

# Chapitre 3

## Systemes dynamiques discrets bi-dimensionnelles de premier ordre

Dans ce chapitre, nous étudions des systèmes dynamiques de dimension plus grande a un. Pour simplifier les choses nous ne traiterons que les systèmes dynamiques dimension deux. Les systèmes de dimensions supérieures sont, bien sûr, importants mais la plupart des résultats restent valables au dimensions supérieures sans aucune difficulté.

### 3.1 Systemes dynamiques lineaires bi-dimensionnelles de premier ordre

La caractérisation des trajectoires dans les systèmes linéaires autonomes bidimensionnels de premier ordre fournit les fondements conceptuels de la généralisation de l'analyse pour les systèmes dynamiques non linéaires, de rang supérieur, non autonomes.

Soit le système dynamique discret linéaire suivant

$$\begin{cases} x_{1,n+1} = a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} \\ x_{2,n+1} = a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} \end{cases}, \quad -\infty < x_1, x_2 < +\infty. \quad (3.1)$$

avec la condition initiale  $(x_{10}, x_{20})$ . Où  $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$  sont des constantes réelles. Le système (3.1) peut s'écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{pmatrix} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

où  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ . L'origine  $O$  est le seul point fixe de l'application  $f$  (si  $\det(I - A) \neq 0$ ) définie par

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ f_2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_{1,n} + a_{12}x_{2,n} \\ a_{21}x_{1,n} + a_{22}x_{2,n} \end{pmatrix}.$$

Une solution du système linéaire (3.2), est une trajectoire  $\{X_n\}_{n \geq 0}$  où  $X_n = \begin{pmatrix} x_{1,n} \\ x_{2,n} \end{pmatrix}$  pour tout entier positif  $n$ . Donc la valeur de  $X_n$  dans les périodes  $1, 2, 3, \dots, n$  est

$$\begin{aligned} X_1 &= AX_0, \\ X_2 &= AX_1 = A^2X_0, \\ &\cdot \\ &\cdot \\ &\cdot \\ X_n &= AX_{n-1} = A^nX_0. \end{aligned}$$

### Exemple 3.1.

Considérons le système dynamique discret bidimensionnel suivant  $X_{n+1} = AX_n$  où  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$  et  $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{pmatrix}$ , avec une condition initiale  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$ . Comme la matrice  $A$  est une matrice diagonale donc l'évolution de chacune des variables d'état  $x_n, y_n$  sont indépendantes l'une de l'autre. De plus

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & (0.5)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix},$$

ou bien

$$\begin{aligned}x_n &= 2^n x_0, \\y_n &= (0.5)^n y_0.\end{aligned}$$

Le point fixe de ce système est  $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ . On a  $x_n \rightarrow +\infty$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  et  $y_n \rightarrow 0$  lorsque  $n \rightarrow +\infty$  l'origine est appelé point **selle** (*col*).

Donc si la matrice  $A$  est une matrice diagonale, alors il n'existe pas d'interdépendance entre les différentes variables d'état. La matrice  $A^n$  est aussi une matrice diagonale et l'évolution de chacune des variables d'état peuvent être analysées séparément selon la méthode développée pour les systèmes dynamiques unidimensionnelles.

Dans le cas où la matrice  $A$  n'est pas une matrice diagonale et qu'il existe l'interdépendance dans l'évolution des variables d'état, ils existent des méthodes d'algèbre linéaire (Forme normale de Jardon) qui permettent de transformer le système à variables d'état interdépendantes à un système à variables d'état indépendantes ou partialement indépendantes.

### 3.1.1 Matrice de Jardon

Cette sous section résume les propositions fondamentales de l'algèbre linéaire utilisée dans la dérivation et l'analyse qualitative des systèmes dynamiques discrets bidimensionnels.

#### Lemme 3.1.

Soit  $A = (a_{ij})$  une matrice  $2 \times 2$ , tel que  $a_{ij} \in \mathbb{R}$  pour tous  $i$  et  $j$ .

1. Si la matrice  $A$  a deux valeurs propres réelles distinctes  $\{\lambda_1, \lambda_2\}$ , alors il existe une matrice  $2 \times 2$  non singulière  $Q$  et une matrice diagonale  $D$ , telle que  $A = QDQ^{-1}$ .

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

et  $Q$  est une matrice  $2 \times 2$  inversible dont les colonnes sont les vecteurs propres de la matrice  $A$ .

2. Si la matrice  $A$  a deux valeurs propres réelles répétées  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  alors il existe une matrice  $2 \times 2$  non singulière  $Q$ , telle que  $A = QDQ^{-1}$  où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

3. Si la matrice  $A$  a deux valeurs propres complexes conjuguées,  $\lambda_{1,2} = a \pm ib$  et  $w = u \pm iv$  sont les vecteurs propres associés alors il existe une matrice  $2 \times 2$  non singulière,  $Q$ , telle que  $A = QDQ^{-1}$  où

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

et  $Q$  est une matrice  $2 \times 2$  inversible de plus  $Q = (v, u)$ .

*Démonstration.* Voir Hirsch et Smale (1974). □

### 3.1.2 Caractérisation des solutions d'un systèmes dynamiques linéaires

Pour caractériser les solution du système dynamique bidimensionnel

$$X_{n+1} = AX_n, \tag{3.3}$$

avec  $X \in \mathbb{R}^2$  et  $A$  une matrice carrée  $2 \times 2$  on s'intéresse dans un premier temps au système

$$Y_{n+1} = DY_n, \tag{3.4}$$

avec  $X = QY$  et  $D = Q^{-1}AQ$  ( $D$  et  $Q$  sont les matrices définies dans le lemme (3.1) et on déduit la caractérisation des solution du système (3.3) en utilisant la relation  $X = QY$ . Pour simplifier la notation dans ce qui vient on pose  $Y = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ).

#### 3.1.2.1 Valeurs propres réelles distincts

Soit le système dynamique

$$Y_{n+1} = DY_n, \tag{3.5}$$

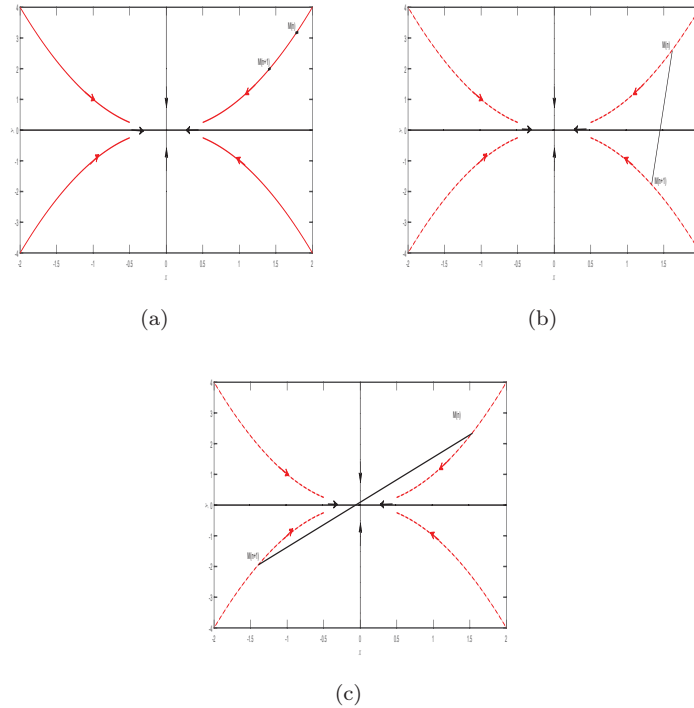


FIGURE 3.1: Portrait de phase du (3.5) si  $|\lambda_1| < |\lambda_2| < 1$  (a) Nœud stable de type 1  $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ . (b) Nœud stable de type 2  $0 < \lambda_1$  et  $\lambda_2 < 0$ . (c) Nœud stable de type 3  $\lambda_1 < 0$  et  $\lambda_2 < 0$ .

avec  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$  et  $\lambda_1 \neq \lambda_2 \in \mathbb{R}$ . Donc  $Y_n = D^n Y_0$  avec  $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 \\ 0 & \lambda_2^n \end{pmatrix}$  i.e.

$$\begin{cases} x_n = (\lambda_1)^n x_0, \\ y_n = (\lambda_2)^n y_0, \end{cases} \quad (3.6)$$

avec  $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}$  est une condition initiale du vecteur  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ .

Si  $\lambda_1 > 0$  et  $\lambda_2 > 0$ , en éliminant  $n$  entre les deux relations on obtient l'équation d'une famille de courbes :

$$y = cx^{\ln(\lambda_1)/\ln(\lambda_2)}, \quad c = \text{constante fixée par } x_0, y_0, \quad (3.7)$$

qui sont invariantes par application de la transformation  $T$  défini par (3.5), c'est-à-dire le changement de  $x$  en  $\lambda_1 x$  et  $y$  en  $\lambda_2 y$  ne modifie pas (3.7).

★ Si  $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$  ces courbes invariantes ont une allure parabolique avec pour tangente commune l'axe  $ox$ , et pour direction asymptotique commune  $oy$  figure (3.1).

★ Si  $0 < \lambda_2 < 1 < \lambda_1$  ces courbes invariantes ont une allure hyperbolique, les asymptotes étant  $ox$ ,  $oy$  figure (3.3). Dans les deux cas, l'axe des  $x$  et l'axe des  $y$  sont des courbes invariantes particulières.

★ Si l'un des multiplicateurs  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  est négatif, ou si les deux multiplicateurs sont négatifs, les courbes 3.7 sont alors invariantes par application de  $T^2$  qui a ses deux multiplicateurs positifs.

1. Si  $|\lambda_2| < |\lambda_1| < 1$

Les courbes invariantes par application de  $T$  ou  $T^2$ , ont donc l'allure de la figure (3.1). A partir d'un point initial  $M_0(x_0, y_0)$ , la suite des points engendrée par (3.5), c'est-à-dire la trajectoire discrète issue de  $M_0$  est située sur la courbe invariante passant par  $M_0$ , si  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , et sur deux courbes invariantes, celle qui passe par  $M_0$  et celle qui passe par  $M_1$ , si l'un des multiplicateurs est négatif, ou si les deux multiplicateurs sont négatifs. cette suite est telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = 0$$

Le point 0 est un point fixe attractif, ou asymptotiquement stable (*un nœud stable*).

(a) Si  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , la suite des points générée à partir de  $M_0(x_0, y_0)$  tend vers 0 sans oscillation autour de l'un des axes  $OX$ ,  $OY$ . 0 est appelé *nœud stable de type 1* figure (3.1) (a).

(b) Si  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ , ou  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , la suite des points générée à partir de  $M_0(x_0, y_0)$  tend vers 0 en oscillant autour de  $OY$  dans le premier cas, et autour de  $OX$  dans le second. 0 est appelé *nœud stable de type 2* figure (3.1) (b).

(c) Si  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , la suite des points générée à partir de  $M_0(x_0, y_0)$  tend vers 0 en oscillant autour des deux axes  $OX$ ,  $OY$ . 0 est appelé *nœud stable de type 3* figure (3.1) (c).

2. Si  $|\lambda_2| > |\lambda_1| > 1$ , les trajectoires discrètes sont encore situées sur les mêmes courbes à allure parabolique, mais la suite des points obtenue à partir d'un point initial  $M_0(x_0, y_0)$  s'éloigne de 0.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \pm\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = \pm\infty.$$

0 est appelé *nœud instable* qui selon les signes de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  peut être de type 1, 2, ou 3. On dit aussi que 0 est un *nœud répulsif* figure (3.2).

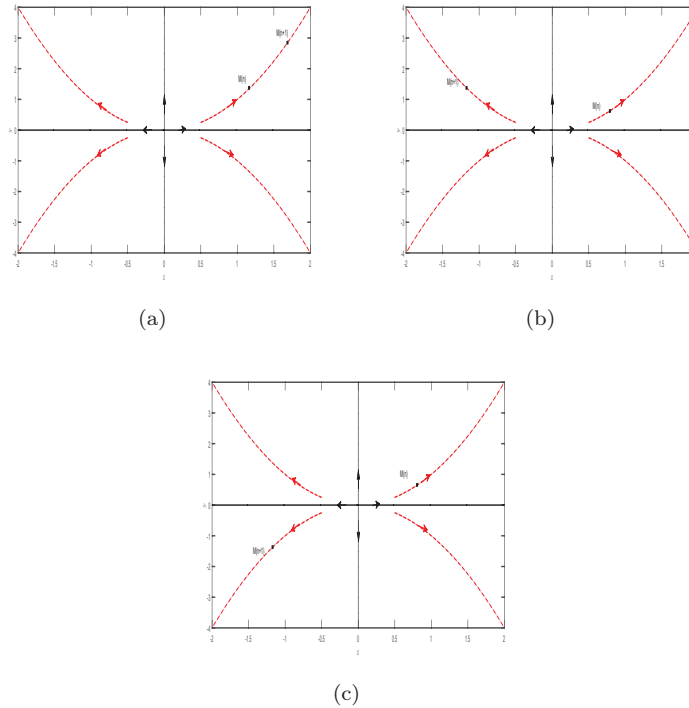


FIGURE 3.2: Portrait de phase du (3.5) si  $|\lambda_1| > |\lambda_2| > 1$  (a) Nœud instable de type 1  $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$ . (b) Nœud instable de type 2  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$ . (c) Nœud instable de type 3  $\lambda_1 < 0, \lambda_2 < 0$ .

3. Si  $|\lambda_2| < 1, |\lambda_1| > 1$ , les trajectoires discrètes sont situées sur les courbes invariantes à allure hyperbolique figure (3.3), et l'origine 0 est un point fixe instable qui sera appelé un *col*. Pour des conditions initiales  $M_0(x_0 = 0, y_0)$  prises sur l'axe  $OY$ , la suite des points  $M_n$  reste sur  $OY$  et tend vers 0, et pour  $M_0(x_0, y_0 = 0)$  la suite des points  $M_n$  reste sur  $OX$  et s'éloigne de 0. Les axes  $OX, OY$  correspondent à deux courbes invariantes qui passent par 0, ce sont les seules courbes invariantes qui passent par le point fixe. Le signe de  $\lambda_1, \lambda_2$  permet encore de distinguer *les cols de type 1, 2 ou 3* figure (3.3).
4. Si  $|\lambda_1| = |\lambda_2|$ , les courbes invariantes de la transformation  $T$  pour  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ , de la transformation  $T^2$  pour  $\lambda_1 = -\lambda_2, \lambda_1 = \lambda_2 < 0$ , issues de différents points  $M_0$ , sont des droites passant par 0. Les trajectoires discrètes se situent sur ces courbes invariantes, et le point fixe 0 est appelé un *nœud étoile de type 1* ( $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ ), de *de type 2* ( $\lambda_1 = -\lambda_2$ ) ou *de type 3* ( $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ ) attractif (figure (3.4)), ou répulsif (figure (3.5)), selon  $|\lambda_1| < 1$ , ou  $|\lambda_1| > 1$ .

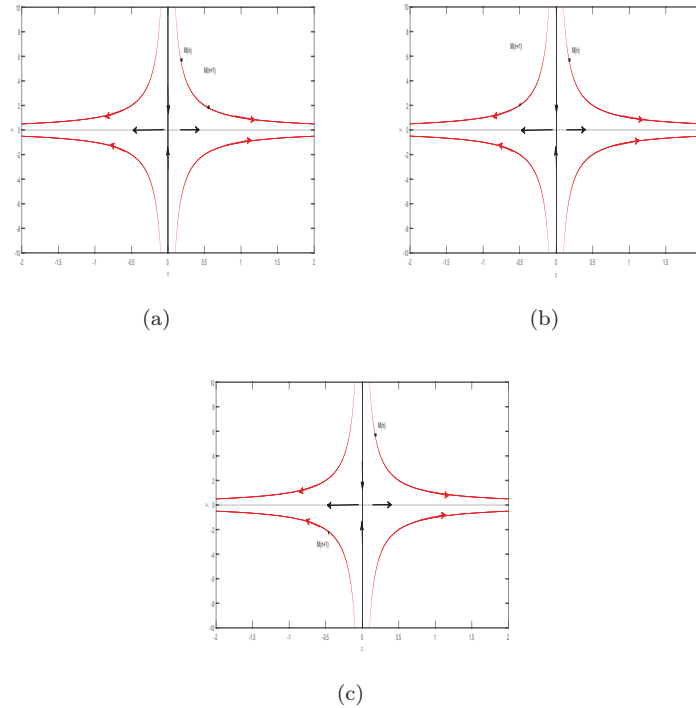


FIGURE 3.3: Portrait de phase du (3.5) si  $|\lambda_2| < 1$ ,  $|\lambda_1| > 1$  (a) Col de type 1  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 > 0$ . (b) Col de type 2  $\lambda_1 > 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ . (c) Col de type 3  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ .

### 3.1.2.2 Valeurs propres réelles égales

Considérons le système dynamique (3.5) avec  $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Donc  $Y_n = D^n Y_0$  avec  $D^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ n\lambda^{n-1} & \lambda^n \end{pmatrix}$  i.e.

$$\begin{cases} x_n = \lambda^n x_0 \\ y_n = n\lambda^{n-1} x_0 + \lambda^n y_0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Pour  $\lambda > 0$  et  $\frac{x}{x_0} > 0$  les trajectoires sont situées sur les courbes invariantes d'équation

$$y = \frac{y_0}{x_0} x + \frac{\ln(\frac{x}{x_0})}{\lambda \ln(\lambda)} x. \quad (3.9)$$

1. Si  $\lambda > 1$  Le point fixe 0 est alors appelé *un nœud impropre attractif* figure (3.6) (a).
2. Si  $0 < \lambda < 1$  Le point fixe 0 est alors appelé *un nœud impropre répulsif* figure (3.6) (b).



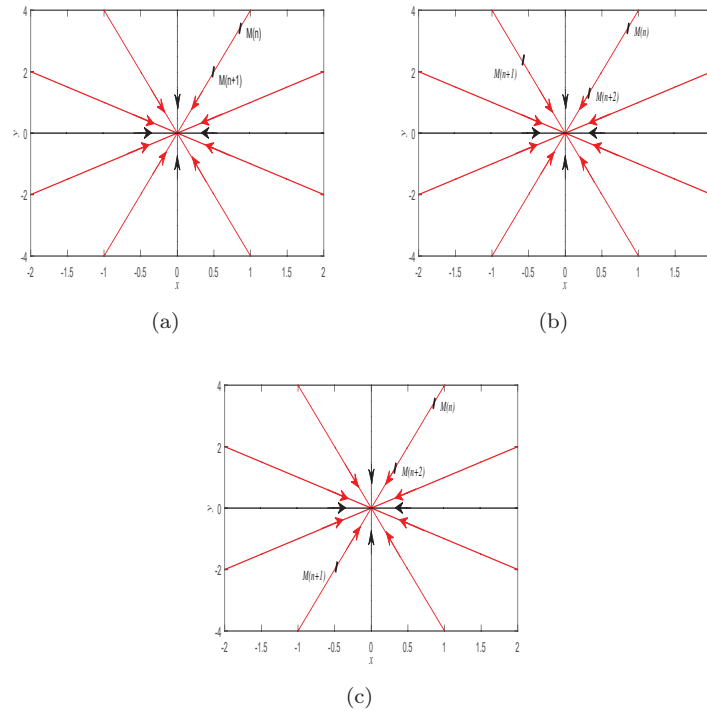


FIGURE 3.4: Portrait de phase du (3.5) si  $|\lambda_1| = |\lambda_2| < 1$  nœud étoile stable (a) de type 1  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ . (b) de type 2  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . (c) de type 3  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ .

### 3.1.2.3 Valeurs propres complexes

Considérons le système dynamique (3.5) avec  $D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . Considérons la représentation géométrique des valeurs propres, en posant  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ,  $a = r \cos \theta$  et  $b = r \sin \theta$  avec  $0 < \theta < \pi$  alors  $\lambda_{1,2} = a \pm ib = re^{\pm i\theta}$  (figure 3.7). D'où

$$D = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

et

$$D^n = r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

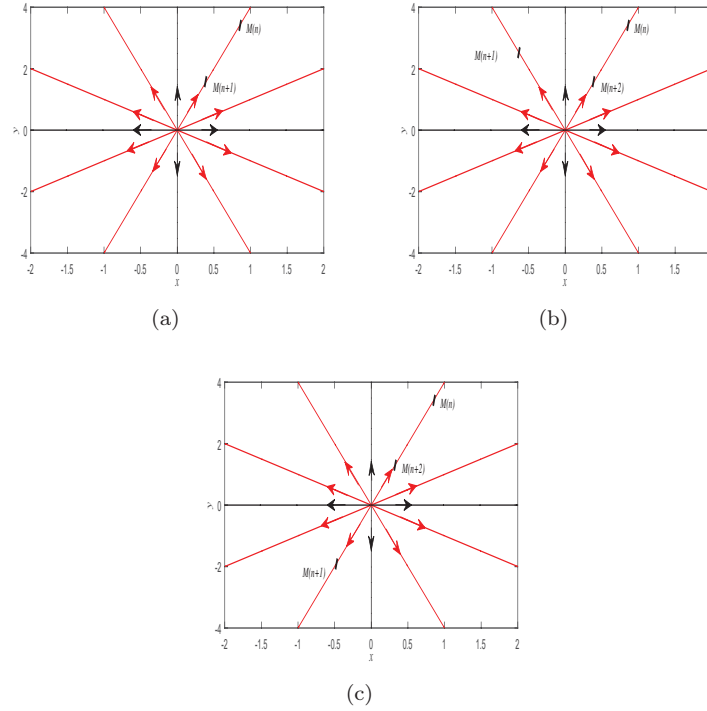


FIGURE 3.5: Portrait de phase du (3.5) si  $|\lambda_1| = |\lambda_2| > 1$  nœud étoile instable (a) de type 1  $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$ . (b) de type 2  $\lambda_1 = -\lambda_2$ . (c) de type 3  $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$ .

donc le vecteur  $Y_n$  est donné par

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= r^n \begin{pmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= r^n \begin{pmatrix} x_0 \cos n\theta - y_0 \sin n\theta \\ x_0 \sin n\theta + y_0 \cos n\theta \end{pmatrix} \\ &= r^n \sqrt{x_0^2 + y_0^2} \begin{pmatrix} \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cos n\theta - \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \sin n\theta \\ \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \sin n\theta + \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2}} \cos n\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = r^n \rho_0 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + n\theta) \\ \sin(\varphi_0 + n\theta) \end{pmatrix}, \quad (3.12)$$

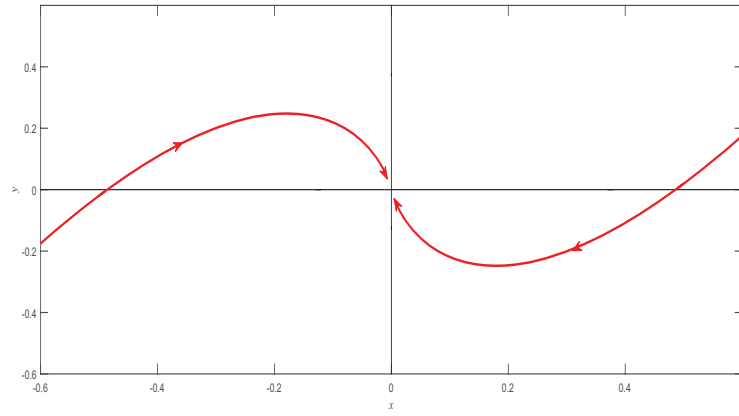
où  $\rho_0 = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$ ,  $x_0 = \rho_0 \cos(\varphi_0)$  et  $y_0 = \rho_0 \sin(\varphi_0)$ .

1. Si  $r = 1$ , on a

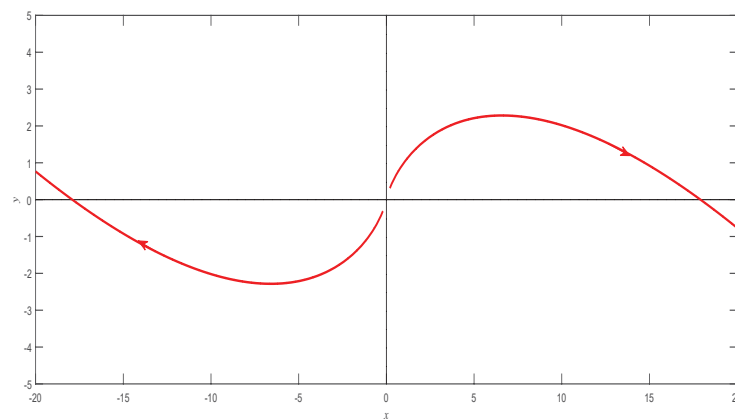
$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \rho_0 \begin{pmatrix} \cos(\varphi_0 + n\theta) \\ \sin(\varphi_0 + n\theta) \end{pmatrix},$$

ou après élimination de  $n$

$$x_n^2 + y_n^2 = \rho_0^2, \quad (3.13)$$



(a)



(b)

FIGURE 3.6: Portrait de phase du (3.5) si  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  (a) Nœud impropre stable  $0 < \lambda < 1$ . (b) Nœud impropre instable  $1 < \lambda < \infty$ .

Les cercles centrés en 0 sont des courbes invariantes pour le système (3.5). Le point fixe 0 est appelé *centre* (un point fixe *centre* est *stable* mais n'est pas *asymptotiquement stable*). Si  $\theta \neq \frac{2k\pi}{q}$  ( $k$  et  $q$  entiers sans diviseur commun), une trajectoire issue d'un point  $M_0 = (x_0, y_0)$  est formée d'une suite de points dense sur le cercle de rayon  $\rho_0$ . Si  $\theta = \frac{2k\pi}{q}$  ( $k$  et  $q$  entiers sans diviseur commun), une trajectoire issue d'un point  $M_0 = (x_0, y_0)$  est formée par les  $q$  points d'un cycle d'ordre  $q$  situés sur le cercle de rayon  $\rho_0$ . Dans les deux cas précédents la dynamique des points est au sens *trigonométrique* si  $b > 0$  et au sens *anti-trigonométrique* si  $b < 0$  figure (3.8).

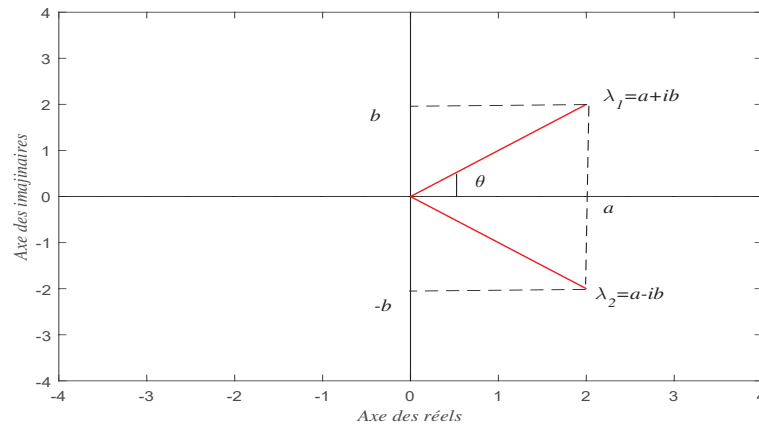


FIGURE 3.7: Représentation géométrique des valeurs propres  $\lambda_{1,2} = a \pm ib = re^{\pm i\theta}$ .

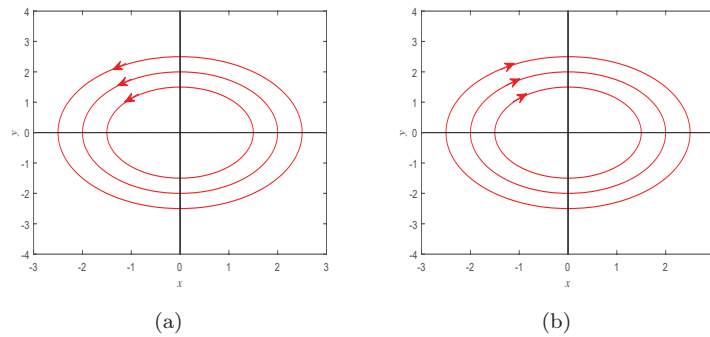


FIGURE 3.8: Point fixe centre  $r = 1$ . (a)  $b > 0$ . (b)  $b < 0$ .

2. Si  $r \neq 1$ , en introduisant les coordonnées polaires  $x = \rho \cos \varphi$ ,  $y = \rho \sin \varphi$ , donc le système devient

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \rho_{n+1} \cos \varphi_{n+1} \\ \rho_{n+1} \sin \varphi_{n+1} \end{pmatrix} &= r \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_n \cos \varphi_n \\ \rho_n \sin \varphi_n \end{pmatrix} \\ &= \rho_n r \begin{pmatrix} \cos(\theta + \varphi_n) \\ \sin(\theta + \varphi_n) \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

donc

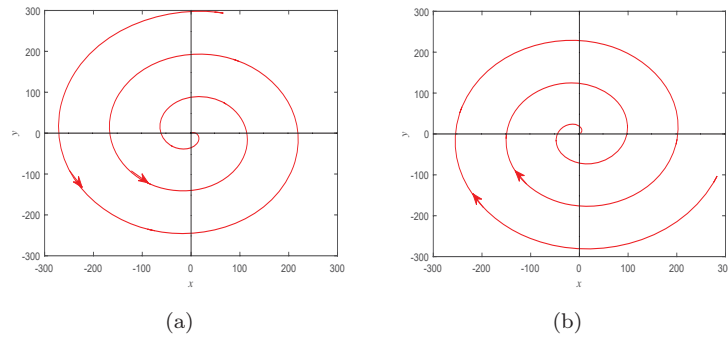
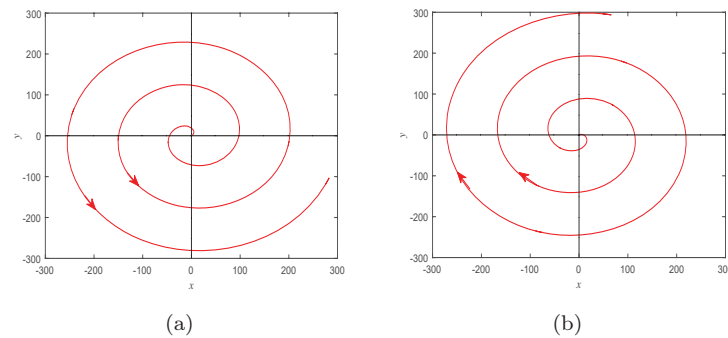
$$\begin{cases} \rho_{n+1} = r \rho_n \\ \varphi_{n+1} = \varphi_n + \theta \end{cases}$$

d'où la solution est

$$\begin{cases} \rho_n = r^n \rho_0 \\ \varphi_n = n\theta + \varphi_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

alors

$$\rho = r^{(\varphi - \varphi_0)/\theta} \rho_0$$

FIGURE 3.9: Foyer stable. (a)  $b > 0$ . (b)  $b < 0$ .FIGURE 3.10: Foyer stable. (a)  $b > 0$ . (b)  $b < 0$ .

ou bien dans les coordonnées cartésiennes

$$x^2 + y^2 = \rho_0 r^{2(\varphi - \varphi_0)/\theta}. \quad (3.15)$$

Les spirales logarithmiques (3.15) sont des courbes invariantes pour le système (3.5). De plus

- (a) Si  $|r| < 1$ , alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = 0$  et  $\varphi_n$  augmente lorsque  $n$  augmente si  $b > 0$ , et diminue lorsque  $n$  augmente si  $b < 0$ . Donc les trajectoires s'approchent de l'origine en spirale, dans ce cas l'origine est appelée *foyer stable* et la dynamique des trajectoires issue d'un point  $M_0(x_0, y_0)$  est au sens *trigonométrique* si  $b > 0$  et au sens *anti-trigonométrique* si  $b < 0$  figure (3.9).
- (b) Si  $|r| > 1$  alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_n = +\infty$  et  $\varphi_n$  augmente lorsque  $n$  augmente si  $b > 0$ , et diminue lorsque  $n$  augmente si  $b < 0$ . Donc les trajectoires s'éloignent de l'origine en spirale, dans ce cas l'origine est appelée *foyer instable* et la dynamique des trajectoires issue d'un point  $M_0(x_0, y_0)$  est au sens *trigonométrique* si  $b > 0$  et au sens *anti-trigonométrique* si  $b < 0$  figure (3.10).

*Remarque 3.2.*

1. Pour tous les points fixes considérés, tels que  $|\lambda_1| < 1$ ,  $|\lambda_2| < 1$ , le domaine de stabilité est constitué par tout le plan  $(y_1, y_2)$  sauf les points à l'infini.
2. Lorsque l'un des valeurs propres est un module égal 1,  $|\lambda_1| = 1$  par exemple, alors l'équation 3.4 montre que l'axe des  $X$  est une courbe constituée par une infinité de points fixes si  $\lambda_1 = 1$ , ou une infinité de cycles d'ordre 2 (sauf le point fixe 0) si  $\lambda_1 = -1$ , attractif quand  $|\lambda_2| < 1$ , répulsifs quand  $|\lambda_2| > 1$ .

### 3.1.3 Caractérisation des solutions en fonction de trace de $A$ et $\det(A)$ .

Considérons le système dynamique linéaire bidimensionnel  $X_{n+1} = AX_n$ . Les propriétés qualitatives de ce système peuvent être classées en fonction des valeurs  $tr(A)$ ,  $\det(A)$ . Les valeurs propres de la matrice  $A$  sont obtenues comme solutions de l'équation caractéristique

$$P(\lambda) = \lambda^2 - tr(A)\lambda + \det(A) = 0.$$

1. Si  $(tr(A))^2 > 4 \det(A)$  les valeurs propres sont réelles.
2. Si  $(tr(A))^2 < 4 \det(A)$  les valeurs propres sont complexes.

**Proposition 3.3.** *Figure (3.11).*

Considérons le système dynamique linéaire bidimensionnel  $X_{n+1} = AX_n$  et soit  $\lambda_{1,2}$  les valeurs propres de  $A$ .

1. Si  $(tr(A))^2 > 4 \det(A)$  alors  $\lambda_{1,2}$  sont réels ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) de plus

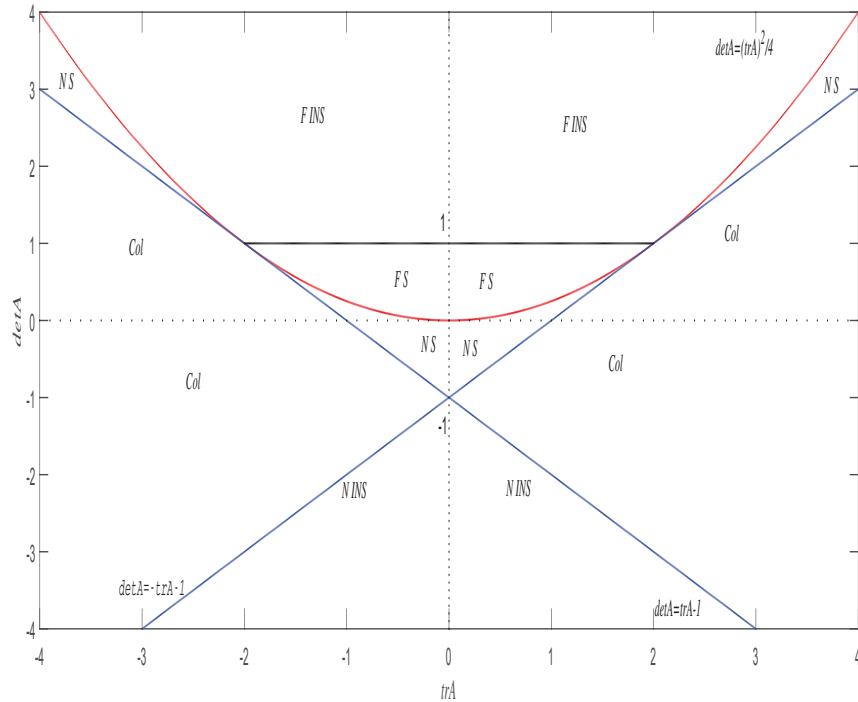
(a) 0 est un point col (i.e.  $(\lambda_1 > 1$  et  $|\lambda_2| < 1)$  ou  $(|\lambda_1| < 1$  et  $\lambda_2 < -1)$ )

ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} P(1) < 0 \text{ et } P(-1) > 0 \\ \text{ou} \\ P(1) > 0 \text{ et } P(-1) < 0 \end{array} \right.$$

i.e. ssi

$$\left\{ \begin{array}{l} -tr(A) - 1 < \det(A) < tr(A) - 1 \\ \text{ou} \\ tr(A) - 1 < \det(A) < -tr(A) - 1 \end{array} \right.$$

FIGURE 3.11: Caractérisation des solutions en fonction de  $tr(A)$  et  $det(A)$ .

(b) 0 est un noeud stable ( $|\lambda_{1,2}| < 1$ ) ssi

$$P(1) > 0 \text{ et } P(-1) > 0,$$

i.e. ssi

$$\det(A) > \operatorname{tr}(A) - 1 \text{ et } \det(A) > -\operatorname{tr}(A) - 1.$$

(c) 0 est un noeud instable ( $|\lambda_{1,2}| > 1$ ) ssi

$$P(1) < 0 \text{ et } P(-1) < 0,$$

i.e. ssi

$$\det(A) < \operatorname{tr}(A) - 1 \text{ et } \det(A) < -\operatorname{tr}(A) - 1.$$

2. Si  $(\operatorname{tr}(A))^2 < 4\det(A)$  alors  $\lambda_{1,2}$  sont complexes de plus

(a) 0 est un foyer stable ssi  $\det(A) < 1$ .

(b) 0 est un foyer instable ssi  $\det(A) > 1$ .

## 3.2 Systèmes dynamiques non-linéaires discrets bi-dimensionnelles

Un système non-linéaire discret de dimension 2 est donné par

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = f \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \\ f_2 \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \end{pmatrix},$$

ou bien

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = f_2(x_n, y_n), \end{cases} \quad (3.16)$$

$f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  étant des fonctions continues, uniformes, non-linéaires, des variables réelles  $x, y$ . Les propriétés des solutions du système (3.16) sont très complexes par rapport à celles de la récurrence (3.1). En particulier, les solutions ne s'expriment pas, sauf cas exceptionnel, à l'aide des fonctions transcendentes connues, sous forme finie, et il est nécessaire de les caractériser à travers les singularités du système (3.16).

### 3.2.1 Stabilité locale

#### 1. *Points fixes :*

Le cas non-linéaire conduit donc à la possibilité d'existence de plusieurs points fixes. Soit  $X^*$  un point fixe pour le système (3.16), alors si  $f_1(x, y)$ ,  $f_2(x, y)$  sont au moins une fois différentiables (classe  $C_1$ ) au point  $X^* = (x^*, y^*)$ , un développement de Taylor au voisinage de  $X^*$  donne

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(X^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) + \bar{X} \\ y_{n+1} = f_2(X^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) + \bar{Y} \end{cases}$$

$\bar{X}$  et  $\bar{Y}$  sont les termes non linéaires. Lorsque  $X$  est très proche de  $X^*$  les termes non-linéaires deviennent négligeables devant le terme linéaire et le système non-linéaire est approximé par le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} x_{n+1} - x^* = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) \\ y_{n+1} - y^* = \left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)(X^*)(x_n - x^*) + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)(X^*)(y_n - y^*) \end{cases} \quad (3.17)$$