Centre universitaire Abdalhafid Boussouf- Mila

Matière: Equation de la physique mathématique.
$3^{ème}$année math, S5

Série N°1

Exercice 1 *Soit* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *une fonction de classe* C^1.

1. On définit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *par* $g(t)=f(2+2t)$.

- Démontrer que g *est* C^1 *et calculer* $g'(t)$ *en fonction des dérivées partielles de* f.

2. On définit $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *par* $h(u,v)=f(uv,u^2+v^2)$

- Démontrer que h *est* C^1 *et exprimer les dérivées partielles* $\frac{\partial h}{\partial u}$ *et* $\frac{\partial h}{\partial v}$ *en fonction des dérivées partielles* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial y}$ $(x=uv, y=u^2+v^2)$.

Exercice 2 *Déterminer toutes les fonctions* f :$\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *solution des systèmes suivants*

$$1\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=xy^2\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=yx^2\end{array}\right.\quad 2\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=e^xy\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=2y\end{array}\right.\quad 3\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=x^2y\\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=xy^2\end{array}\right. .$$

Exercice 3 *Soit la fonction* $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, *de classe* C^1, *telle que*

$$\forall(x,y,t)\in\mathbb{R}^3, f(x+t,y+t)=f(x,y).$$

1- Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$,

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0.$$

2- On pose $u=x+y, v=x-y$ *et* $F(u,v)=f(x,y)$. *Montrer que* $\frac{\partial F}{\partial u}=0$.

Exercice 4 *Résoudre :*

1) $\frac{dx}{(x(y-z))}=\frac{dy}{(y(z-x))}=\frac{dz}{(z(x-y))}$.

2) $\frac{dx}{(x(az-by))}=\frac{dy}{(y(cx-az))}=\frac{dz}{(z(by-cx))}$.

3) $\frac{dx}{x^2+y^2}=\frac{dy}{2xy}$.

Exercice 5 *Résoudre les équations :*

1) $x\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+2(y-a)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=f(x,y)$

2) $x\ \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-\alpha\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$

3) $x(y-f(x,y))\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+y(f(x,y)-x)\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=(x-y)f(x,y)$.

Exercice 6 *Soit* $z(x,y)$ *de classe* C^1, *Déterminer la solution vérifiant l'équation:*

$$yz\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}+xz\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}=-2xy$$

et passant par la circonférence : $x^2+y^2=16$, $z=3$.