Centre Universitaire de Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Sciences et de la Technologe
Mathématique 1 (1 ere ST 2021/2022)

Cours Maths 1 Et Exercices

Chapitre 1+ Chapitre 2

Chapitre I

Logique et raisonnements

1 Logique

1.1 Assertions

Une assertion est une phrase soit vraie, soit fausse, pas les deux en même temps.

Exemple 1.1
$2+2=4$ *est une assertion vraie.*
$3\times 2=7$ *est une assertion fausse.*
Pour tout $x\in\mathbb{R}$ *on a* $x^2\geq 0$ *est une assertion vraie.*
Pour tout $z\in\mathbb{C}$ *on a* $|z|=1$ *est une assertion fausse.*
Si P *est une assertion et* Q *est une autre assertion, nous allons définir de nouvelles assertions construites à partir de* P *et de* Q.

L'opérateur logique *et* $(\wedge)$

L'assertion $\ll P\,et\,Q \gg$ est vraie si P est vraie et Q est vraie. L'assertion $\ll P\,et\,Q \gg$ est fausse sinon. On résume ceci en une table de vérité :

P	Q	$P\wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Exemple 1.2
"$3+5=8 \ \wedge \ 3\times 6=18$" *est une assertion vraie*
"$2+2=4 \ \wedge \ 2\times 3=7$" *est une assertion fausse.*

L'opérateur logique *ou* $(\vee)$

L'assertion $\ll P \, ou \, Q \gg$ est vraie si l'une des deux assertions P ou Q est vraie. L'assertion $\ll P \, ou \, Q \gg$ est fausse si les deux assertions P et Q sont fausses. On reprend ceci dans la table de vérité :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Exemple 1.3
"$2+2=4 \ \vee \ 3\times 2=6$" *est une assertion vraie*
"$2=4 \ \vee \ 4\times 2=7$" *est une assertion fausse.*

1.1.1 La négation $\overline{P}$

L'assertion $\ll \overline{P} \gg$ est vraie si P est fausse, et fausse si P est vraie.

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Exemple 1.4
La négation de l'assertion $3 \geq 0$ *elle est l'assertion* $3 \lneq 0$.

1.1.2 L'implication $\Rightarrow$

La définition mathématique est la suivante :
L'assertion $\ll \overline{P} \, ou \, Q \gg$ est notée $P \Rightarrow Q$
Sa table de vérité est donc la suivante :

P	Q	$P \Longrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exemple 1.5
$2+2=5 \Rightarrow \sqrt{2}=2$ *est vraie ! Eh oui, si* P *est fausse alors l'assertion* $P \Rightarrow Q$ *est toujours vraie.*

1.1.3 L'équivalence $\Longleftrightarrow$

L'équivalence est définie par : $\ll P \Longleftrightarrow Q \gg$ est l'assertion $\ll (P \Rightarrow Q)\, et\, (Q \Rightarrow P) \gg$
On dira $\ll$ P est équivalent à Q $\gg$ ou $\ll$ P équivaut à Q $\gg$ ou $\ll$ P si et seulement si Q $\gg$. Cette assertion est vraie lorsque P et Q sont vraies ou lorsque P et Q sont fausses.
La table de vérité est :

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

1.2 Quantificateurs

Le quantificateur $\forall$: $\ll$ pour tout $\gg$
L'assertion

$$\forall x \in E,\ P(x)$$

est une assertion vraie lorsque les assertions $P(x)$ sont vraies pour tous les éléments x de l'ensemble E. On lit $\ll$ Pour tout x appartenant à E, $P(x)$ est vraie $\gg$.
Par exemple :
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0$ est une assertion vraie.
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1$ est une assertion fausse.

Le quantificateur $\exists$: $\ll$ il existe $\gg$

L'assertion

$$\exists x \in E,\ P(x)$$

est une assertion vraie lorsque l'on peut trouver au moins un élément x de E pour lequel $P(x)$ est vraie. On lit $\ll$ il existe x appartenant à E tel que $P(x)$ (soit vraie) $\gg$.

Par exemple :

$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 0$ est vraie, par exemple $x = 0$.

$\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0$ est fausse.

La négation des quantificateurs

La négation de $\ll \forall x \in E,\ P(x) \gg$ est $\ll \exists x \in E,\ \overline{P(x)} \gg$.

Exemple : la négation de $\ll \forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 0 \gg$ est l'assertion $\ll \exists x \in \mathbb{R},\ x^2 < 0 \gg$

La négation de $\ll \exists x \in E,\ P(x) \gg$ est $\ll \forall x \in E,\ \overline{P(x)} \gg$.

Exemple : la négation de $\ll \exists x \in \mathbb{R},\ x \leq 0 \gg$ est l'assertion $\ll \forall x \in \mathbb{R},\ x > 0 \gg$

2 Raisonnements

2.1 Raisonnement direct

On veut montrer que l'assertion $P \Longrightarrow Q$ est vraie. On suppose que P est vraie et on montre qu'alors Q est vraie.

Exemple 2.1 *Montrer que si* $a = b \Longrightarrow \dfrac{a+b}{2} = b$

on a

$$\begin{aligned} a = b &\Longrightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} = \frac{b}{2} + \frac{b}{2} \\ &\Longrightarrow \frac{a+b}{2} = b \end{aligned}$$

2.2 Contraposée

Le raisonnement par contraposition est basé sur l'équivalence suivante.

L'assertion $P \Longrightarrow Q$ est équivalente à $\overline{Q} \Longrightarrow \overline{P}$.

Donc si l'on souhaite montrer l'assertion $P \Longrightarrow Q$.

On montre en fait que si $\overline{Q}$ est vraie alors $\overline{P}$ est vraie.

Exemple 2.2 *Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.*
Démonstration
Nous supposons que n n'est pas pair. Nous voulons montrer qu'alors n^2 n'est pas pair. Comme n n'est pas pair, il est impair et donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k+1$.
Alors $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2+4k+1 = 2k'+1$ avec $k' = 2k^2+2k \in \mathbb{N}$. Et donc n^2 est impair.
Conclusion : nous avons montré que si n est impair alors n^2 est impair. Par contraposition ceci est équivalent à : si n^2 est pair alors n est pair .

2.3 Absurde

Le raisonnement par l'absurde pour montrer ≪ $P \Longrightarrow Q$ ≫ repose sur le principe suivant : On suppose à la fois que P est vraie et que Q est fausse et on cherche une contradiction. Ainsi si P est vraie alors Q doit être vraie et donc ≪ $P \Longrightarrow Q$ ≫ est vraie.

Exemple 2.3 *Soient $a, b > 0$. Montrer que si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.*
Démonstration
Nous raisonnons par l'absurde en supposant que $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ et $a \neq b$. Cela conduit à $(a-b)(a+b) = -(a-b)$.
Comme $a \neq b$ alors $a-b \neq 0$ et donc en divisant par $a-b$ on obtient $a+b = -1$. La somme de deux nombres positifs ne peut être négative. Nous obtenons une contradiction.
Conclusion : si $\frac{a}{1+b} = \frac{b}{1+a}$ alors $a = b$.

2.4 Contre-exemple

Si l'on veut montrer qu'une assertion du type ≪ $\forall x \in E\ P(x)$ ≫ est vraie alors pour chaque x de E il faut montrer que $p(x)$ est vraie. Par contre pour montrer que cette assertion est fausse alors il suffit de trouver $x \in E$ tel que $P(x)$ soit fausse. (Rappelez-vous la négation de ≪ $\forall x \in E,\ P(x)$ ≫ est ≪ $\exists x \in E,\ \overline{P(x)}$ ≫). Trouver un tel x c'est trouver un contre-exemple à l'assertion ≪ $\forall x \in E,\ P(x)$ ≫.

Exemple 2.4 *Montrer que l'assertion suivante est fausse ≪ $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geq 1$ ≫*
Démonstration. *Un contre-exemple est $x = 0.5$*

2.5 Récurrence

Le principe de récurrence permet de montrer qu'une assertion $P(n)$, dépendant de n, est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. La démonstration par récurrence se déroule en deux étapes :

• On prouve $P(0)$. Est vraie.

• On suppose $n \geq 0$ donné avec $P(n)$ vraie, et on démontre alors que l'assertion $P(n+1)$ est vraie.

Enfin dans la conclusion, on rappelle que par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exemple 2.5 *Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} \quad 2^n > n$.*

Démonstration *Pour $n \geq 0$, notons $P(n)$ l'assertion suivante : $2^n > n$*

Nous allons démontrer par récurrence que $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour $n = 0$ nous avons $2^0 = 1 > 0$. Donc $P(0)$ est vraie.

Supposons que $P(n)$ soit vraie. Nous allons montrer que $P(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= 2^n + 2^n \\ &> n + 2^n \qquad \textit{car par } P(n) \textit{ nous savons } 2^n > n, \\ &> n + 1 \qquad \textit{car } 2^n \geq 1. \end{aligned}$$

Donc $P(n+1)$ est vraie

Conclusion. *Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 0$, c'est-à-dire $2^n > n$ pour tout $n \geq 0$.*

Remarque 2.1 *Si on doit démontrer qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$, alors on commence l'initialisation au rang n_0.*

Exercice 1.1

Soient les quatre assertions suivantes :

$$(a)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (b)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0\ ;$$

$$(c)\ \forall x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad x + y > 0 \quad ; \quad (d)\ \exists x \in \mathbb{R}\ \forall y \in \mathbb{R} \quad y^2 > x.$$

1. Les assertions a, b, c, d sont-elles vraies ou fausses ?

2. Donner leur négation.

Exercice 1.2

Compléter les pointillés par le connecteur logique qui s'impose : $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$.

1. $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = 4$ ...... $x = 2$;
2. $z \in \mathbb{C}$ $z = \overline{z}$ ...... $z \in \mathbb{R}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ $x = \pi$ ...... $e^{2ix} = 1$.

Exercice 1.3

Montrer :

1. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.
2. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$.

Chapitre II

Les ensembles, les relations et les applications

vous connaissez déjà quelques ensembles :

- l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$.
- l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
- l'ensemble des rationnels $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}^*\right\}$.
- l'ensemble des réels $\mathbb{R}$, par exemple 3, $\sqrt{2}$, π, $\ln(2)$,...
- l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$.

Nous allons essayer de voir les propriétés des ensembles, sans s'attacher à un exemple particulier.
Vous vous apercevrez assez rapidement que ce qui est au moins aussi important que les ensembles, ce sont les relations entre ensembles : ce sera la notion d'application (ou fonction) entre deux ensembles.

1 Ensembles

1.1 Définir des ensembles

- On va définir informellement ce qu'est un ensemble : un ensemble est une collection d'éléments.

- Exemples :

$$\{0,1\}, \quad \{\text{rouge}, \text{noir}\}, \quad \{0,1,2,3,\ldots\} = \mathbb{N}.$$

- Un ensemble particulier est l'ensemble vide, noté $\varnothing$ qui est l'ensemble ne contenant aucun élément.

- On note $\boxed{x \in E}$ si x est un élément de E, et $x \notin E$ dans le cas contraire.

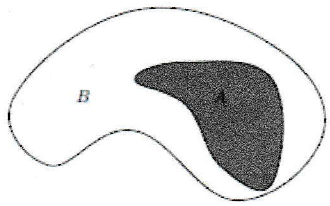
- Voici une autre façon de définir des ensembles : une collection d'éléments qui vérifient une propriété.

- Exemples :

$$\big\{x \in \mathbb{R} \mid |x-3| < 1\big\}, \quad \big\{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\big\}, \quad \big\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\big\} = [0,1].$$

1.2 Inclusion, union, intersection, complémentaire

- L'inclusion. $E \subset F$ si tout élément de E est aussi un élément de F. Autrement dit : $\forall x \in E\ (x \in F)$. On dit alors que E est un sous-ensemble de F ou une partie de F.



$A \subset B$

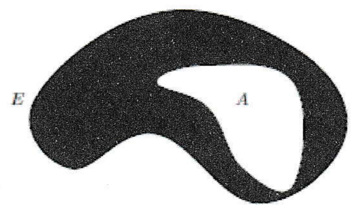
- L'égalité. $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.

- Ensemble des parties de E. On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Par exemple si $E = \{1,2,3\}$:

$$\mathcal{P}(\{1,2,3\}) = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\big\}.$$

- Complémentaire. Si $A \subset E$.

$$\boxed{\complement_E A = \big\{x \in E \mid x \notin A\big\}}$$

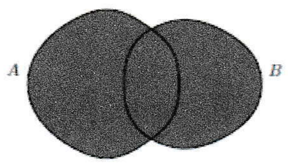


$\complement_E A$

- Union. Pour $A, B \subset E$.

$$\boxed{A \cup B = \Big\{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\Big\}}$$

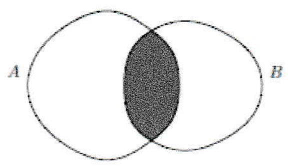
Le *"ou"* n'est pas exclusif : x peut appartenir à A et à B en même temps.



$A \cup B$

- intersection.Pour $A, B \subset E$.

$$\boxed{A \cap B = \Big\{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\Big\}}$$

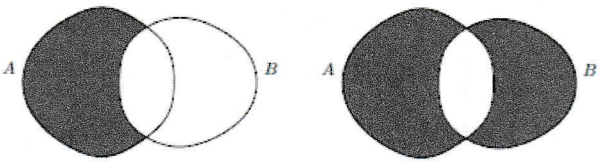


$A \cap B$

- L'ensemble fini On dit que l'ensemble E est fini si nombre d'éléments de E est fini.
  Nombre d'éléments de E s'appelle le cardinal de E noté $Card(E)$
  Par exemple si $E = \{0, 1, 2, 3, 5, 7\}$
  donc $Card(E) = 6$
  $\mathbb{N}$ n'est pas un ensemble fini.
  $Card(\emptyset) = 0$.

- $A \setminus B$ l'ensemble $\left\{x \in A \mid x \notin B\right\}$ et on l'appelle différence de A et B.

- $A \triangle B$ l'ensemble $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$ et on l'appelle différence symétrique A et B.



$A \setminus B$ $\qquad$ $A \Delta B$

Proposition 1.1 *Soient A, B, C des parties d'un ensemble E.*

- $A \cap B = B \cap A$ *et* $A \cup B = B \cup A$ *(commutativité)*
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ *et* $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ *(associativité)*
- $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ *et* $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*(distributivité)*
- $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$ *et* $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ *(loi de Morgan)*
- $\complement_E \left(\complement_E A\right) = A$

Preuve 1.1

- *Preuve de* $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$: $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A$ *et* $x \in (B \cup C) \iff x \in A$ *et* $(x \in B$ *ou* $x \in C) \iff (x \in A$ *et* $x \in B)$ *ou* $(x \in A$ *et* $x \in C) \iff (x \in A \cap B)$ *ou* $(x \in A \cap C) \iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$.

- *Preuve de* $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$: $x \in \complement_E (A \cap B) \iff x \notin (A \cap B) \iff \overline{\left(x \in A \cap B\right)} \iff \overline{\left(x \in A \text{ et } x \in B\right)} \iff \overline{(x \in A)}$ *ou* $\overline{(x \in B)} \iff x \notin A$ *ou* $x \notin B \iff x \in \complement_E A \cup \complement_E B$.

1.3 Produit cartésien

Soient E et F deux ensembles.
Le produit cartésien, noté $E \times F$, est l'ensemble des couples (x, y) où $x \in E$ et $y \in F$.

$$\boxed{E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}.}$$

Exemple 1.1 $E = \{1, 2\}$ *et* $F = \{3, 5\}$ *alors*

$$E \times F = \{(1,3), (1,5), (2,3), (2,5)\}.$$

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}.$$

2 Relations d'équivalence-Relations d'ordre

2.1 Relations binaires

Définition 2.1 *On appelle relation binaire, toute assertion entre deux objets, pouvant être vérifiée ou non. On note xRy et on lit $\ll$ x est en relation avec y $\gg$.*

2.2 Relation d'équivalence

Définition 2.2 *Soit R une relation binaire dans un ensemble E et x, y, z des éléments de E, R est dite*

♣ *Réflexive si : xRx c'est à dire chaque élément est en relation avec lui même.*

♣ *Symétrique si : $xRy \Longrightarrow yRx$. Si x est en relation avec y alors y est en relation avec x.*

♣ *Transitive si : $[xRy \text{ et } yRz] \Longrightarrow xRz$. Si x est en relation avec y et y en relation avec z alors x est en relation avec z.*

♣ *Anti-symétrique si : $[xRy \text{ et } yRx] \Longrightarrow x = y$. Si deux éléments sont en relation l'un avec l'autre, ils sont égaux.*

La relation R est une relation d'équivalence si elle est à la fois réflexive, symétrique et transitive. Dans ce cas, on appelle classe d'équivalence d'un élément x de E, l'ensemble des éléments de E en relation avec x par R, notée $\dot{x}$ ou $cl(x)$ ou bien $C(x)$:

$$\boxed{\dot{x} = \{y \in E \mid yRx\}.}$$

La classe d'équivalence $\dot{x}$ est non vide car R est réflexive et contient de ce fait au moins x. On notera par

$$\boxed{E/R = \{\dot{x} \mid x \in E\}.}$$

L'ensemble des classes d'équivalence de E par la relation R. (ou l'ensemble quotient de E par la relation d'équivalence R)

Exemple 2.1 *Dans $\mathbb{R}$ on définit la relation R par :*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} \quad xRy \Longleftrightarrow x^2 = y^2$$

Montrer que R est une relation d'équivalence et donner l'ensemble quotient $\mathbb{R}/R$

- *R est une relation d'équivalence.*

★ *R est une relation réflexive,car*
$\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 = x^2$ *donc*

$$\forall x \in \mathbb{R},\ xRx$$

ce qui montre que R est une relation réflexive.
★ *R est une relation Symétrique, car*

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{R},\ (xRy) &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Longleftrightarrow y^2 = x^2 \\ &\Longleftrightarrow yRx \end{aligned}$$

★ *R est une relation Transitive, car*

$$\begin{aligned} \forall x, y, z \in \mathbb{R},\ (xRy) \wedge (yRz) &\Longrightarrow x^2 = y^2\ \wedge y^2 = z^2 \\ &\Longrightarrow x^2 = z^2 \\ &\Longrightarrow xRz \end{aligned}$$

ce qui montre que R est une relation Transitive. on déduit que R est une relation d'équivalence.

- *Déterminer l'ensemble quotient $\mathbb{R}/R$*

Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \qquad xRy &\Longleftrightarrow x^2 = y^2 \\ &\Longleftrightarrow (y = x)\ \vee\ (y = -x) \end{aligned}$$

donc : $\dot{x} = \{x, -x\}$, par suite

$$\mathbb{R}/R = \{\{x, -x\}\}$$

2.3 Relation d'ordre

Définition 2.3 *Une relation R sur E est dite relation d'ordre si elle est antisymétrique, transitive et réflexive.*

Exemple 2.2 *Soit R la relation définie sur $\mathbb{N}^*$ par la relation $\ll x$ divise $y \gg$. Vérifions qu'elle est antisymétrique*

$$\begin{aligned} xRy &\iff \exists k \in \mathbb{N}^* \quad : y = kx \\ yRx &\iff \exists k' \in \mathbb{N}^* \quad : x = k'y \end{aligned}$$

il vient que $kk' = 1$, comme k et $k' \in \mathbb{N}^*$, alors $k = k' = 1$ c'est-à-dire $x = y$.

2.3.1 L'ordre total et l'ordre partiel

Définition 2.4 *Soit R une relation d'ordre définie sur un ensemble E, alors si pour tout $x, y \in E$, on a ou bien xRy ou yRx, on dira que l'ordre est total, si non c'est à dire*

$$\exists \alpha, \beta \in E \text{ tel que on a ni } \alpha R \beta \text{ ni } \beta R \alpha$$

alors R est un ordre partiel.

Exemple 2.3 *Soit R une relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par:*

$$pRq \iff \exists n \in \mathbb{N}^* \text{tel que} \quad p^n = q$$

R est un ordre partiel car:

$$\text{pour } \alpha = 2 \text{ et } \beta = 3 \text{ ni } \alpha R \beta \text{ ni } \beta R \alpha$$

3 Applications

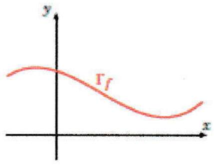
Définition 3.1 *On appelle Fonctions d'un ensemble E dans un ensemble F, toute correspondance f entre les éléments de E et ceux de F.*
Domaine de définition de f : *noté D_f l'ensemble des éléments $x \in E$ fait correspondre un unique élément $y \in F$ noté $f(x)$.*
$y = f(x)$ est appelé image de x et x est un antécédant de y.
E est appelé ensemble de départ et F l'ensemble d'arrivée de l'application f.
On écrit

$$f\ : E \longrightarrow F$$

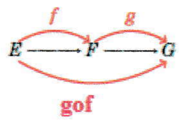
$$x \longmapsto f(x)$$

Définition 3.2 *L'application est une fonctions d'un ensemble E dans un ensemble F,tel que $D_f = E$*

- Égalité. Deux applications $f, g : E \to F$ sont égales si et seulement si pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$. On note alors $f = g$.
- graphe de $f : E \to F$ est $\boxed{\Gamma_f = \Big\{\big(x, f(x)\big) \in E \times F \mid x \in E\Big\}}$



- Composition. Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ alors $g \circ f : E \to G$ est l'application définie par $g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$.



Exemple 3.1 *1. L'identité, $id_E : E \longrightarrow E$ est simplement définie par $x \longrightarrow x$ et sera très utile dans la suite.*
2. Définissons f, g ainsi

$$f\ :\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow &]0,+\infty[\\ x & \longmapsto & \frac{1}{x} \end{array}, \qquad g\ :\ \begin{array}{ccc}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{x-1}{x+1} \end{array}.$$

Alors $g \circ f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ vérifie pour tout $x \in]0, +\infty[$:

$$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big) = g\left(\tfrac{1}{x}\right) = \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}+1} = \frac{1-x}{1+x} = -g(x).$$

3.1 Restriction et prolongement d'une application

Définition 3.3 *Etant donnée une application $f : E \longrightarrow F$*
1- *On appelle restriction de f à un sous ensemble non vide X de E, l'application $g : X \longrightarrow F$ telle que*

$$\forall x \in X, \quad g(x) = f(x)$$

On note $g = f_{|X}$.
2- *Etant donné un ensemble G tel que $E \subset G$, on appelle prolongement de l'application f à l'ensemble G, toute application h de G dans F telle que f est la restriction de h à E.*
D'après cette définition, f est un prolongement de $f_{|X}$ à E.

Exemple 3.2 *Etant donnée l'application*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}.$$

alors

$$\begin{array}{rccc} g : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln|x| \end{array}, \qquad \begin{array}{rccc} h : & \mathbb{R}^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln(2|x| - x) \end{array}.$$

sont deux prolongements différents de f à $\mathbb{R}^*$.

3.2 Image directe, image réciproque

Soient E, F deux ensembles.

Définition 3.4 *Soit $A \subset E$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image directe de A par f est l'ensemble*

$$\boxed{f(A) = \{f(x) \mid x \in A\}}$$

Définition 3.5 *Soit $B \subset F$ et $f : E \longrightarrow F$, l'image réciproque de B par f est l'ensemble*

$$\boxed{f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$$

4 Injection, surjection, bijection

4.1 Injection, surjection

Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

Définition 4.1 *f est injection si pour tout $x, x' \in E$ avec $f(x) = f(x')$ alors $x = x'$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall x, x' \in E \quad \big(f(x) = f(x') \implies x = x'\big)}$$

Définition 4.2 *f est surjection si pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Exemple 4.1 *1. Soit $f_1 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Q}$ définie par $f_1(x) = \frac{1}{1+x}$.*
Montrons que f_1 est injective : soit $x, x' \in \mathbb{N}$ tels que $f_1(x) = f_1(x')$.
Alors $\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+x'}$, donc $1 + x = 1 + x'$ et donc $x = x'$.
Ainsi f_1 est injective.
Par contre f_1 n'est pas surjective. Il s'agit de trouver un élément y qui n'a pas d'antécédent par f_1. Ici il est facile de voir que l'on a toujours $f_1(x) \leq 1$ et donc par exemple $y = 2$ n'a pas d'antécédent.
Ainsi f_1 n'est pas surjective.

2. Soit $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$ définie par $f_2(x) = x^2$.
Alors f_2 n'est pas injective.
En effet on peut trouver deux éléments $x, x' \in \mathbb{Z}$ différents tels que $f_2(x) = f_2(x')$.
Il suffit de prendre par exemple $x = 2$, $x' = -2$.
f_2 n'est pas non plus surjective, en effet il existe des éléments $y \in \mathbb{N}$ qui n'ont aucun antécédent. Par exemple $y = 3$: si $y = 3$ avait un antécédent x par f_2, nous aurions $f_2(x) = y$, c'est-à-dire $x^2 = 3$, d'où $x = \pm\sqrt{3}$.
Mais alors x n'est pas un entier de $\mathbb{Z}$.
Donc $y = 3$ n'a pas d'antécédent et f_2 n'est pas surjective.

4.2 Bijection

Définition 4.3 *f est bijective si elle injective et surjective. Cela équivaut à : pour tout $y \in F$ il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Autrement dit :*

$$\boxed{\forall y \in F \quad \exists \textit{ unique } x \in E \quad \big(y = f(x)\big)}$$

Proposition 4.1 *Soit E, F des ensembles et $f : E \longrightarrow F$ une application.*

1. *L'application f est bijective si et seulement si il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $f \circ g = id_F$ et $g \circ f = id_E$.*
2. *Si f est bijective alors l'application g est unique et elle aussi est bijective. L'application g s'appelle la bijection réciproque (ou l'application réciproque) de f et est notée f^{-1}. De plus $(f^{-1})^{-1} = f$.*

Remarque 4.1

- *$f \circ g = id_F$ se reformule ainsi*

$$\forall y \in F \quad f\big(g(y)\big) = y.$$

- *Alors que $g \circ f = id_E$ s'écrit :*

$$\forall x \in E \quad g\big(f(x)\big) = x.$$

- *Par exemple $f : \mathbb{R} \longrightarrow]0, +\infty[$ définie par $f(x) = \exp(x)$ est bijective, sa bijection réciproque est $g :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $g(y) = \ln(y)$.*
  Nous avons bien $\exp\big(\ln(y)\big) = y$, pour tout $y \in]0, +\infty[$ et $\ln\big(\exp(x)\big) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Proposition 4.2 *Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \to G$ des applications bijectives. L'application $g \circ f$ est bijective et sa bijection réciproque est*

$$\boxed{(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}}$$

Exercice 2.1

Montrer par contraposition la assertion suivante, E étant un ensemble :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \cap B = A \cup B) \Longrightarrow A = B$

Exercice 2.2

Soit A, B deux ensembles, montrer $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$ et $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.

Exercice 2.3

Soient E et F deux ensembles, $f : E \longrightarrow F$. Démontrer que :
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad (A \subset B) \Longrightarrow (f(A) \subset f(B))$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(E) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$,
$\forall A, B \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$,
$\forall A \in \mathcal{P}(F) \quad f^{-1}(F \setminus A) = E \setminus f^{-1}(A)$.

Exercice 2.4

Dans $\mathbb{C}$ on définit la relation $\mathcal{R}$ par :

$$z\mathcal{R}z' \Longleftrightarrow |z| = |z'|.$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Déterminer la classe d'équivalence de $z \in \mathbb{C}$.

Exercice 2.5

Soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(x) = 3x+1$ et $g(x) = x^2-1$. A-t-on $f \circ g = g \circ f$?

Exercice 2.6

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?

2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$.

Exercice 2.7

Soit $f : [1, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$ telle que $f(x) = x^2 - 1$. f est-elle bijective ?