Centre Universitaire de Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

$2^{ème}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Théorie des Semi-Groupes
(2020/2021)

<u>Série de T.D N° 1</u> (S1)

<u>Exercice 01</u> :

Soient X, Y et Z trois espaces vectoriels normés supposons que Y et Z sont de Banach.

a) Soient $A \in L(X \ , \ Y)$, $B \in L(Y \ , \ Z)$, montrer que

$$\|BA\| \leq \|B\| \, \|A\|$$

b) Soient $\{A_n\} \subset L(X \ , \ Y)$, $A \in L(X \ , \ Y)$, $\{B_n\} \subset L(Y \ , \ Z)$, $B \in L(Y \ , \ Z)$.
Montrer que

si $A_n \to A$ et $B_n \to B$, lorsque $n \to +\infty$ alors $B_n A_n \to BA$ quand $n \to +\infty$.

<u>Exercice 02</u> :

Soit X un espace de Banach et soit $A \in L(X)$ tel que $\|A\| < 1$.

a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ est convergente.

b) Si on note par S la somme de la série $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} A^k$. Montrer que l'opérateur $(I - A)$ est continûment inversible et que

$$S = (I - A)^{-1} \quad ; \quad \left\|(I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|} \quad \text{et} \quad \left\|I - (I - A)^{-1}\right\| \leq \frac{\|A\|}{1 - \|A\|}$$

<u>Exercice 03</u> :

Soit X un espace de Banach.

a) Montrer qu'on a dans $L(X)$ les fonctions d'opérateurs suivantes :

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad , \quad \cos(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad \sin(A) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad ,$$

$$\cosh(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k}}{(2k)!} \quad , \quad \sinh(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad .$$

b) Montrer que :

$$\exp(A) = \cosh(A) + \sinh(A) \quad ; \quad \|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|) \quad ; \quad \|\sinh(A)\| \leq \sinh(\|A\|) \quad ;$$

$$\|\cosh(A)\| \leq \cosh(\|A\|) \quad ; \quad \|\sin(A)\| \leq \sinh(\|A\|) \quad ; \quad \|\cos(A)\| \leq \cosh(\|A\|) \quad .$$

Exercice 04 :

Soient A et B deux matrices de $M_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Résoudre les problèmes de *Cauchy* suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = X_0 \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du(t)}{dt} = Bu(t) \\ u(0) = X_0 \end{array} \right. \quad ;$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du(t)}{dt} = (A+B)\,u(t) \\ u(0) = X_0 \end{array} \right. \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du(t)}{dt} = (A-B)\,u(t) \\ u(0) = X_0 \end{array} \right. \quad ;$$

où $X_0 \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 05 :

Soit A une matrice de $M_3(\mathbb{R})$ donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad .$$

- Trouver la solution du problème de *Cauchy* suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) \\ u(0) = X_0 \end{array} \right. \quad ;$$

où $X_0 \in \mathbb{R}^3$.

Centre Universitaire de Abdelhafid Boussouf - Mila
Institut des Sciences et de la Technologie
Département de Mathématiques et Informatique

$2^{ème}$ Année Master
Mathématiques Appliquées
Théorie des Semi-Groupes
(2020/2021)

Série de T.D N° 2

Exercice 01:

Soient H un espace de Hilbert et $\{\varphi_k\}_{k\geq 1}$ une base hilbertienne de H et soit $\lambda_1,\ \lambda_2,\ ...\lambda_k$..une suite de nombres complexes tq $\sup\limits_k \mathrm{Re}(\lambda_k) \leq \alpha < +\infty$. Pour $f \in H,\ t \geq 0$ on définit

$$S(t)f = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \left(f\ ,\ \varphi_k\right) \varphi_k$$

1) Montrer que $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe sur H et que son générateur infinitésimal est donné par

$$Af = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(f\ ,\ \varphi_k\right) \varphi_k \quad \text{ pour } \ f \in D(A)$$

où

$$D(A) = \left\{ f \in H\ /\ \sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_k \left(f\ ,\ \varphi_k\right)\right|^2 < +\infty \right\}.$$

Exercice 02 :

Soit X l'espace de Banach $C_u(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions bornées uniformément continues sur $\mathbb{R}$ muni de la norme sup i.e

$$\|f\| = \sup_{\mathbb{R}} |f(x)| \quad , \ \forall f \in X\ .$$

On définit pour tout $t \geq 0$ l'opérateur linéaire et continu $S(t)$ tel que :

$$(S(t)f)(x) = f(x+t) \quad , \ \forall f \in X \ \text{ et } \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

1) Montrer que $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C^0 semi-groupe sur X et que $\|S(t)\| \leq 1$ i.e $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C^0 semi-groupe de contractions.

2) Montrer que si A est le générateur infinitésimal du C^0 semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ alors :

$$D(A) = C_u^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \qquad Af = f'.$$

Exercice 03 :

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $H = L^2(\Omega)$ considéré comme étant un espace de Hilbert réel. On définit l'opérateur linéaire A dans H par :

$$Au = \triangle u \quad , \quad \forall u \in D(A)$$

$$\text{où} \quad D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \ , \quad \triangle u \in L^2(\Omega) \right\} .$$

Montrer que A est m-dissipatif, à domaine dense. Plus précisément A est dissipatif et auto-adjoint.

Exercice 04 :

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $X = L^\infty(\Omega)$ considéré comme étant un espace de Banach réel. On définit l'opérateur linéaire A sur X par :

$$Au = \triangle u \quad , \quad \forall u \in D(A)$$

$$\text{où} \quad D(A) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \cap X \ , \quad \triangle u \in X \right\} .$$

1) Montrer que A est m-dissipatif.
2) Soit l'espace de Banach

$$Y = C_0(\Omega) = \left\{ u \in C(\bar{\Omega}) \ , \ u = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega \right\} .$$

On définit sur Y l'opérateur B par :

$$Bu = \triangle u \quad , \quad \forall u \in D(B)$$

$$\text{où} \quad D(B) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) \cap Y \ , \quad \triangle u \in Y \right\} .$$

Montrer que si la fontiére de Ω est lipschitzienne alors B est m-dissipatif, à domaine dense.

(Sachant que si la fontière de Ω est lipschitzienne on a $D(A) \subset C_0(\Omega)$).