Exercice 01

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère les fonctions e_1, e_2, e_3, f_1, f_2 et g définies par :

$$e_1(x) = 1, \quad e_2(x) = \cos 2x, \quad e_3(x) = \cos 4x, \quad f_1(x) = \sin^2(x), \quad f_2(x) = \cos^2 2x, \quad g(x) = \cos^2 x.$$

On note $E = \text{Vect}(e_1, e_2, e_3)$, $F = \text{Vect}(f_1, f_2)$ et $G = \text{Vect}(g)$.

1. Montrer que $F \subset E$ et $G \subset E$.

2. Déterminer les dimensions de E, F et G.

3. Montrer que $E \oplus G$.

Solution

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ on a,

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 2x = \frac{1 + \cos 4x}{2} \quad \text{et} \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2},$$

d'où

$$f_1 = \frac{e_1}{2} - \frac{e_2}{2}, \quad f_2 = \frac{e_1}{2} + \frac{e_3}{2} \quad \text{et} \quad g = \frac{e_1}{2} + \frac{e_2}{2},$$

ce qui prouve que $\{f_1, f_2\} \subset E$ et $g \in E$, par suite $F \subset E$ et $G \subset E$.

2. Soient α, β et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha + \beta \cos 2x + \gamma \cos 4x = 0$. En prenant $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$ et $x = \frac{\pi}{8}$ dans l'équation précédente on obtient le système :

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma & = & 0 \\ \alpha + \beta\dfrac{\sqrt{2}}{2} & = & 0 \\ \alpha - \gamma & = & 0 \end{cases}$$

ce qui donne $\alpha = \beta = \gamma = 0$. D'où $\{e_1, e_2, e_3\}$ est une patrie libre de E, étant de plus une partie génératrice de E, elle en est une base et donc, $\dim E = 3$.

Soient α et $\beta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha f_1 + \beta f_2 3 = 0$, alors $\forall x \in \mathbb{R}$, $\alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 2x = 0$. En prenant $x = 0$ et $x = \frac{\pi}{4}$ dans l'équation précédente on obtient $\beta = 0$ et $\alpha = 0$ respectivement. $\{f_1, f_2\}$ est donc une famille libre de F, étant de plus une famille génératrice de F, elle en est une base et donc, $\dim F = 2$. $\{g\}$ est une famille génératrice de G, elle est de plus libre car $g \neq 0$, elle est doncune base de G, d'où $\dim G = 1$.

3. On a $\{f_1, f_2, g\}$ est une partie génératrice de $F + G$, montrons qu'elle est libre. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que $\alpha f_1 + \beta f_2 + \gamma g = 0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}$, alors $\forall x \in \mathbb{R} : \alpha \sin^2 x + \beta \cos^2 2x + \gamma \cos^2 x = 0$. En prenant $x = 0$,

$x = \dfrac{\pi}{4}$ et $x = \dfrac{\pi}{2}$, on obtient le système

$$\begin{cases} \beta + \gamma &= 0 \\ \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\gamma}{2} &= 0 \\ \alpha + \beta &= 0 \end{cases}$$

i.e

$$\begin{cases} \beta &= -\gamma \\ \alpha &= -\gamma \\ -2\gamma &= 0 \end{cases}$$

d'où $\alpha = \beta = \gamma = 0$. La famille $\{f_1, f_2, g\}$ est donc famille libre de $F + G$, étant de plus une famille génératrice de $F + G$, elle en est une base, donc $\dim(F + G) = 3$. D'autre part, puisque $F \subset E$ et $G \subset E$, alors $F + G \subset E$ et comme $\dim(F + G) = \dim E$, on obtient donc $F + G = E$. De plus, on sait que

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G),$$

qui donne $\dim(F \cap G) = 0$, c'est-à-dire $F \cap G = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})}\}$, ce qui achève de prouver que $E = F \oplus G$.

Exercice 02

Soient $E = \{P \in \mathbb{R}_3[X], P(-1) = 0 \text{ et } P(1) = 0\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.
2. Déterminer une base et la dimension de E.
3. Montrer que $F := \text{Vect}(1, X)$ est un supplémentaire de E.

Solution

1. Soient $P = a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 \in E$. On a alors

$$\begin{cases} a_0 - a_1 + a_2 - a_3 &= 0 \\ a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \end{cases}$$

i. e

$$\begin{cases} a_0 &= -a_2 \\ a_1 &= - + a_3. \end{cases}$$

D'où

$$\begin{aligned} E &= \{-a_2 - a_3X + a_2X^2 + a_3X^3 \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{a_2(-1 + X^2) + a_3(-X + X^3) \mid a_2, a_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \text{Vect}\{-1 + X^2, -X + X^3\}. \end{aligned}$$

Comme $\{-1+X^2, -X+X^3\} \subset \mathbb{R}_3[X]$, alors E est un sous espace vectoriel de $\mathbb{R}_3[X]$.

2. La famille $\{-1+X^2, -X+X^3\}$ est une famille génératrice de E et puisque les polynôme $-1+X^2$ et $-X+X^3$ ont des degrés différent, alors elle est libre, donc elle est une base de E et $\dim E = 2$.

3. Puisque Les vecteurs 1 et X ont des degrés différents, alors $\{1, X\}$ est une base de F. Par suite

$$E + F = \text{Vect}\{1, X, -1+X^2, -X+X^3\}.$$

Mais les vecteurs de la famille $\{1, X, -1+X^2, -X+X^3\}$ ont des degrés différents, donc $\{1, X, -1+X^2, -X+X^3\}$, d'où $\dim(E+F) = 4 = \dim \mathbb{R}_3[X]$. Par suite $E+F = \mathbb{R}_3[X]$. D'autre part, on sait que

$$4 = \dim(E+F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F) = 2 + 2 - \dim(E \cap F),$$

alors $E \cap F = \{0\}$, donc $E \oplus F = \mathbb{R}_3[X]$.