Exo N°1

1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $\lambda_1 = -1$, $V_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\lambda_2 = 5$, $V_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ $\varphi = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $\varphi^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ alors $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \varphi D^n \varphi^{-1} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$

d'où $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n x_0 - \frac{1}{3}(-1)^n y_0 + \frac{1}{3}5^n x_0 + \frac{1}{3}5^n y_0 \\ \frac{1}{3}(-1)^n y_0 - \frac{2}{3}(-1)^n x_0 + \frac{2}{3}5^n x_0 + \frac{2}{3}5^n y_0 \end{pmatrix}$

le point fixe est instable.

Exo N°2

$\begin{cases} x_{n+1} = x_n^2 + 2y_n \\ y_{n+1} = y_n^2 + 3x_n^2 \end{cases}$

~~1) ...~~

1) $(0,0)$ est un point fixe

2) $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & 2 \\ 6x & 2y \end{pmatrix}$ alors $J_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

alors les valeurs propres de $J_{(0,0)}$ sont $\lambda_{1,2} = 0$ alors $(0,0)$ est un point attractif

Exo N = 3

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + y_n^2 - 2 \\ y_{n+1} = x_n^2 - x_n - y_n^3 \end{cases}$$

1) $f(1,1) = (1, -1)$, $f(1,-1) = (1,1)$

Alors $(1,1)$ est un 2 périodique de l'orbite $\{(1,1), (1,-1)\}$

2) $J_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2 & 2y \\ 2x-1 & 3y^2 \end{pmatrix}$

$J_{(1,1)} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ $J_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

$J_{(1,1)} J_{(1,-1)} = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$

les valeurs propres sont

$\lambda_1 = \frac{1}{2}\sqrt{41} + \frac{13}{2}$, $\lambda_2 = \frac{13}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{41}$

$|\lambda_1| > 1$ et $|\lambda_2| > 1$ alors

l'orbites ~~deux~~ 2 périodique

$\{(-1,1), (1,-1)\}$ est répulsive