Rx_1 + L \frac{dx_1}{dt} + x_2 \\ \dot{x}_2 = y = \frac{1}{C} x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = -\frac{R}{L} x_1 - \frac{1}{L} x_2 + \frac{1}{L} u \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{C} x_1 \end{cases}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \quad 0], D=0$$

4.4 Passage représentation d'état vers fonction de transfert

Cas continu : soit

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (*)$$

$$y = Cx + Du \quad (**)$$

Par passage au plan de Laplace : $sX(s) - X(0) = AX(s) + BU(s)$

$X(0)=0, sX(s) - AX(s) = BU(s) \Rightarrow (sI - A)X(s) = BU(s) \Rightarrow$

$$X(s) = (sI - A)^{-1} \cdot BU(s)$$

On remplace dans (**) il vient :

$$Y(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot BU(s) + DU(s) = (C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D)U(s) \Rightarrow$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$$

Pour les (SISO=unitaire) c'est une fonction.

Pour les (MIMO=multiple) c'est une matrice

Exp :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \quad 2]x$$

* Trouver la fonction de transfert :

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D, \quad D=0 \text{ donc, } F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$$

$$(sI - A)^{-1} = \left(\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \right)^{-1} = \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -2 & s+3 \end{bmatrix}$$

$$\Delta = (s+2) \cdot (s+3) - 2 = s^2 + 5s + 4$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} s+3 & +1 \\ +2 & s+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$C \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [1 \quad 2] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = [a_{11} + 2a_{21} \quad a_{12} + 2a_{22}]$$

$$[a_{11} + 2a_{21} \quad a_{12} + 2a_{22}] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = a_{11} + 2a_{21} + a_{12} + 2a_{22}$$

$$= \frac{1}{\Delta} (s+3 + 2 \times 2 + 1 + 2 \cdot s + 2 \times 2) = \frac{1}{\Delta} (3s + 12)$$

$$F(s) = \frac{3s + 12}{s^2 + 5s + 4}$$

2. Modélisation du moteur à courant continu

2.1 Mise en équation d'un système physique

Les équations décrivant l'évolution d'un système dynamique sont obtenues en appliquant les lois de la physique. Il est possible toutefois que le modèle obtenu ne donne qu'une représentation approchée des phénomènes réels. En effet, il est en général difficile de prendre en compte l'ensemble des phénomènes physiques mis en jeu.

2.2 Description du moteur à courant continu

Un moteur à courant continu (MCC), dont le schéma de principe est donné à la figure (9), est un dispositif électromécanique qui convertit une énergie électrique d'entrée en énergie mécanique. L'énergie électrique est apportée par un convertisseur de puissance qui alimente le bobinage disposé sur l'induit mobile (rotor). Ce bobinage est placé dans un champ magnétique, permanent ou non, produit par l'inducteur. On supposera pour simplifier que cette excitation est séparée et constante, comme c'est le cas, notamment lorsque l'inducteur est constitué d'aimants. Le courant circulant dans les spires de l'induit du moteur, des forces électriques lui sont appliquées et, grâce à un dispositif adapté (balais et collecteur), les forces s'additionnent pour participer à la rotation. On peut ainsi considérer le moteur comme un système dont l'entrée est la tension d'induit et la sortie une grandeur liée à la position angulaire du rotor. On choisit tout d'abord la vitesse de rotation du rotor comme grandeur de sortie.

2.3 Modélisation

Le MCC étant un système électromécanique, les équations dynamiques résultent de la combinaison des modélisations mécanique et électrique du moteur, schématiquement décrites à la figure (9).

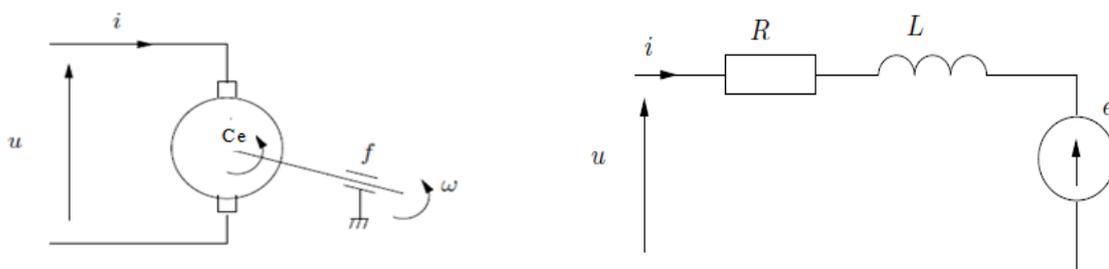


Figure (9) : Schéma d'un moteur à courant continu

Pour la partie électrique, on calcule la tension aux bornes de l'induit. L'équation électrique, liant la tension u aux bornes de l'induit et le courant d'induit i s'écrit :

$$u(t) = Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) \quad (1)$$

R : résistance de l'induit du moteur. L : son inductance.

La force électromotrice, qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor :

$$e(t) = k_e \omega \quad (2)$$

Pour la partie mécanique, on applique le principe fondamental de la dynamique autour de l'axe de rotation. L'équation mécanique tenant compte des couples agissant sur le rotor s'écrit :

$$C_e - C_r = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega \quad (3)$$

C_e : est le couple moteur.

f : le coefficient de frottement visqueux.

J : le moment d'inertie du rotor. Ce : couple de charge ou résistant.

Le couple C_e est proportionnel au courant de l'induit tq :

$$C_e = k_m \cdot i \tag{4}$$

En règle générale les coefficients k_e et k_m sont si proches qu'il est raisonnable de les considérer égaux, en posant $K = k_e = k_m$, les équations (2.3) et 2.4 donnent (avec $C_r=0$):

$$ki = J \frac{d\omega}{dt} + f\omega \tag{5}$$

En dérivant (2.5), il vient :

$$k \frac{di}{dt} = J \frac{d^2\omega}{dt^2} + f \frac{d\omega}{dt} \tag{6}$$

Par combinaison des équations (2.5), (2.6) et (2.1) , (2.2) on aura :

$$\frac{R}{k} \left(f\omega + J \frac{d\omega}{dt} \right) + \frac{L}{k} \left(J \frac{d^2\omega}{dt^2} + f \frac{d\omega}{dt} \right) + K\omega = u \tag{7}$$

Par arrangement on aura :

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{RJ+Lf}{LJ} \frac{d\omega}{dt} + \frac{Rf+K^2}{LJ} \omega = \frac{K}{LJ} u \tag{8}$$

Cette équation différentielle relie ω et u par l'intermédiaire des paramètres constants dans le temps. C'est d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2.

D'après l'équation (8), la fonction de transfert du MCC s'écrit :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{LJ}}{s^2 + \frac{RJ+Lf}{LJ}s + \frac{Rf+K^2}{LJ}} \tag{2.9}$$

le numérateur : $N(s) = \frac{K}{LJ} = cte$

le dénominateur : $D(s) = s^2 + \frac{RJ+Lf}{LJ}s + \frac{Rf+K^2}{LJ}$ Détermine les pôles du système.

La fonction de transfert peut être écrite :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K_G}{\tau_{el}\tau_{em}}}{\left(s + \frac{1}{\tau_{el}}\right)\left(s + \frac{1}{\tau_{em}}\right)} \tag{10}$$

ou : $G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_G}{(1 + \tau_{el}.s)(1 + \tau_{em}.s)}$ (11)

avec : $\tau_{el} = \frac{L}{R}$; $\tau_{em} = \frac{RJ}{Rf+K^2}$ et $K_G = \frac{K}{Rf+K^2}$

le MCC possède donc deux pôles :

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_{el}} \text{ et } p_2 = -\frac{1}{\tau_{em}}$$

associés à deux constantes de temps, avec p_2 pôle dominant (réponse lente):

τ_{el} : constante de temps électrique.

τ_{em} : constante de temps électromécanique. (D'autant plus grande que l'inertie J est grande).

K_G est le gain statique du MCC.

En général, la partie électromécanique réagit moins vite que la partie électrique et on a :

$$\tau_{em} \gg \tau_{el}$$

Sous forme développée, on a :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{K_G}{1 + (\tau_{el} + \tau_{em})s + \tau_{el}\tau_{em}s^2} \quad (12)$$

II.3 Modèle d'état du MCC

On peut facilement déterminer un modèle d'état du MCC. L'entrée du système est la tension d'induit u et sa sortie la vitesse de rotation ω du rotor. On choisit deux variables indépendantes du système : la vitesse de rotation $x_1 = \omega$ et le courant d'induit $x_2 = i$. L'équation électrique (1) s'écrit alors :

$$R x_2 + L \frac{dx_2}{dt} + K x_1 = u$$

L'équation mécanique (3) donne :

$$K x_2 - f x_1 = J \frac{dx_1}{dt}$$

Donc :

$$J \frac{dx_1}{dt} = K x_2 - f x_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{f}{J} x_1 + \frac{K}{J} x_2$$

$$L \frac{dx_2}{dt} = -R x_2 - K x_1 + u \Rightarrow \dot{x}_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{K}{L} x_1 - \frac{R}{L} x_2 + \frac{1}{L} u$$

D'où la représentation d'état :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\frac{f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u, \\ y &= (1 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Le choix effectué n'est pas unique. D'où on peut implémenter le schéma bloc de la simulation de ce système sur Simulink, figure (10).

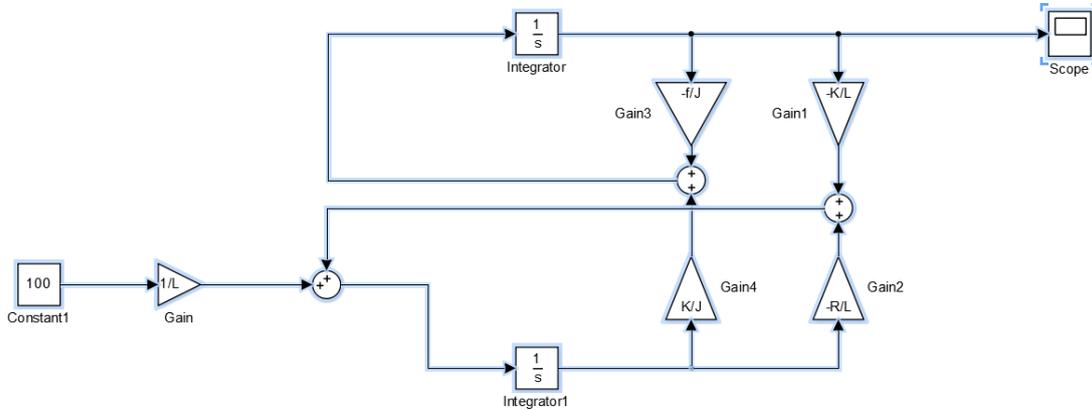


Figure (10) : Schéma de simulation de la MCC (ME)

II.4 Passage du modèle d'état à l'équation de transfert

$$A = \begin{pmatrix} \frac{-f}{J} & \frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} ; C = (1 \ 0) \text{ et } D = 0.$$

En appliquant la relation : $F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B + D$

$$\Omega(s) = (1 \ 0) \begin{pmatrix} s + \frac{f}{J} & -\frac{K}{J} \\ \frac{K}{L} & s + \frac{R}{L} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} U(s)$$

soit :

$$\Omega(s) = (1 \ 0) \frac{1}{(s + \frac{f}{J})(s + \frac{R}{L}) + \frac{K^2}{LJ}} \begin{pmatrix} s + \frac{R}{L} & +\frac{K}{J} \\ -\frac{K}{L} & s + \frac{f}{J} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} U(s)$$

qui donne après tous calcul fait :

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{\frac{K}{LJ}}{s^2 + \frac{RJ+Lf}{LJ}s + \frac{Rf+K^2}{LJ}}$$

Expression identique à celle du (9).

La figure (11) donne le schéma bloc de la simulation de la MCC sur Simulink.

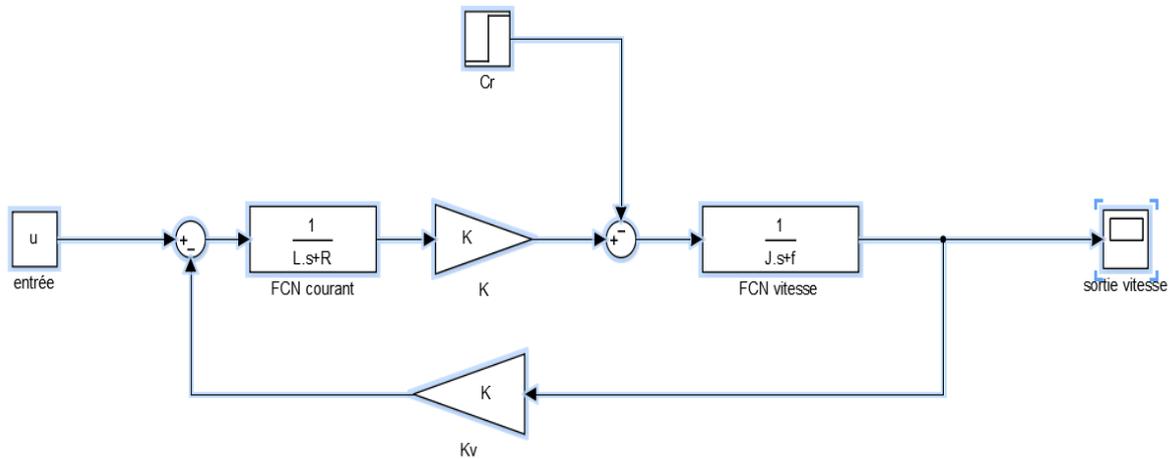


Figure (11) : Schéma de simulation de la MCC (FT)

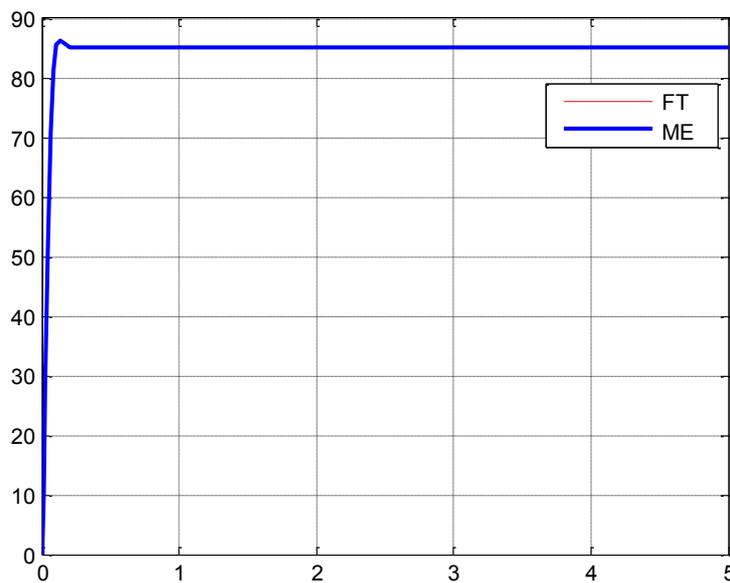


Figure (12) : Graphes de simulation pour la vitesse du MCC par FS et ME

Les paramètres de la machine simulée $R=42.31$; $L=0.63$ $J=0.0012$; $f=0.001$; $K=1.137$;
 Dans les deux simulations, les courbes sont identiques.