Chapitre 1

Notions de logique

Dans ce chapitre on se limitera à l'introduction des premiers éléments de la logique classique.

1.1 Assertions (Propositions)

Définition 1.1.
Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.1.

1. *Alger est le capitale de l'Algérie est une assertion vraie.*
2. *16 est un multiple de 2 est une assertion vraie.*
3. *19 est un multiple de 2 est une assertion fausse.*

Les assertions sont notées par des lettres majuscules P, Q, R,....

Si l'assertion est vraie, nous lui attribuons la valeur 1, (ou V) ; si elle est fausse, nous lui attribuons la valeur logique 0, (ou F).

P
1
0

TABLE 1.1: Table de vérité d'une assertion P

1.2 Les connecteurs logiques

Les connecteurs logiques permettent à partir des assertions P, Q, R, ... de créer de nouveaux assertions dits assertions composés dont on peut déterminer la valeur de vérité à partir des valeurs de vérité de P, Q, R, ... Les cinq connecteurs logiques usuels sont « non », « et », « ou », « $\Rightarrow$ » et «$\Leftrightarrow$».

1.2.1 Négation, conjonction, disjonction

Définition 1.2.
La négation de l'assertion P est l'assertion noté $non(P)$ (ou parfois $\bar{P}$) qui est vrai lorsque P est faux, et est faux lorsque P est vrai.

Pour le connecteur logique « non », on obtient la table de vérité suivante (1.2)

P	$\bar{P}$
1	0
0	1

TABLE 1.2: Table de vérité de l'assertion $\bar{P}$

Exemple 1.2.

1. *« 24 est un multiple de 2 » est une assertion vraie. Sa négation est « 24 n'est pas un multiple de 2 », qui est une assertion fausse.*
2. *16 est un multiple de 3 est une assertion fausse. Sa négation est « 16 n'est pas un multiple de 3 », qui est une assertion vraie.*

Définition 1.3.
Soient P et Q deux prédicats.

1. L'assertion « P et Q », appelé conjonction de P et Q, est une assertion qui est vrai lorsque P et Q sont vrais simultanément, et faux dans tous les autres cas. On le note aussi « $P \wedge Q$ ».
2. L'assertion « P ou Q », appelé disjonction de P et Q, est une assertion qui est vrai lorsque l'un au moins des deux assertions P et Q est vrai, et faux lorsque les deux sont faux. On le note aussi « $P \vee Q$ ».

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	0

TABLE 1.3: Table de vérité de l'assertion $P \wedge Q$

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
0	1	1
1	0	1
0	0	0

TABLE 1.4: Table de vérité de l'assertion $P \vee Q$

Les tables de vérité des deux connecteurs logiques « et » et « ou » sont définis par les tableaux (1.3) et (1.4).

Exemple 1.3.
« 10 est divisible par 2 » (c'est une assertion) est vrai. « 10 est divisible par 3 » (c'est aussi une assertion) est faux. Ainsi, « P et Q » (c'est encore une assertion) est faux. En revanche, « P ou Q » est vrai.

1.2.2 Implication, équivalence

Définition 1.4.
Soient P et Q deux assertions.

1. L'assertion « $P \Rightarrow Q$ », appelé implication de P vers Q et on lit « P implique Q » ou encore « P entraîne Q », est une assertion qui est faux lorsque P est vrai et Q est faux, et vrai dans tous les autres cas.
2. L'assertion « $P \Leftrightarrow Q$ », appelé équivalence de P et de Q et on lit « P équivaut à Q », est un assertion qui est vrai lorsque P et Q sont simultanément vrais ou faux, et faux dans tous les autres cas.

Les tables de vérités des deux connecteurs logiques « $\Rightarrow$» et « $\Leftrightarrow$» ainsi définis sont présenté par les tableaux (1.5) et (1.6).

La définition de ces deux connecteurs appellent quelques commentaires.

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

TABLE 1.5: Table de vérité de l'assertion $P \Longrightarrow Q$

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
1	1	1
0	1	0
1	0	0
0	0	1

TABLE 1.6: Table de vérité de l'assertion $P \Leftrightarrow Q$

Observons que l'implication de P vers Q, telle qu'elle est définie ci-dessus, englobe la notion d'implication du langage courant : « Si P alors Q ». En effet, si $P \Rightarrow Q$ est vrai, et si P vrai, alors Q est vrai (ce qui correspond à la première ligne de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$.

Remarquons qu'au sens du langage courant, une implication exprime une relation de cause à effet. Ici, la cause est P et l'effet est Q. Elle signifie que pour avoir l'effet, il suffit d'avoir la cause, et en ce sens, on dit parfois que P est une condition suffisante pour Q. Elle signifie aussi que la situation où il y a la cause mais pas l'effet est impossible (ce qui correspond à la deuxième ligne de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$. Bien entendu, s'il n'y a pas la cause, il peut tout de même y avoir l'effet (on retrouve ici la troisième ligne de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$. Enfin, il se peut qu'il n'y ait ni la cause, ni l'effet (ce qui correspond cette fois-ci à la quatrième ligne de la table de vérité de $P \Rightarrow Q$.

Remarque 1.5.

1. En pratique, si P, Q et R désignent trois assertion, alors l'assertion composé ($P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow R$ se note : ($P \Rightarrow Q \Rightarrow R$).

   De même, l'assertion composé ($P \Leftrightarrow Q$ et « $Q \Leftrightarrow R$ » se note : ($P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow R$)

2. L'implication $Q \Rightarrow P$ s'appelle l'implication réciproque de $P \Rightarrow Q$.

1.2.3 Propriétés

Définition 1.6.
Soient P et Q deux assertions (composés ou non).

1. Si P est vrai lorsque Q est vrai et si P est faux lorsque Q est faux alors on dit que P et Q ont la même table de vérité ou qu'ils sont logiquement équivalents, et on note $P \Leftrightarrow Q$.
2. Dans le cas contraire, on note $P \not\Leftrightarrow Q$.

Exemple 1.4.
Soient P, Q, R trois assertions. Alors :

1. $\overline{\overline{P}} \Leftrightarrow P$.
2. $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$. *De même,* $(P \vee P) \Leftrightarrow P$.
3. $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P), \qquad (P \vee Q) \Leftrightarrow (Q \vee P)$.
4. $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R), \qquad (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$.
5. $(P \wedge (Q \vee P) \Leftrightarrow P$.
6. $(P \Leftrightarrow Q \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow P)$.
7. $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \qquad P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
8. $\overline{P \wedge Q} \Leftrightarrow \overline{P} \vee \overline{Q}, \qquad \overline{P \vee Q} \Leftrightarrow \overline{P} \wedge \overline{Q}$.
9. *L'assertion composé* $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ *est vrai quelles que soient les valeurs de vérité de* P, Q *et* R.
10. *L'assertion composé* $((P \Leftrightarrow Q) \wedge (Q \Leftrightarrow R)) \Rightarrow (P \Leftrightarrow R)$ *est vrai quelles que soient les valeurs de vérité de* P, Q *et* R.
11. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{P} \vee Q)$.
12. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \Leftrightarrow (P \wedge \overline{Q})$.
13. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.
14. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$.

1.3 Les quantificateurs mathématiques

Définition 1.7.
Soit E un ensemble. On appelle prédicat sur E un énoncé contenant des lettres appelées variables tel que quand on remplace chacune de ces variables par un élément de E, on obtienne une assertion (proposition).

Un prédicat contenant la variable x sera noté $P(x)$.

Exemple 1.5.
L'énoncé $P(n)$ défini par « n est un multiple de 2 » est un prédicat sur $\mathbb{N}$. Il devient une assertion quand on donne une valeur entière à n. Par exemple,

1. *l'assertion $P(10)$ définie par « 10 est un multiple de 2 » obtenue en remplaçant n par 10 est vraie ;*
2. *l'assertion $P(11)$ définie par « 11 est un multiple de 2 » obtenue en remplaçant n par 11 est fausse.*

À partir d'un prédicat $P(x)$ défini sur un ensemble E, on peut construire de nouvelles assertions dites assertions quantifiées en utilisant les quantificateurs « il existe ($\exists$)» et « quel que soit ($\forall$)».

Définition 1.8.
Soit $P(x)$ un prédicat défini sur un ensemble E.

1. Le quantificateur « quel que soit » (appelé aussi « pour tout») noté $\forall$, permet de définir l'assertion quantifiée «$\forall x \in E \quad P(x)$» qui est vraie lorsque tous les éléments x de E vérifient $P(x)$.
2. Le quantificateur « il existe », noté : $\exists$, permet de définir l'assertion quantifiée «$\exists x \in E \quad P(x)$» qui est vraie lorsqu'on peut trouver (au moins) un élément x appartenant à E vérifiant l'énoncé $P(x)$.

Exemple 1.6.

1. *L'énoncé « $x^2 + 2x - 3 \leq 0$» est un prédicat définit sur $\mathbb{R}$. Il peut être vrai ou faux selon la valeur de x. L'énoncé « $\forall x \in [-3, 1] \quad x^2 + 2x - 3 \leq 0$ » est une assertion (quantifiée). Elle est vraie puisque la quantité $x^2 + 2x - 3$ est négative ou nulle pour tout x appartenant à l'intervalle fermé $[-3, 1]$.*
2. *L'assertion quantifiée « $\forall x \in \mathbb{N} \quad (n - 3)n > 0$ » est fausse puisque qu'il existe un élément n de $\mathbb{N}$ (prendre $n = 0$, $n = 1$, $n = 2$ ou $n = 3$) pour lequel l'énoncé « $x \in \mathbb{N}(n - 3)n > 0$ » est faux.*
3. *L'assertion quantifiée « $\exists x \in \mathbb{R} \quad x^2 = 4$ » est vraie car il existe (au moins) un élément de $\mathbb{R}$ qui vérifie $x^2 = 4$. C'est le cas des deux réels -2 et 2.*

1.3.1 Règles de négation d'une assertion quantifiée

1. La négation de « pour tout élément x de E l'énoncé $P(x)$ est vrai» est « il existe un élément x de E pour lequel l'énoncé $P(x)$ est faux»

$$\overline{(\forall x \in E \quad P(x))} \quad \Leftrightarrow \quad (\exists x \in E \quad \overline{P(x)})$$

.

2. La négation de « il existe un élément x de E pour lequel l'énoncé $P(x)$ est vrai» est « pour tout élément x de E l'énoncé $P(x)$ est faux ».

$$\overline{(\exists x \in E \quad P(x))} \quad \Leftrightarrow \quad (\forall x \in E \quad \overline{P(x)})$$

.

Voici des exemples :

Exemple 1.7.

1. *La négation de* $(\forall x \in [0, +\infty[\quad (x^2 \geq 1))$ *est* $(\exists x \in [0, +\infty[\quad (x^2 < 1))$.
2. *La négation de* $(\exists z \in \mathbb{C} \quad z^2 + z + 1 = 0)$ *est* $(\forall z \in \mathbb{C} \quad z^2 + z + 1 \neq 0)$.
3. *Ce n'est pas plus difficile d'écrire la négation de phrases complexes. Pour l'assertion :*
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \quad (x + y > 10),$$
sa négation est
$$\exists x \in \mathbb{R} \quad \forall y > 0 \quad (x + y \leq 10).$$

Remarque 1.9.
L'ordre des quantificateurs est très important. Par exemple les deux phrases logiques

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \exists y > 0 \;\; (x + y > 10) \quad et \;\; \exists y > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \;\; (x + y > 10).$$

sont différentes. La première est vraie, la seconde est fausse.

1.4 Les différents modes de démonstration en mathématiques

Voici des méthodes classiques de raisonnements.

1.4.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion «$P \Rightarrow Q$ » est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie. C'est la méthode à laquelle vous êtes le plus habitué.

Exemple 1.8. *(TD)*
Montrer que si $a, b \in Q$ alors $a + b \in Q$.

1.4.2 Cas par cas

Si l'on souhaite vérifier une assertion P(x) pour tous les x dans un ensemble E, on montre l'assertion pour les x dans une partie A de E, puis pour les x n'appartenant pas à A. C'est la méthode de disjonction ou du cas par cas.

Exemple 1.9. *(TD)*
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

1.4.3 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante :

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}). \tag{1.1}$$

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $(P \Rightarrow Q)$, on montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 1.10. *(TD)*
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.

1.4.4 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer $(P \Rightarrow Q)$ repose sur le principe suivant : on suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc $(P \Rightarrow Q)$ » est vraie.

Exemple 1.11. *(TD)*
Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\dfrac{a}{1+b} = \dfrac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

1.4.5 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type $\forall x \in E \quad P(x)$ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $P(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de $\forall x \in E \quad P(x)$ est $\exists x \in E \quad \overline{P(x)}$
Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion $\forall x \in E \quad P(x)$.

Exemple 1.12. *(TD)*
Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».

1.4.6 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en trois étapes : lors de la première étape on prouve $P(0)$. Pour la deuxième étape, on suppose $n > 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ au rang suivant est vraie. Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1.5 Exercices

Exercice 1.10.
Soit P, Q et R trois propositions. Démontrer que

1. $P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \qquad P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$.
2. $\overline{P \wedge Q} \equiv \overline{P} \vee \overline{Q}, \qquad \overline{P \vee Q} \equiv \overline{P} \wedge \overline{Q}$.

3. $(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{P} \vee Q)$.
4. $\overline{(P \Rightarrow Q)} \equiv (P \wedge \overline{Q})$.
5. $(P \Rightarrow Q) \equiv (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$.

Exercice 1.11.
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Nier les assertions suivantes :

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \neq 0$.
2. $\forall M > 0, \quad \exists A > 0, \quad \forall x \geq A, \quad f(x) > M$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > 0 \Rightarrow x \leq 0$.
4. $\forall \epsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall (x, y) \in I^2, \quad (|x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \epsilon)$.

Exercice 1.12. *(Raisonnement direct)*
Montrer que si $a, b \in Q$ alors $a + b \in Q$.

Exercice 1.13. *(Raisonnement par disjonction de cas)*
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}, \quad |x - 1| \leq x^2 - x + 1$.

Exercice 1.14. *(Raisonnement par l'absurde)*
On rappelle que $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel. Démontrer que si a et b sont deux entiers relatifs tels que $a + b\sqrt{2} = 0$, alors $a = b = 0$.

Exercice 1.15. *(Raisonnement par contraposée)*
Soit n un entier. Énoncer et démontrer la contraposée de la proposition suivante :

$$\boxed{\textit{Si } n^2 \textit{ est impair, alors } n \textit{ est impair.}}$$

Exercice 1.16. *(Contre-exemple)*
Montrer que l'assertion suivante est fausse « Tout entier positif est somme de trois carrés ».