

Méthode des volumes finis

1 Principe de la méthode

La méthode des volumes finis consiste à diviser le domaine de calcul en un nombre de volumes de contrôles entourant les nœuds du maillage, les équations aux dérivées partielles sont alors intégrées sur chaque volume de contrôle. Le résultat de la discrétisation en un point est une équation algébrique liant sa valeur de la variable ϕ aux valeurs des variables des points adjacents. De cette manière le caractère conservatif des équations est préservé.

2 Maillage

Le domaine d'étude est divisé en un certain nombre de volumes de contrôles de telle façon qu'il soit entièrement recouvert par eux (Figure 1). Chaque volume de contrôle de dimension $\Delta x.\Delta y.1$, doit conserver les grandeurs scalaires P et T dans le nœud du maillage (P) qui se situe au centre du volume de contrôle et les grandeurs vectorielles U et V au milieu des segments reliant les deux nœuds adjacents. Ces quatre faces sont repérées à l'aide des quatre points, cardinaux e, w, n, s et les centres des volumes adjacents par E, W, N, S.

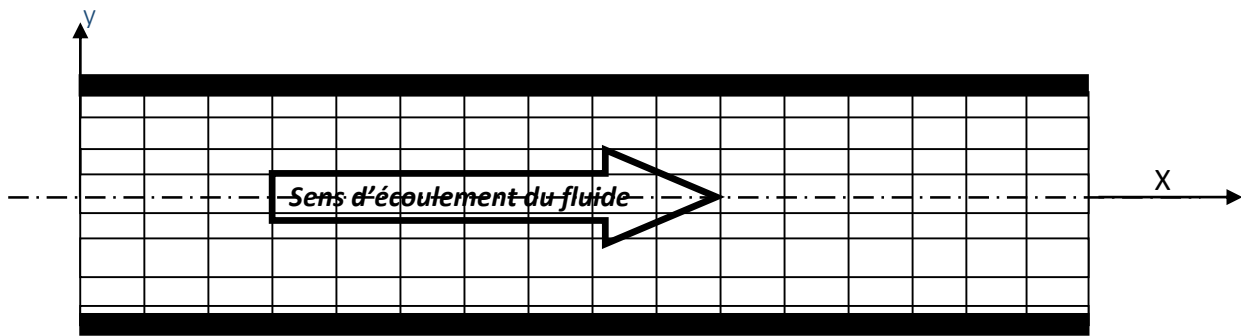


Figure 1 Maillage d'une conduite.

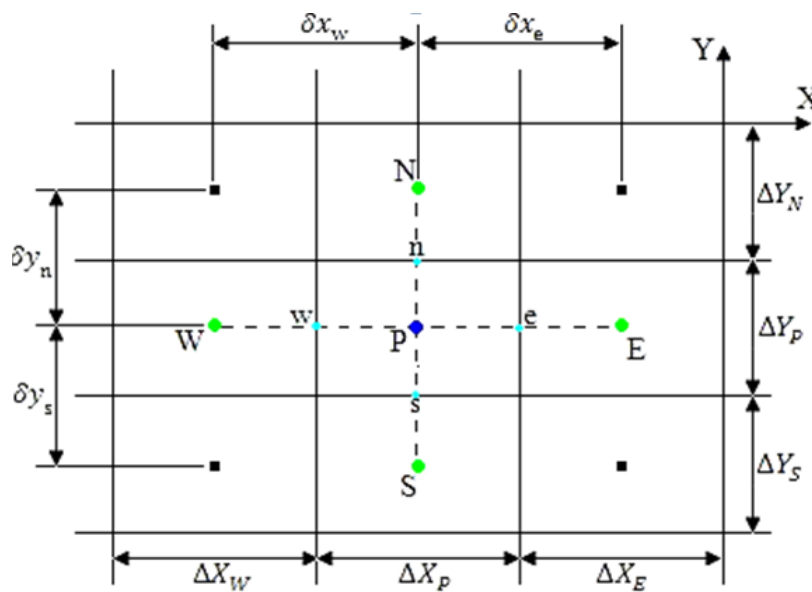


Figure 2 Volume de contrôle typique

Ce volume de contrôle est utilisé pour l'expression des bilans des grandeurs scalaires, appelé volume de contrôle typique (Figure 2), et pour l'expression des grandeurs vectorielles, le volume de contrôle décalé (Figure 3 a et b) est utilisé pour les avantages suivants :

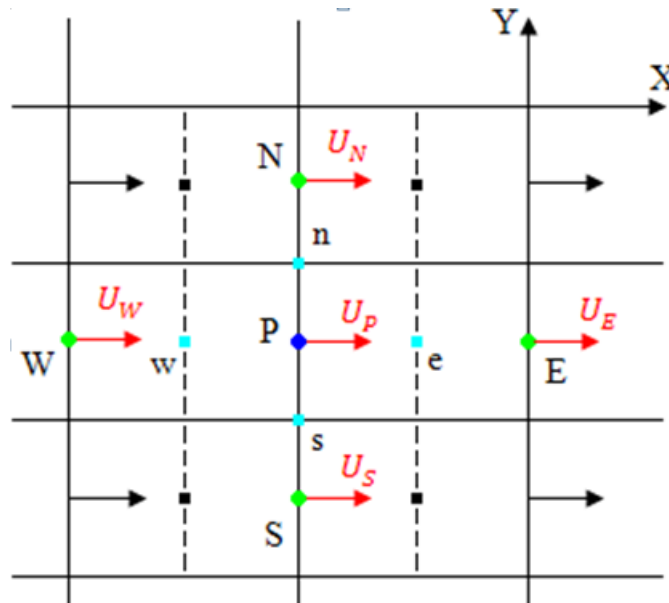


Figure 3a Volume de contrôle décalé.

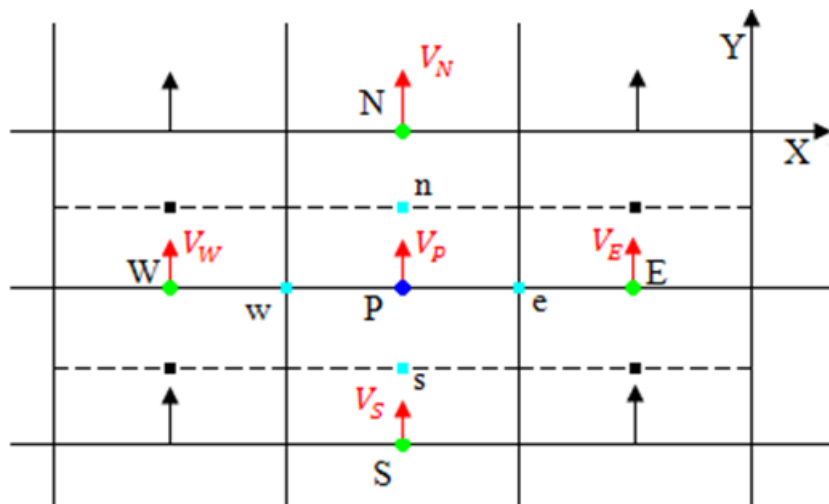


Figure 3b Volume de contrôle décalé.

- Une localisation des vitesses apportant une bonne estimation des flux convectifs dans les bilans des grandeurs scalaires.
- Une localisation de la pression permettant une bonne estimation de la force de pression dans l'équation de quantité de mouvement.

2.1 Procédure d'élaboration d'un maillage structuré à pas constant

- 1- Définir les dimensions du volume de contrôle Δx et Δy
- 2- Déterminer les distances entre les nœuds notés dx et dy

Exemple

Elaborer un maillage régulier dans le domaine d'étude représenté par une barre de longueur L. Prendre $n = 5$.

Solution

On commence par déterminer la longueur Δx du volume de contrôle,

On pose

$$\Delta x(1) = 0 \tag{1}$$

Pour $i = 2,3,4,\dots,n-1$

$$\Delta x(i) = \frac{L}{n-2} \tag{2}$$

et

$$\Delta x(n) = 0 \tag{3}$$

Comme les nœuds sont positionnés au centre des volumes de contrôle, la distance entre les nœuds sera déterminée à l'aide de la relation suivante :

$$dx(i) = \frac{\Delta(i+1)+\Delta(i)}{2} \text{ avec } i = 1,2,3,\dots,n-1 \tag{4}$$

Noter que $dx(n) = 0$

3 Etude numérique de la conduction unidimensionnel stationnaire

L'équation à discrétisé est :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \frac{d^2T}{dx^2} + q = 0 \\ \text{Conditions aux limites} \end{array} \right. \tag{5}$$

Le maillage utilisé est le suivant :

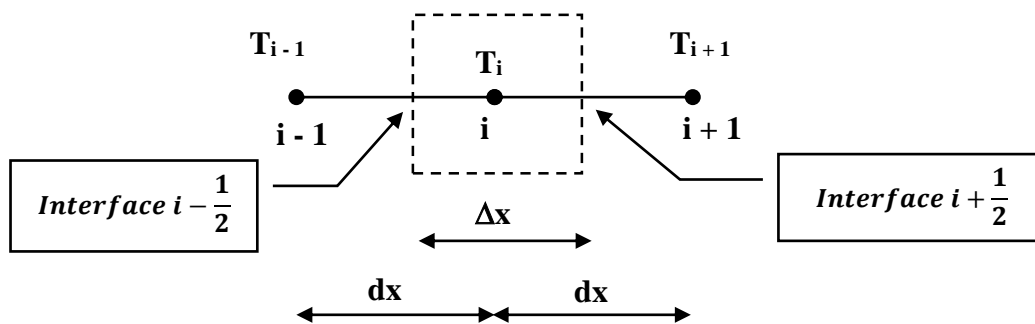


Figure 4 Volume de contrôle

Une notation est généralement utilisé dans la méthode des volumes finis, elle est définit comme suit :

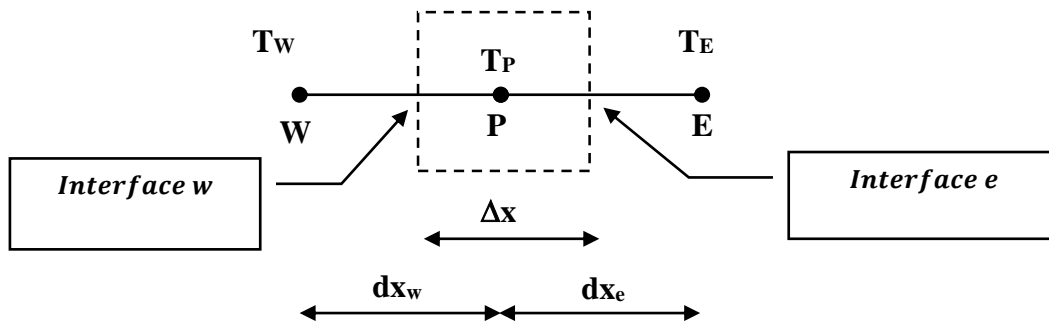


Figure 5 Volume de contrôle

Avec

- P nœud considéré (P pole, centre) $\equiv i$
- W nœud West $\equiv i-1$
- E nœud East $\equiv i+1$
- w interface gauche $\equiv i-1/2$
- e interface droite $\equiv i+1/2$

L'intégration de l'équation du modèle mathématique sur le volume de contrôle présenté dans la figure 5 donne :

$$\int_w^e \left(k \frac{d^2T}{dx^2} + q \right) dx = 0 \tag{6}$$

$$k \int_w^e \frac{d}{dx} \left(\frac{dT}{dx} \right) dx + \int_w^e q dx = 0 \tag{7}$$

$$k \left(\frac{dT}{dx} \Big|_e - \frac{dT}{dx} \Big|_w \right) + q \Delta x = 0 \tag{8}$$

Noter que la chaleur générée à l'intérieur du domaine d'étude q est homogène dans le volume de contrôle.

A ce stade on ne connaît pas les gradients de température aux interfaces w et e, pour évaluer ces gradients on suppose que la température varie linéairement entre W et P et entre P et E.

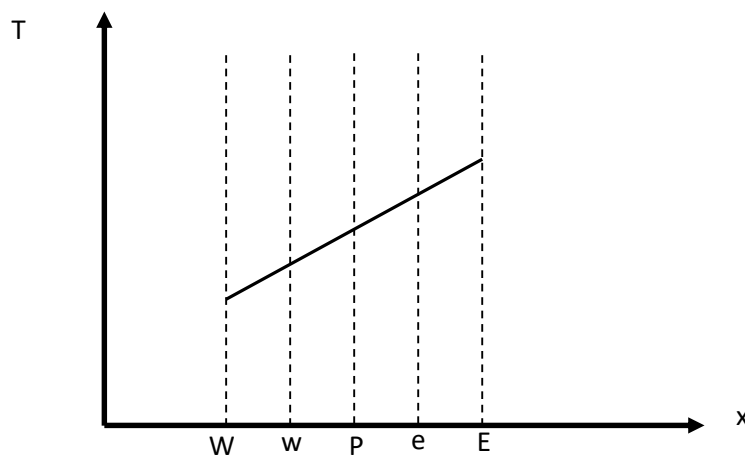


Figure 6 Variation de $T = f(x)$ entre les nœuds W et E.

On peut alors évaluer les gradients aux interfaces comme suit :

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_w = \frac{T_P - T_W}{dx} \quad (9)$$

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_e = \frac{T_E - T_P}{dx} \quad (10)$$

En remplaçant les équations (9) et (10) dans l'équation (8) on obtient :

$$k \left(\frac{T_E - T_P}{dx} - \frac{T_P - T_W}{dx} \right) + q \Delta x = 0 \quad (11)$$

Cette équation peut se mettre sous la forme :

$$A_P \phi_P = A_W \phi_W + A_E \phi_E + S \quad (12)$$

Où

$$A_W = \frac{k}{dx} \quad (13)$$

$$A_E = \frac{k}{dx} \quad (14)$$

$$A_P = \frac{k}{dx} + \frac{k}{dx} = A_W + A_E \quad (15)$$

$$S = q \Delta x \quad (16)$$

4 Problème convection-conduction unidimensionnel

Pour présenter la résolution numérique de l'équation de la Convection-conduction unidimensionnelle stationnaire en coordonnée cartésiennes (x, y) par la méthode des volumes finis, on considère l'exemple suivant :

Soit une propriété ϕ transportée par convection et diffusion à travers le domaine unidimensionnel (figure 8). Les conditions aux limites sont les suivantes :

$$\phi_0 = 1 \text{ à } x = 0 ;$$

$$\phi_L = 0 \text{ à } x = L .$$

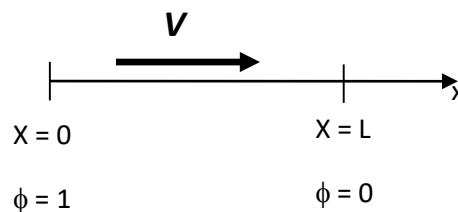


Figure 7 Géométrie du problème.

Le modèle mathématique régissant ce phénomène de transfert de chaleur est :

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(\rho u \phi) = \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) \\ \Phi(0) = 1 \\ \Phi(L) = 0 \end{cases} \quad (19)$$

Noter que :

Le terme du 1^{er} ordre $\frac{d}{dx}(\rho u \phi)$ représente le transfert convectif de la quantité ϕ .

Le terme du 2^{eme} ordre $\frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)$ représente le transfert diffusif de la quantité ϕ .

ϕ est la quantité transportable, elle peut être une température, Concentration....

Γ : Coefficient diffusif

Le volume de contrôle est défini comme suit :

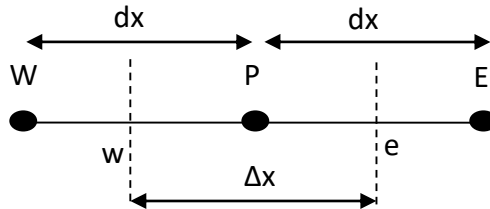


Figure 8 Volume de contrôle.

L'intégration de l'équation du modèle mathématique sur le volume de contrôle présenté dans la figure 8 donne :

$$\int_w^e \frac{d}{dx}(\rho u \phi) dx = (\rho u \phi)_e - (\rho u \phi)_w \quad (20)$$

$$\int_w^e \frac{d}{dx}\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right) dx = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_w \quad (21)$$

On évalue les termes diffusif et convectif aux interfaces. Pour exprimer les gradients diffusif aux interfaces du volume de contrôle, on suppose que le l'évolution de la variable dépendante ϕ est linéaire entre les nœuds du maillage. C'est à dire que :

$$\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_e = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} \quad (22)$$

$$\left(\Gamma \frac{d\phi}{dx}\right)_w = \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \quad (23)$$

Par contre l'évaluation des flux convectif aux interfaces pose problème, pour cela, on présente la notion des schémas de discrétisation numérique.

4.1 Notion des schémas numérique.

On considère donc l'équation de convection-conduction unidimensionnel pour le cas où la vitesse u est constante, fluide incompressible et $\Gamma = \text{cst}$.

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\Gamma}{\rho u} \frac{d^2\phi}{dx^2} \quad (24)$$

Avec les conditions aux limites suivantes :

$$\phi = \phi_0 \text{ à } x = 0 \quad (25)$$

$$\phi = \phi_L \text{ à } x = L \quad (26)$$

Cette équation admet une solution exacte dans le domaine $0 \ll x \ll L$, qui est dans ce cas :

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi - \phi_L} = \frac{e^{\frac{Px}{L}} - 1}{e^P - 1} \quad (27)$$

Où

$P = \frac{\rho u L}{\Gamma}$ est le nombre de Peclet

$$P = \frac{F}{D} = \frac{\text{Transport convectif}}{\text{Transport diffusif}} \quad (28)$$

$$F = \rho u L \quad (29)$$

$$D = \Gamma \quad (30)$$

L'évolution de ϕ le long de x pour différentes valeurs du nombre de Peclet est schématisée dans la figure suivante :

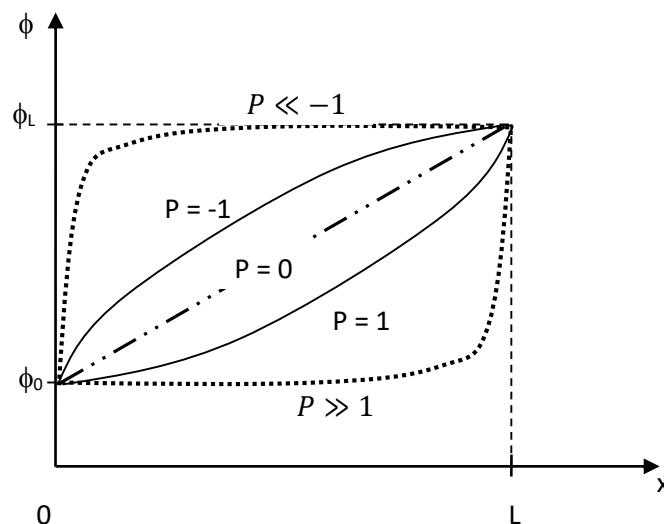


Figure 9 Solution exacte du problème convection-conduction 1D

On constate que :

- Lorsque $P = 0$ dans ce cas $u = 0$ aussi et ϕ varie linéairement.

- $P \gg 1$ influence dominante de ϕ_0 , c'est à dire que $\phi < \phi_0$ dans tout le domaine.
- $P \ll -1$ influence dominante de ϕ_L , c'est à dire que $\phi < \phi_L$ dans tout le domaine.

De ces remarque les flux convectifs seront évalués selon la valeur de la vitesse d'écoulement c'est-à-dire que lorsque u est faible on peut évaluer dans ce cas ϕ par des moyennes arithmétique (schéma des différences), lorsque u est grand ϕ a l'interface restera très proche à la valeur précédente (schéma Upwind).

4.2 Schéma des différences centrées

Reprenons les termes convectifs

$$(\rho u \phi)_e = (\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} \quad (31)$$

$$(\rho u \phi)_w = (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} \quad (32)$$

Donc en regroupement tous les termes, on aura :

$$(\rho u)_e \frac{\phi_E + \phi_P}{2} - (\rho u)_w \frac{\phi_P + \phi_W}{2} = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{\Delta x} - \Gamma_w \frac{\phi_P - \phi_W}{\Delta x} \quad (33)$$

Ce qui mène à :

$$A_P \phi_P = A_W \phi_W + A_E \phi_E + S \quad (34)$$

Avec :

$$A_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (35)$$

$$A_E = D_e - \frac{F_e}{2} \quad (36)$$

$$A_P = A_W + A_E + (F_e - F_w) \quad (37)$$

Et

$$F_w = (\rho u)_w \quad (38)$$

$$F_e = (\rho u)_e \quad (39)$$

$$D_w = \frac{\Gamma_w}{dx} \quad (40)$$

$$D_e = \frac{\Gamma_e}{dx} \quad (41)$$

Remarque

Si l'écoulement vérifie l'équation de continuité

$$\rho u = cst \quad (42)$$

La discrétisation de cette équation donne :

$$(F_e - F_w) = 0 \quad (43)$$

4.3 Schéma UPWIND

Recommander surtout pour les écoulements à vitesse élevée. Pour cela les termes convectifs aux interfaces sont :

Si $u > 0$

$$\phi_w = \phi_W \quad (44)$$

$$\phi_e = \phi_P \quad (45)$$

Si $u < 0$

$$\phi_w = \phi_P \quad (46)$$

$$\phi_e = \phi_E \quad (47)$$

Tenant compte de cela l'équation discrétisée est :

$$A_P \phi_p = A_W \phi_W + A_E \phi_E + S \quad (48)$$

Avec :

$$A_W = D_w + \max[F_w, 0] \quad (49)$$

$$A_E = D_e + \max[-F_e, 0] \quad (50)$$

Et dans le cas où l'écoulement satisfait l'équation de continuité.

$$A_p = A_W + A_E \quad (51)$$

Aussi :

$$F = \rho u \quad (52)$$

$$D = \frac{\Gamma}{dx} \quad (53)$$

5 Problème convection-conduction 2-D

L'équation de transport (équation 60) est intégrée sur le volume de contrôle typique, avec l'évaluation des termes (diffusif, convectif, instationnaire et source) aux interfaces.

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} + \frac{\partial}{\partial X} (U \phi) + \frac{\partial}{\partial Y} (V \phi) = \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) + S_\phi \quad (60)$$

Avec :

$\frac{\partial \phi}{\partial \tau}$ est le terme de temps.

$\frac{\partial}{\partial X} (U \phi) + \frac{\partial}{\partial Y} (V \phi)$ est le terme convectif.

$\frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) + \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right)$ est le terme diffusif.

S_ϕ est le terme source.

Intégrant l'équation de transport sur le volume de contrôle typique (figure 4.2) on aura :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial \phi}{\partial \tau} dx dy d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} (U \phi) dx dy d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y} (V \phi) dx dy d\tau = \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial X} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \right) dx dy d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e \frac{\partial}{\partial Y} \left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \right) dx dy d\tau + \int_t^{t+\Delta t} \int_s^n \int_w^e S_\phi dx dy d\tau \quad (61)$$

En posant :

$$J_x = U\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad (62)$$

$$J_y = V\phi - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad (63)$$

On obtient l'équation suivante après remplacement et intégration :

$$\frac{\phi_p - \phi_p^0}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y + [J_e - J_w] \Delta X + [J_n - J_s] \Delta Y = \bar{S}_\phi \Delta X \Delta Y \quad (64)$$

Avec :

- 1 : correspond au temps « $t + \Delta t$ »
- 0 : correspond au temps « t »
-

$$J_e = U_e \phi_e \Delta Y - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \Delta Y \quad (65)$$

$$J_w = U_w \phi_w \Delta Y - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial X} \Delta Y \quad (65a)$$

$$J_n = U_n \phi_n \Delta Y - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Delta X \quad (65b)$$

$$J_s = U_s \phi_s \Delta Y - \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial Y} \Delta X \quad (65c)$$

On définit les flux convectifs sur les différentes interfaces :

$$\begin{aligned} F_e &= U_e \Delta Y \\ F_w &= U_w \Delta Y \\ F_n &= U_n \Delta X \\ F_s &= U_s \Delta X \end{aligned} \quad (66)$$

Les flux diffusifs :

$$\begin{aligned} D_e &= \frac{\Gamma_e}{\delta X_e} \Delta Y \\ D_w &= \frac{\Gamma_w}{\delta X_w} \Delta Y \\ D_n &= \frac{\Gamma_n}{\delta Y_n} \Delta X \\ D_s &= \frac{\Gamma_s}{\delta Y_s} \Delta X \end{aligned} \quad (66a)$$

définissons les nombres de Péclet correspondants :

$$\begin{aligned} P_e &= \frac{F_e}{D_e} \\ P_w &= \frac{F_w}{D_w} \\ P_n &= \frac{F_n}{D_n} \\ P_s &= \frac{F_s}{D_s} \end{aligned} \quad (66b)$$

L'intégration de l'équation de continuité sur un volume de contrôle (figure 2) donne :

$$\iint_{sw}^{ne} \frac{\partial U}{\partial X} dX dY + \iint_{ws}^{en} \frac{\partial V}{\partial Y} dY dX = (U_e - U_w) \Delta Y_p + (V_n - V_s) \delta x_e = 0 \quad (67)$$

exprimée en flux convectif :

$$F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (68)$$

On multiplie cette dernière équation par la grandeur physique Φ_P et on la soustrait de l'équation (64) on aura :

$$\frac{\phi_p - \phi_p^0}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y + [(J_e - F_e \phi_p) - (J_w - F_w \phi_p)] \Delta X + [(J_n - F_n \phi_p) - (J_s - F_s \phi_p)] \Delta Y = \bar{S}_\phi \Delta X \Delta Y \quad (69)$$

Le problème dans cette équation est de déterminer les flux aux interfaces. Pour cela des schémas d'approximation sont entrepris sous la forme générale suivante :

5.1 Forme générale des schémas d'approximation

Le problème est de déterminer les flux aux interfaces. Pour cela des schémas d'approximation sont entrepris sous la forme générale suivante :

On s'intéresse au flux total J qui traverse l'interface entre les nœuds i et $i+1$

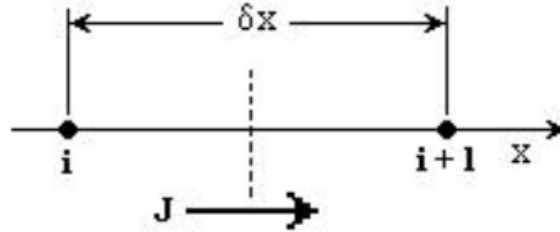


Figure 1 : Schématisation du flux total à l'interface.

La valeur du flux total qui traverse l'interface est donnée par :

$$J = \rho u \Phi - \Gamma \frac{d\Phi}{dx} \quad (70)$$

On pose la forme adimensionnelle :

$$J^* = \frac{J \delta x}{\Gamma} = \frac{\rho u \Phi \delta x}{\Gamma} - \frac{d\Phi}{d(x/\delta x)} = P\Phi - \frac{d\Phi}{d(x/\delta x)} \quad (71)$$

Où : P est le nombre de Peclet, $\rho u \delta x / \Gamma$

Si l'on considère que le flux à l'interface est une moyenne pondérée entre Φ_i et Φ_{i+1} :

$$\Phi_{\text{int erf}} = \alpha \Phi_i + (1 - \alpha) \Phi_{i+1} \quad (72)$$

et le gradient de Φ est proportionnel à $(\Phi_{i+1} - \Phi_i)$:

$$\frac{d\Phi}{d(x/\delta x)} = \beta (\Phi_{i+1} - \Phi_i) \quad (73)$$

alors le flux total peut être écrit ainsi :

$$J^* = P(\alpha \Phi_i + (1 - \alpha) \Phi_{i+1}) - \beta (\Phi_{i+1} - \Phi_i) = (P\alpha + \beta) \Phi_i - (P(\alpha - 1) + \beta) \Phi_{i+1} \quad (74)$$

Le flux total J^* peut être écrit sous la forme générale :

$$J^* = B\Phi_i - A\Phi_{i+1} \quad (75)$$

où: $A = (\alpha - 1)P + \beta$ et $B = \alpha P + \beta$ sont des coefficients sans dimension en fonction de P .

Propriétés de A et B

1. Si $\Phi_i = \Phi_{i+1}$, de la relation (73), on peut tirer la conclusion que le flux de diffusion est nul, et donc :

$$J^* = P\Phi = P\Phi_i = P\Phi_{i+1} \tag{76}$$

À partir de la relation (74) on obtient :

$$J^* = (B - A)\Phi_i = (B - A)\Phi_{i+1} \tag{77}$$

En combinant les relations (76) et (77) on obtient :

$$B = A + P \tag{78}$$

2. Si P devient $-P$, alors A et B changent de rôle, c'est à dire :

$$A(-P) = B(P) \quad \text{ou} \quad B(-P) = A(P) \tag{79}$$

Les conséquences des propriétés

Le schéma exponentiel donne :

$$J_e = F_e \left(\Phi_P + \frac{\Phi_P - \Phi_E}{\exp(P_e) - 1} \right) = \left(\frac{F_e \exp(P_e)}{\exp(P_e) - 1} \right) \Phi_P - \left(\frac{F_e}{\exp(P_e) - 1} \right) \Phi_E \tag{80}$$

Le flux total J^* est donc :

$$J_e^* = \frac{J_e \delta x_e}{\Gamma} = \underbrace{\left(\frac{P_e \exp(P_e)}{\exp(P_e) - 1} \right)}_{B(P_e)} \Phi_P - \underbrace{\left(\frac{P_e}{\exp(P_e) - 1} \right)}_{A(P_e)} \Phi_E \tag{81}$$

A la figure ci-dessous sont représentées les variations exactes de $A(P)$ et $B(P)$.

Les fonctions $A(P)$ et $B(P)$ sont connues pour $-\infty < P < \infty$ dès que $A(P)$ est connue pour $P \geq 0$. En effet pour $P < 0$ on a:

$$\begin{aligned} A(P) &= B(P) - P \\ &= A(-P) - P \\ &= A(|P|) - P \end{aligned} \tag{82}$$

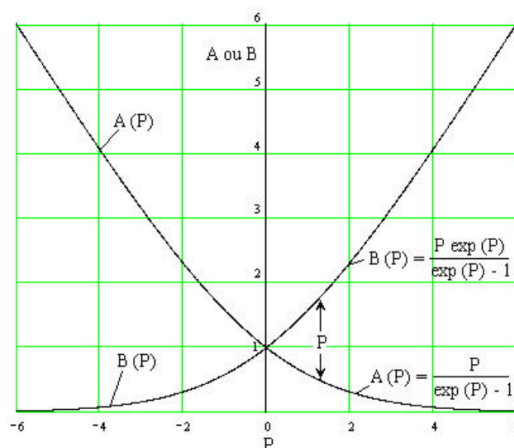


Figure 2 : Variation de A et B en fonction du nombre de Péclet.

Pour toutes les valeurs de P , c'est-à-dire $\forall P \in (-\infty, \infty)$ on peut écrire :

$$A(P) = A(|P|) + [-P, 0] \quad (83)$$

$$B(P) = A(|P|) + [P, 0] \quad (84)$$

En tenant compte que ;

$$J^* = J \frac{\delta x}{\Gamma} = \frac{J}{D} \quad (85)$$

L'équation de convection-diffusion 1D stationnaire discrétisée (5.26) devient :

$$D_e J_e^* - D_w J_w^* = 0 \quad (86)$$

En tenant compte de la relation (5.49), l'équation (5.60) devient :

$$D_e (B_e \Phi_P - A_e \Phi_E) - D_w (B_w \Phi_W - A_w \Phi_P) = 0 \quad (87)$$

En regroupant les termes, on obtient :

$$(D_e B_e + D_w B_w) \Phi_P = (D_e A_e) \Phi_E + (D_w A_w) \Phi_W \quad (88)$$

ou

$$a_P \Phi_P = a_W \Phi_W + a_E \Phi_E \quad (89)$$

Les coefficients de l'équation (5.63), en tenant compte de relations (5.57) et (5.58), sont les suivants :

$$a_W = D_w A(|P_w|) + [F_w, 0] \quad a_E = D_e A(|P_e|) + [-F_e, 0] \quad (90)$$

$$a_P = a_E + a_W + (F_e - F_w) \quad (91)$$

Tous les schémas peuvent donc s'écrire sous la forme unique (5.63) avec les coefficients (5.64) et (5.65) où les coefficients $A(|P|)$, pour les différents schémas, sont obtenus par identification entre les relations ci-dessus et les relations du tableau 5.1. Ces coefficients sont présentés au tableau

L'équation (94) peut se mettre sous la forme :

$$A_P \Phi_P = A_E \Phi_E + A_W \Phi_W + A_N \Phi_N + A_S \Phi_S + b \quad (95)$$

Avec :

$$A_E = D_e A(|P_e|) + \text{Max}(-F_e, 0) \quad (96)$$

$$A_W = D_w A(|P_w|) + \text{Max}(F_w, 0) \quad (96a)$$

$$A_N = D_n A(|P_n|) + \text{Max}(-F_n, 0) \quad (96b)$$

$$A_S = D_s A(|P_s|) + \text{Max}(F_s, 0) \quad (96c)$$

$$b = \bar{S}_\emptyset + \frac{\emptyset^0}{\Delta \tau} \Delta X \Delta Y \quad (97)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + (F_e - F_w + F_n - F_s) + \frac{\Delta X \Delta Y}{\Delta \tau} \quad (98)$$

Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numérique.

Le Tableau suivant donne les expressions de la fonction pour différents schémas numériques.

SCHEMAS	$A(P)$
Différence centrée	$1-0.5 P$
Upwind	1
Hybrid	$\text{Max}[1,1-0.5 P]$
Power-law	$\text{Max}[1,(1-0.5 P)^5]$
Exponentiel	$\frac{ A }{[\exp(P)-1]}$

Tableau 3.2 Fonction $A(|P|)$ pour différents schémas numérique.

Traitement du couplage vitesse/pression « Algorithme SIMPLER »

Les composantes des équations des quantités de mouvement sont couplées avec la pression qui agit par les composantes de son gradient, seulement nous ne disposons pas d'équation propre à cette variable.

L'équation de quantité de mouvement suivant « x » est :

$$U \frac{\partial U}{\partial X} + V \frac{\partial U}{\partial Y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} + \nu \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) \quad (1)$$

L'équation de mouvement suivant « y »

$$U \frac{\partial V}{\partial X} + V \frac{\partial V}{\partial Y} = \frac{-1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} + \nu \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) \quad (2)$$

1. Discrétisation des équations :

Dans tout ce qui suit, on utilise pour discrétiser les convectifs le schéma des différences centrées.

1.1 Équations de continuité :

L'intégration de l'équation de continuité sur un volume de contrôle (figure 4.2) donne :

$$\iint_{sw}^{ne} \frac{\partial U}{\partial X} dXdY + \iint_{ws}^{en} \frac{\partial V}{\partial Y} dYdX = (U_e - U_w)\Delta Y_p + (V_n - V_s)\delta x_e = 0 \quad (3)$$

1.2 Équation de quantité de mouvement suivant « X »

En intégrant l'équation (1) à travers le volume de contrôle représenté dans la figure (4.3-a) on obtient:

$$\iint_{sw}^{ne} \frac{\partial U}{\partial X} U dXdY = \left[U_e \left(\frac{U_E + U_P}{2} \right) - U_w \left(\frac{U_P + U_W}{2} \right) \right] \Delta Y_P \quad (4)$$

$$\iint_{ws}^{en} \frac{\partial U}{\partial Y} V dYdX = + \left[V_n \left(\frac{U_N + U_P}{2} \right) - V_s \left(\frac{U_P + U_S}{2} \right) \right] \delta x_e \quad (5)$$

$$\iint_{sw}^{ne} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial X} dXdY = \frac{1}{\rho} (P_P - P_E) \Delta Y_P \quad (6)$$

$$v \iint_{sw}^{ne} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial Y^2} \right) dXdY = v \left(\frac{U_E - U_P}{\Delta X_E} - \frac{U_P - U_W}{\Delta X_P} \right) \Delta Y_P + v \left(\frac{U_N - U_P}{\delta y_n} - \frac{U_P - U_S}{\delta y_s} \right) \delta x_e \quad (7)$$

En regroupant tous les termes, on obtient :

$$A_P \cdot U_P = A_E \cdot U_E + A_W \cdot U_W + A_N \cdot U_N + A_S \cdot U_S + S_u \quad (8)$$

Les flux convectifs sont:

$$F_e = U_e \Delta Y_P ; F_w = U_w \Delta Y_P ; F_n = V_n \delta x_e ; F_s = V_s \delta x_e \quad (8)$$

Les flux diffusifs sont:

$$D_e = v \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_E} ; D_w = v \frac{\Delta Y_P}{\Delta X_P} ; D_n = v \frac{\delta x_e}{\delta y_n} ; D_s = v \frac{\delta x_e}{\delta y_s} \quad (9)$$

Avec :

$$\begin{aligned} U_e &= \frac{U_E + U_P}{2} \\ U_w &= \frac{U_P + U_W}{2} \\ V_n &= \frac{V_E + V_P}{2} \\ V_s &= \frac{V_{ES} + V_S}{2} \end{aligned} \quad (10)$$

Donc :

$$\begin{aligned} A_E &= -\frac{F_e}{2} + D_e \\ A_W &= \frac{F_w}{2} + D_w \\ A_N &= -\frac{F_n}{2} + D_n \\ A_S &= \frac{F_s}{2} + D_s \end{aligned} \quad (11)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + (F_e - F_w) + (F_n - F_s) \quad (12)$$

La continuité des flux d'advection impose : $F_e = F_w$ et $F_n = F_s$, alors :

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (13)$$

$$S_u = \frac{1}{\rho} (P_P - P_E) \Delta Y_P \quad (14)$$

1.3 Équation de quantité de mouvement suivant « Y » :

En intégrant l'équation (2) à travers le volume de contrôle représenté dans la figure (43-b) on obtient :

$$\iint_{sw}^{ne} \frac{\partial V}{\partial X} U dXdY = \left[U_e \left(\frac{V_E + V_P}{2} \right) - U_w \left(\frac{V_P + V_W}{2} \right) \right] \delta y_n \quad (15)$$

$$\iint_{ws}^{en} \frac{\partial V}{\partial Y} V dYdX = \left[V_n \left(\frac{V_N + V_P}{2} \right) - V_s \left(\frac{V_P + V_S}{2} \right) \right] \Delta X_P \quad (16)$$

$$\iint_{ws}^{en} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial Y} dYdX = \frac{1}{\rho} (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (17)$$

$$\iint_{sw}^{ne} v \left(\frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} \right) dXdY = v \left(\frac{V_E - V_P}{\delta x_e} - \frac{V_P - V_W}{\delta x_w} \right) \delta y_n + v \left(\frac{V_N - V_P}{\Delta Y_N} - \frac{V_P - V_S}{\Delta Y_P} \right) \Delta X_P \quad (18)$$

En regroupant tous les termes après intégrations l'équation discrétisée obtenue dans ce cas peut se mettre sous la forme :

$$A_P \cdot V_P = A_E \cdot V_E + A_W \cdot V_W + A_N \cdot V_N + A_S \cdot V_S + S_v \quad (19)$$

Les flux convectifs sont:

$$F_e = U_e \delta y_n ; \quad F_w = U_w \delta y_n ; \quad F_n = V_n \Delta X_P ; \quad F_s = V_s \Delta X_P \quad (20)$$

Les flux diffusifs sont:

$$D_e = v \frac{\delta y_n}{\delta x_e} ; \quad D_w = v \frac{\delta y_n}{\delta x_w} ; \quad D_n = v \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_N} ; \quad D_s = v \frac{\Delta X_P}{\Delta Y_P} \quad (21)$$

Avec :

$$U_e = \frac{U_N + U_P}{2} ; \quad U_w = \frac{U_{WN} + U_W}{2} ; \quad V_n = \frac{V_N + V_P}{2} ; \quad V_s = \frac{V_P + V_S}{2} \quad (22)$$

Les coefficients de l'équation discrétisée sont :

$$\begin{aligned} A_E &= -\frac{F_e}{2} + D_e \\ A_W &= \frac{F_w}{2} + D_w \\ A_N &= -\frac{F_n}{2} + D_n \\ A_S &= \frac{F_s}{2} + D_s \end{aligned} \quad (23)$$

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S + (F_e - F_w) + (F_n - F_s) \quad (24)$$

L'équation de continuité impose que : $F_e = F_w$ et $F_n = F_s$, donc:

$$A_P = A_E + A_W + A_N + A_S \quad (25)$$

$$S_v = \frac{1}{\rho} (P_P - P_N) \Delta X_P \quad (26)$$

1.4 Equation algébrique de pression.

L'idée de Patankar [2] consiste à utiliser l'équation de continuité pour obtenir le champ de pression. Si le bon champ de pression est pris en compte dans le traitement des équations des quantités de mouvement, alors les vitesses obtenues vérifiant l'équation de continuité. Cette dernière apparaît donc comme une contrainte à vérifier par le champ de pression.

Reprenons les équations de quantité de mouvement suivant X et Y.

$$\begin{aligned} A_p^u U_p &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^u U_{nb} + S_u \\ A_p^v V_p &= \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^v V_{nb} + S_v \end{aligned} \quad (27)$$

En introduisant les pseudo-vitesses:

$$\hat{U}_p = \frac{A_E \cdot U_E + A_W \cdot U_W + A_N \cdot U_N + A_S \cdot U_S}{A_p^u} \quad (28)$$

$$\hat{V}_p = \frac{A_E \cdot V_E + A_W \cdot V_W + A_N \cdot V_N + A_S \cdot V_S}{A_p^v} \quad (29)$$

$$\hat{U}_e = \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^u U_{nb}) / A_e^u \quad (30)$$

$$\hat{U}_w = \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^u U_{nb}) / A_w^u \quad (31)$$

$$\hat{V}_n = \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^v V_{nb}) / A_n^v \quad (32)$$

$$\hat{V}_s = \sum_{nb=E,W,N,S} (A_{nb}^v V_{nb}) / A_s^v \quad (33)$$

Où les sources S_u et S_v ne contiennent pas le terme de pression.

Les relations de la correction des vitesses U_e , U_w , V_n et V_s aux niveaux des interfaces s'écrivent comme suit :

$$U_e = \hat{U}_e + \frac{1}{\rho} (P_p - P_E) \frac{\Delta Y}{A_p^u} \quad (34)$$

$$U_w = \hat{U}_w + \frac{1}{\rho} (P_p - P_p) \frac{\Delta Y}{A_p^u} \quad (35)$$

$$V_n = \hat{V}_n + \frac{1}{\rho} (P_p - P_N) \frac{\Delta X}{A_p^v} \quad (36)$$

$$V_s = \hat{V}_s + \frac{1}{\rho} (P_p - P_p) \frac{\Delta X}{A_p^v} \quad (37)$$

En intégrant l'équation de continuité sur le volume de contrôle typique, on obtient :

$$[U_e - U_w] \Delta Y + [V_n - V_s] \Delta X = 0 \quad (38)$$

en remplaçant U_e , U_w , V_n et V_s par leurs valeurs dans l'équation (38), on obtient l'équation de pression :

$$A_p^p P_p = \sum_{nb=E,W,N,S} A_{nb}^p P_{nb} + S_p \quad (39)$$

Avec :

$$A_E^p = \frac{\Delta Y}{A_p^u} \Delta Y \quad (40)$$

$$A_W^p = \frac{\Delta Y}{A_p^u} \Delta Y \quad (41)$$

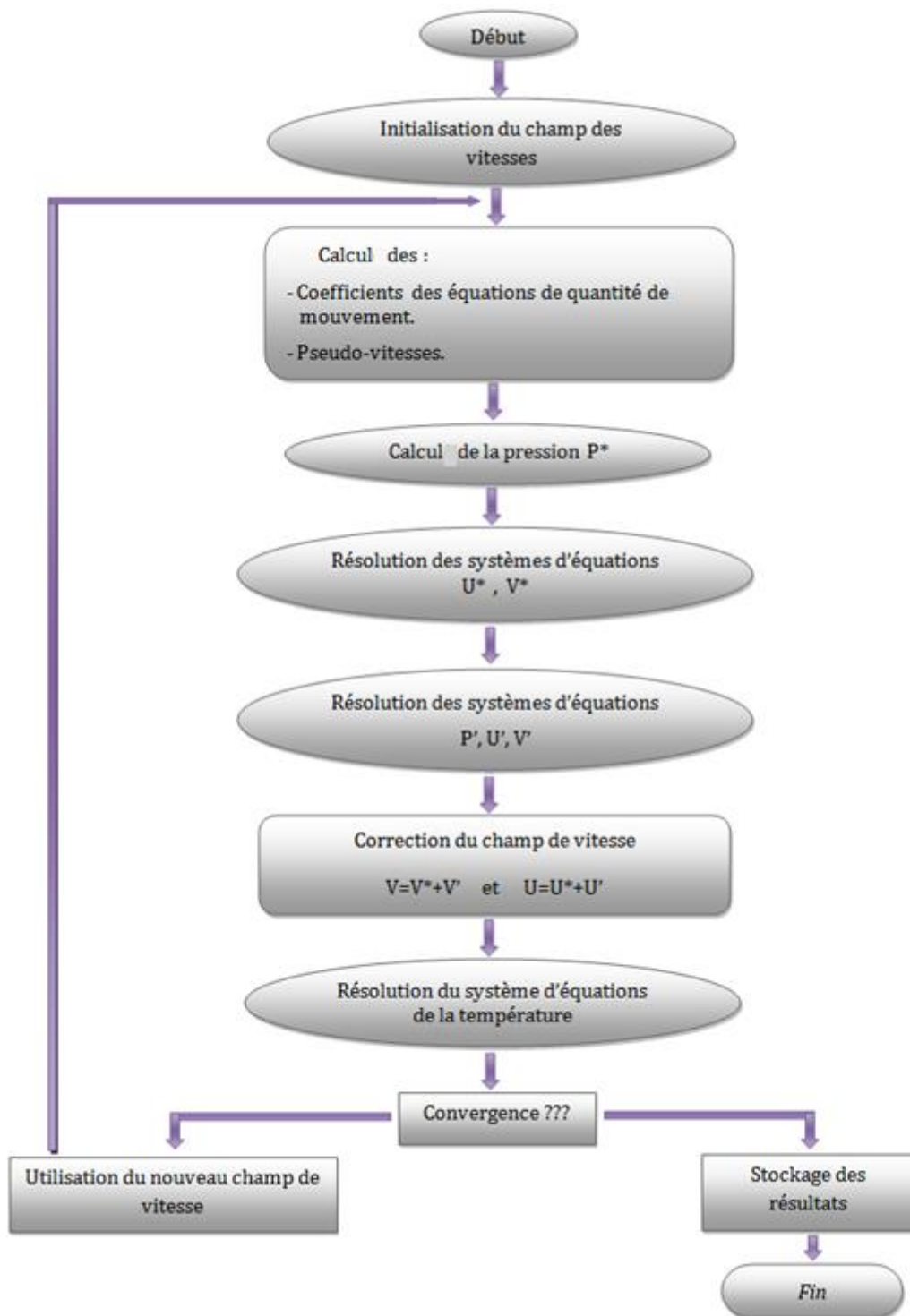
$$A_N^p = \frac{\Delta X}{A_p^v} \Delta X \quad (42)$$

$$A_S^p = \frac{\Delta X}{A_p^v} \Delta X \quad (43)$$

$$A_p^p = A_E^p + A_W^p + A_N^p + A_S^p \quad (44)$$

$$S_p = [\hat{U}_e - \hat{U}_w] \Delta Y + [\hat{V}_n - \hat{V}_s] \Delta X \quad (45)$$

4.6.3 Développement de l'algorithme SIMPLER.



Annexes

Algorithme TDMA

Le système d'équations algébriques non linéaires contient (IL-2)(JL-2) équations, ceci après incorporation des conditions aux limites, avec IL et JL représentent respectivement les nombres totaux des nœuds suivant x et y.

L'équation algébrique s'écrit pour le nœud P du maillage comme suit :

$$A_p \phi_p = A_E \phi_E + A_w \phi_w + A_N \phi_N + A_S \phi_S + \bar{S}_\phi \quad (A-1)$$

Le système d'équations obtenu peut se mettre sous la forme :

$$[A][\phi] = [\bar{S}_\phi] \quad (A-2)$$

Où : [A] est une matrice de (IL-2)(JL-2) éléments.

[ϕ] Vecteur des inconnues $\phi(i, j)$.

La résolution directe du système étant compliquée, on utilise donc une méthode de résolution itérative qui détermine les valeurs de la variable ϕ sur chaque colonne indépendamment des autres colonnes. Ainsi pour déterminer les valeurs de la variable sur la colonne (i), on suppose que ces valeurs sont connues sur les colonnes (i-1) et (i+1).

L'équation algébrique est alors réduite à une équation qui ne contient que trois inconnues (ϕ_p , ϕ_N et ϕ_S).

Pour le nœud (i,j) du maillage, l'équation algébrique pourra s'écrire :

$$A_S(i,j)\phi(i,j-1) + A_P(i,j)\phi(i-1,j) - A_N(i,j)\phi(i,j+1) = A_E(i,j)\phi(i+1,j) + A_W(i,j)\phi(i-1,j) + \bar{S}_\phi(i,j) \quad (A-3)$$

En posant :

$$a_j = A_P(i,j)$$

$$b_j = A_N(i,j)$$

$$c_j = A_S(i,j) \tag{A-4}$$

$$d_j = A_E(i,j) \phi(i+1,j) + A_W(i,j) \phi(i-1,j) + \overline{S}_\phi$$

l'équation (A-3) s'écrit sous la forme suivante :

$$- C_j \phi_{j-1} + a_j \phi_j - b_j \phi_{j+1} = d_j \tag{A-5}$$

avec $C_1 = 0$ et $b_{JL} = 0$

Pour tous les noeuds $[J = 2, JL]$ de la colonne, on a un système de la forme :

$$\begin{bmatrix} -C_2\phi_1 + a_2\phi_2 - b_2\phi_3 = d_2 \\ 0 - C_3\phi_2 + a_3\phi_3 + b_3\phi_3 = d_3 \\ \vdots \\ 0 - C_{jL}\phi_{jL-1} + a_{jL}\phi_{jL} - b_{jL}\phi_{jL+1} = d_j \end{bmatrix} \tag{A-6}$$

La matrice associée au système est tridiagonale, on utilise l'algorithme TDMA pour la résoudre.

Les équations (A-6) peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\phi_j = \frac{C_j}{a_j} \phi_{j-1} + \frac{b_j}{a_j} \phi_{j+1} + \frac{d_j}{a_j} \tag{A-7}$$

Ou :

$$\phi_2 = \frac{C_2}{a_2} \phi_1 + \frac{b_2}{a_2} \phi_3 + \frac{d_2}{a_2} \tag{A-8}$$

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \frac{C_3}{a_3} \phi_2 + \frac{b_3}{a_3} \phi_4 + \frac{d_3}{a_3} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{A-9}$$

$$\phi_{jL} = \frac{C_{jL}}{a_{jL}} \phi_{jL-1} + \frac{b_{jL}}{a_{jL}} \phi_{jL+1} + \frac{d_{jL}}{a_{jL}}$$

Puisque ϕ_1 est connu, on élimine ϕ_2 puis ϕ_3 et ainsi de suite jusqu'à obtention d'une relation de récurrence pour ϕ_j :

$$\phi_j = P_j \phi_{j+1} + Q_j \quad (\text{A-10})$$

Détermination de P_j et Q_j

Pour le nœud $(i, j-1)$, on a :

$$\phi_{j-1} = P_{j-1} \phi_j + Q_{j-1} \quad (\text{A-11})$$

En remplaçant (A-11) dans (A-5) on obtient :

$$- C_j (P_{j-1} \phi_j + Q_{j-1}) + a_j \phi_j - b_j \phi_{j+1} = d_j \quad (\text{A-12})$$

D'où on a :

$$(a_j - C_j P_{j-1}) \phi_j = d_j + C_j \phi_{j-1} + b_j \phi_{j+1} \quad (\text{A-13})$$

$$\phi_j = \frac{b_j}{a_j - C_j P_{j-1}} \phi_{j+1} + \frac{d_j + C_j \phi_{j-1}}{a_j - C_j P_{j-1}} \quad (\text{A-14})$$

De (A-10) et (A-14) on a :

$$P_j = \frac{b_j}{a_j - C_j P_{j-1}} \quad (\text{A-15})$$

$$\phi_j = \frac{d_j + C_j \phi_{j-1}}{a_j - C_j P_{j-1}} \quad (\text{A-16})$$

On peut dire finalement qu'on a résolu la matrice en faisant un balayage suivant X (colonne par colonne).

Pour la résolution de la matrice en faisant un balayage suivant Y (ligne par ligne), on utilisera les mêmes étapes que le balayage suivant X, en supposant que les valeurs de la variable ϕ sur les lignes $(j-1)$ et $(j+1)$ sont connues.