Table des matières

Chapitre 1

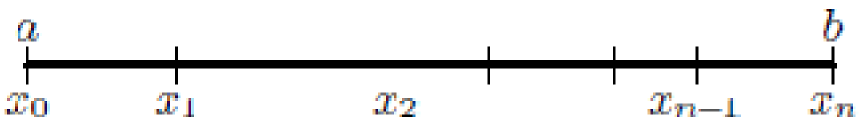
Calcule intégrale

1.1 *Intégrales définies*

1.1.1 *Subdivision*

Définition 1.1.1 *:*

Soit f une fonction définie et bornée sur $[a,b]$. On appelle subdivision de $[a,b]$ toute partie d finie des points de $[a,b]$ contenant a et b, une telle subdivision peut donc s'écrire de façon unique $d = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\} \subset [a,b]$ où $x_0 = a < x_1 < x_2 < .... < x_n = b$ et déterminé n intervalle $[x_{i-1}, x_i]$; $i = \overline{1.n}$ appelle intervalle partiel de la subdivision .

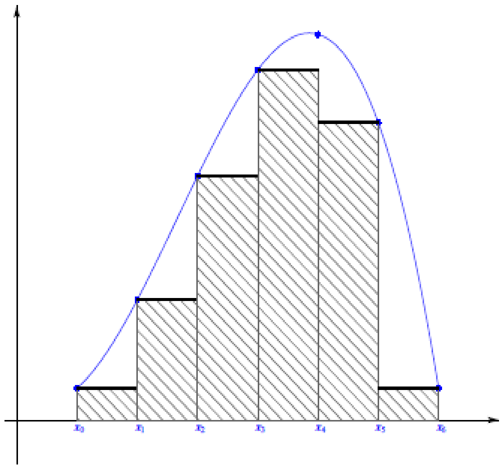


Subdivision

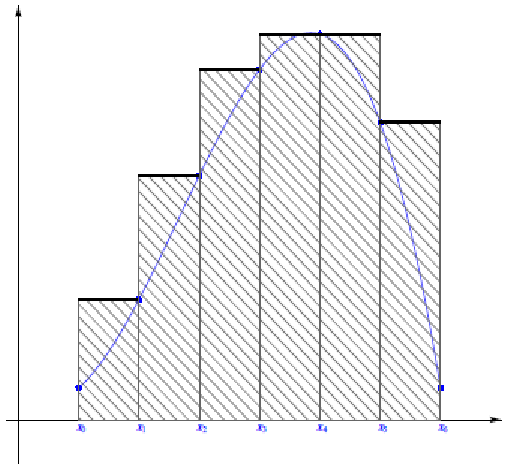
Définition 1.1.2 *:*

Soit $d = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$. Le réel strictement positif $\delta(d) = \max(x_i - x_{i-1})$ est appelé pas de la subdivision.

1.1.2 *Somme de Darboux*



Somme de Darboux inférieure



Somme de Darboux supérieure

Soit f une fonction bornée sur $[a,b]$ et $d = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a,b]$.

Posons

$$\begin{aligned} m_i(f,d) &= \inf_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)\,; \qquad i = \overline{1.n} \\ M_i(f,d) &= \sup_{x_{i-1} \leq x \leq x_i} f(x)\,; \qquad i = \overline{1.n} \end{aligned}$$

les nombres m_i, M_i *sont toujours finis puisque* f *est bornée.*

Définition 1.1.3 *:*

Considérons

$$\begin{aligned} s &= s(f,d) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})\,. \\ S &= S(f,d) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1})\,. \end{aligned}$$

ces deux sommes sont dites sommes de Darboux respectivement inférieure et supérieure de f.

relativement à chaque f définie et bornée sur $[a,b]$ associons l'ensemble $D_*(f)$ (resp $D^*(f)$) constitue par les sommes de Darboux inférieures (resp supérieures) obtenus avec toutes les subdivisions possibles de $[a,b]$.

Définition 1.1.4 *:*

La borne supérieure de l'ensemble $D_*(f)$ et la borne inférieure de l'ensemble $D^*(f)$ serrant notées

$$\int_{*a}^{b} f(x)\,dx = \sup D_*(f) \quad et \quad \int_{a}^{*b} f(x)\,dx = \inf D^*(f).$$

et appelle intégrale inférieure et intégrale supérieure de Darboux de f sur $[a,b]$.

1.1.3 Propriétés de la somme de Darboux:

Proposition 1.1.1

$$\forall d \subset [a,b] : S(f,d) \geq s(f,d).$$

Proposition 1.1.2 *Si $d \subset d'$, alors:*

$$\begin{aligned} s(f,d) &\leq s(f,d'). \\ S(f,d) &\geq S(f,d'). \end{aligned}$$

Proposition 1.1.3

$$\forall d,d' \subset [a,b] : s(f,d) \leq \int_{*a}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{b} f(x)\,dx \leq \int_{a}^{*b} f(x)\,dx \leq S(f,d').$$

1.1.4 *Fonctions intégrables; intégrales de Riemann*

Définition 1.1.5 *:*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée. On dit f est intégral au sens de Riemann sur $[a,b]$ si:

$$\int_{*a}^{b} f(x)\,dx = \int_{a}^{*b} f(x)\,dx.$$

La valeur de l'intégrale inférieure et de l'intégrale supérieure est appelée intégrale de Riemann de f sur $[a,b]$ est notée $\int_{a}^{b} f(x)\,dx$.

Théorème 1.1.1 *:*

Pour une fonction bornée $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *soit intégrable il faut et il suffit que:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists d \subset [a, b] \, ; S(f, d) - s(f, d) < \varepsilon.$$

Théorème 1.1.2 *:*

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est bornée alors:*

$$\int_a^{*b} f dx = \lim_{\delta(d) \to 0} S(f, d) \quad et \quad \int_{*a}^{b} f dx = \lim_{\delta(d) \to 0} s(f, d).$$

Théorème 1.1.3 *:*

Si f *est intégral au sens de Riemann, alors:*

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{\delta(d) \to 0} S(f, d) = \lim_{\delta(d) \to 0} s(f, d).$$

Théorème 1.1.4 *:*

Toute fonction bornée et monotone sur $[a, b]$ *est intégrable sur* $[a, b]$.

Théorème 1.1.5 *:*

Toute fonction continue sur $[a, b]$ *est intégrable sur* $[a, b]$.

1.1.5 *Sommes de Riemann*

Soit $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction bornée et $d = \{x_0, ..., x_n\}$ une subdivision de $[a, b]$.

Définition 1.1.6 *:*

La somme $\sigma(f, d) = \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)(x_i - x_{i-1})$ *où* $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$; $i = \overline{1.n}$ *est dit somme de Riemann de* f *correspondant à* d *et au système de points* $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, ..., \zeta_n)$.

Définition 1.1.7 *:*

On dit que le nombre A *est la limite de* $\sigma(f, d, \zeta)$ *lorsque* $\delta(d)$ *tend vers* 0 *et on écrit:* $A = \lim_{\delta(d) \to 0} \sigma(f, d, \zeta)$ *si:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \tau > 0, \forall \sigma(f, d, \zeta) \, ; \delta(d) < \tau \Longrightarrow |\sigma(f, d, \zeta) - A| < \varepsilon.$$

Théorème 1.1.6 *:*

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *est intégrable alors:*

$$A = \lim_{\delta(d) \to 0} \sigma(f, d, \zeta) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

Cas particulier:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f(a+k\frac{b-a}{n}).$$

Exemple 1.1.1 *:*

Calculer $I = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+k) - \ln(n))$.

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+k) - \ln(n)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(\frac{n+k}{n}) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ln(1+\frac{k}{n}). \end{aligned}$$

alors $f(x) = \ln x$; $a = 1$ *et* $b = 2$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} b-a=1 \\ et \\ 1+\frac{k}{n} = a+k\frac{b-a}{n} \end{pmatrix} &\Longrightarrow \begin{pmatrix} b=a+1 \\ 1+\frac{k}{n} = a+k\frac{(a+1-a)}{n} \end{pmatrix} \\ &\Longrightarrow a=1 \quad et \quad b=2. \end{aligned}$$

Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (\ln(n+k) - \ln(k)) = \int_1^2 \ln x dx.$$

1.1.6 *Propriété de l'intégrale de Riemann*

Soient f *et* g *deux fonctions bornées et intégrables sur* $[a,b]$, $c \in [a,b]$ *et* $\alpha \in \mathbb{R}$

1) $\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

3) $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

4) $\int_a^b (\alpha f(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx.$

5) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$

6) $\left| \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$

7) $f(x) \leq g(x), \forall x \in [a,b] \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

8) $f(x) \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

mais si $f \geq 0$ *et continue sur* $[a,b]$ *et si* $\int_a^b f(x)\,dx = 0 \Longrightarrow f = 0$ *sur* $[a,b]$.

1.1.7 *Théorème de moyenne*

Si f *et* g *sont deux fonctions bornées et intégrables sur* $[a,b]$. Si $g \geq 0$ et si $m \leq f(x) \leq M, \quad \forall m, M \in \mathbb{R}$ *alors:*

$$m \int_a^b g(x)\,dx \leq \int_a^b f(x) . g(x)\,dx \leq M \int_a^b g(x)\,dx.$$

Cas particuliers:

1) *Si* $g = 1$ *on obtient:*

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

2) <u>*Première formule de la moyenne:*</u> *Si* f *est une fonction continue sur* $[a,b]$ *et si* g *est une fonction bornée intégrable, de signe constant sur* $[a,b]$, *alors il existe un élément* $c \in [a,b]$ *tel que:*

$$\int_a^b f(x) . g(x)\,dx = f(c) \int_a^b g(x)\,dx.$$

Si $g = 1$, *on obtient la:*

3) *Deuxième formule de la moyenne:* *Si une fonction f est continue sur $[a,b]$, il existe un élément $c \in [a,b]$ tel que:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c).$$

Le nombre $f(c)$ est appelé valeur *moyenne* de f sur $[a,b]$.

1.1.8 *Inégalité de Cauchy-Schwarz*

Si f et g sont deux fonction bornées et intégrables sur $[a,b]$, on a:

$$\left(\int_a^b f(x)\,.g(x)\,dx\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,dx.\int_a^b g^2(x)\,dx.$$

1.1.9 *Primitive d'une fonction continue*

Définition 1.1.8 *:*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On dit qu'une fonction dérivable $F : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est une primitive de f si: $\forall x \in [a,b]\,;\ \ F'(x) = f(x)$.

Théorème 1.1.7 *:*

Toute fonction continue $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ admet une primitive.
L'application $x \longmapsto F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ est une primitive de f.

1.1.10 *Procédé général de calcul l'intégrale*

1- *Intégrations par parties* *Soient f et $g \in C^1([a,b])$ alors:*

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(b)\,g(b) - f(a)\,g(a) - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx.$$

Exemple 1.1.2 *:*

$I = \int_0^1 arctgx\ dx$

$$\begin{cases} f(x) = arctgx \\ \quad et \\ g'(x) = dx \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} \\ \quad et \\ g(x) = x \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 arctgx dx \\
&= xarctgx]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx \\
&= 1arctg1 - 0 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\Big]_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(2).
\end{aligned}$$

2- *Changement de variable* *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et $g \in C^1([a,b])$*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)\, dx = \int_a^b f(g(t))\, g'(t)\, dt$$

Exemple 1.1.3 *:*

Calcule l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \cos^4 x \sin x dx$

On pose $t = \cos x \Longrightarrow dt = -\sin x dx$

$$\begin{cases} si\ x = 0 \Longrightarrow t = 1 \\ si\ x = \pi \Longrightarrow t = -1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^{\pi} \cos^4 x \sin x dx \\
&= \int_1^{-1} t^4(-dt) = \int_{-1}^{1} t^4 dt \\
&= \frac{1}{5}t^5\Big]_{-1}^{1} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.
\end{aligned}$$

1.2 *Intégrales indéfinies*

Définition 1.2.1 *:*

L'ensemble de Toutes les primitives de la fonction $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est appelé intégrale indéfinie de f et notée $\int f dx$, ainsi: F est une fonction primitive de f on a:

$$\int f dx = F + c \qquad où\ c\ est\ constant$$

Exemple 1.2.1 *:*

$I = \int \sin x dx = -\cos x + c.$

1.2.1 *Changement de variable et intégration par parties dans les intégrales indéfinies*

1- ***Changements de variables***

Soit I *et* J *deux intervalles et* $h : J \longrightarrow I$ *de classe* $C^1(J)$.

Théorème 1.2.1 *:*

Soit $f \in C(I)$ *alors:*

$$F = \int f dx \Longrightarrow F \circ h = \int (f \circ h) h' dx.$$

Autrement dit, si F *est primitive de* f *alors* $F \circ h$ *est une primitive de* $(f \circ h) h'$.

$\int f(x) dx = \int f(h(t)) h'(t) dt; \quad x = h(t) \Longrightarrow dx = h'(t) dt$

En effet le changement de variable $x = h(t)$.

Exemple 1.2.2 *:*

Calculer $\int \cos^3 t dt$

$$\int \cos^3 t dt = f(h(t)) h'(t) dt$$

donc

$$\cos^3 t dt = \cos^2 t \cos t dt = \cos^2 t (\sin t)' dt = \left(1 - \sin^2 t\right) (\sin t)' dt$$

On pose $x = \sin t$

$$\cos^2 t \cos t dt = (1 - x^2) dx \text{ alors}$$

$$\int \cos^3 t dt = \int (1 - x^2) dx = x - \frac{1}{3}x^3 + c = \sin t - \frac{1}{3}\sin^3 t + c.$$

2- ***intégration par parties***

Théorème 1.2.2 *:*

Soient $u, v : I \longrightarrow \mathbb{R}$; $u, v \in C^1(I)$ *alors:* $\int u'v dx = uv - \int uv' dx.$

Exemple 1.2.3 *:*

1) $\int xe^{-x}dx$

$$\begin{cases} u' = e^{-x} \\ v = x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = -e^{-x} \\ v' = 1.dx \end{cases}$$

$$\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c.$$

2) $\int x\ln x dx$

$$\begin{cases} u' = x \\ v = \ln x \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = \frac{1}{2}x^2 \\ v' = \frac{1}{x} \end{cases}$$

$$\int x\ln x dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{2}\int x^2 \times \frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + c.$$

1.2.2 *Primitive de fractions rationnelles*

Toute fraction rationnelle s'écrit d'une seule manière comme somme d'un polynôme et d'un nombre fini de fractions rationnelles (éléments simples) de la forme $\frac{A}{(x-a)^k}$, $\frac{Mx+N}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^k}$, ... *On est donc ramené à chercher des primitives du polynôme et chacun des éléments simples il n'y a aucune difficulté à intégral polynôme ainsi que les éléments simples de première espèce* $\frac{A}{(x-a)^k}$.

$$\int \frac{1}{(x-a)^k}dx = -\frac{1}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + c, \;\; k > 1, a \in \mathbb{R}.$$

$$\int \frac{1}{(x-a)}dx = \ln|x-a| + c, \;\; a \in \mathbb{R}.$$

L'intégration des éléments simples de seconde espèce $\frac{Mx+N}{\left((x-\alpha)^2+\beta^2\right)^k}$

Se ramener par le changement de variable $x = \alpha + \beta t$, *on calcule les intégrales*

$$I_k = \int \frac{t}{(1+t^2)^k}dt; \qquad J_k = \int \frac{1}{(1+t^2)^k}dt.$$

- *Le calcul de* I_k *est immédiat en effet le changement de variable* $u = 1 + t^2$ *alors* $I_k = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u^k}$ *d'où:*

* *pour* $k=1$: $I_1 = \frac{1}{2}\ln(1+t^2)+c.$

* *pour* $k>1$: $I_k = \frac{-1}{2(k-1)(1+t^2)^{k-1}}+c.$

- *Pour le calcul de* J_k *une intégration par parties nous donne:*

$$\begin{cases} u' = dt \\ v = \frac{1}{(1+t^2)^k} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = t \\ v' = -k\frac{2t(1+t^2)^{k-1}}{(1+t^2)^{2k}} = -k\frac{2t}{(1+t^2)^{k+1}} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} J_k &= \int \frac{1}{(1+t^2)^k}dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k\int \frac{t^2}{(1+t^2)^{k+1}}dt \\ &= \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2k\int \frac{1}{(1+t^2)^k}dt - 2k\int \frac{1}{(1+t^2)^{k+1}}dt. \end{aligned}$$

on a: $J_{k+1} = \int \frac{1}{(1+t^2)^{k+1}}dt$ *alors*

$$J_k = \frac{t}{(1+t^2)^k} + 2kJ_k - 2kJ_{k+1}$$

d'où la relation de récurrence:

$$2kJ_{k+1} = \frac{t}{(1+t^2)^k} + (2k-1)J_k \qquad (I)$$

Le calcul à se ramener à celui de:

$$J_1 = \int \frac{1}{1+t^2}dt = arctg\ t + c.$$

Exemple 1.2.4 *:*

calculer:

1) $I = \int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx$

$$\begin{aligned} \frac{x+3}{x^2-3x+2} &= \frac{x+3}{(x-2)(x-1)} = \frac{a}{x-2} + \frac{b}{x-1} \\ &= \frac{5}{x-2} - \frac{4}{x-1}. \end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x+3}{x^2-3x+2}dx \\
&= \int \left(\frac{5}{x-2} - \frac{4}{x-1}\right) dx \\
&= \int \frac{5}{x-2}dx - \int \frac{4}{x-1}dx \\
&= 5\ln|x-2| - 4\ln|x-1| + c.
\end{aligned}$$

2) $J = \displaystyle\int \frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)}dx$

$$\begin{aligned}
\frac{5x-1}{(x+2)^2(x^2-1)} &= \frac{a}{(x+2)} + \frac{b}{(x+2)^2} + \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x+1} \\
&= \frac{1}{9}\left(\frac{-29}{(x+2)} - \frac{33}{(x+2)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{27}{x+1}\right)
\end{aligned}$$

alors:

$$\begin{aligned}
J &= \frac{1}{9}\int \left(\frac{-29}{(x+2)} - \frac{33}{(x+2)^2} + \frac{2}{x-1} + \frac{27}{x+1}\right) dx \\
&= \frac{1}{9}\int \frac{-29}{(x+2)}dx - \frac{1}{9}\int \frac{33}{(x+2)^2}dx + \frac{1}{9}\int \frac{2}{x-1}dx + \frac{1}{9}\int \frac{27}{x+1}dx \\
&= -\frac{29}{9}\ln|x+2| + \frac{33}{9}\frac{1}{(x+2)} + \frac{2}{9}\ln|x-1| + \frac{27}{9}\ln|x+1| + c \\
&= -\frac{29}{9}\ln|x+2| + \frac{11}{3}\frac{1}{(x+2)} + \frac{2}{9}\ln|x-1| + 3\ln|x+1| + c.
\end{aligned}$$

3) $L = \displaystyle\int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}dx$

$$\begin{aligned}
L &= \int \frac{x+1}{(x^2-2x+3)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2(x+1)}{(x^2-2x+3)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2+4}{(x^2-2x+3)^2}dx \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{(x^2-2x+3)^2}dx + 2\int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}dx
\end{aligned}$$

On pose $L_1 = \displaystyle\int \frac{2x-2}{(x^2-2x+3)^2}dx$ *et* $L_2 = \displaystyle\int \frac{1}{(x^2-2x+3)^2}dx$ *alors*

$$L_1 = \int \frac{2x-2}{(x^2-2x+3)^2}dx = -\frac{1}{(x^2-2x+3)}.$$

Maintenant calculé $L_2 = \displaystyle\int \frac{1}{\left(x^2-2x+3\right)^2}dx$

on a: $x^2-2x+3 = \left(x-1\right)^2+2 = 2\left(\dfrac{\left(x-1\right)^2}{2}+1\right) = 2\left(\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)$

on pose $t = \dfrac{x-1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow dt = \dfrac{1}{\sqrt{2}}dx \Longrightarrow dx = \sqrt{2}dt$ *donc:*

$$\begin{aligned} L_2 &= \int \frac{1}{\left(x^2-2x+3\right)^2}dx = \int \frac{1}{\left(2\left(\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2+1\right)\right)^2}dx \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\underbrace{\int \frac{1}{\left(t^2+1\right)^2}dt}_{J_2}. \end{aligned}$$

d'après (I) *pour* $k=1$

$$2kJ_{k+1} = \frac{t}{\left(1+t^2\right)^k} + \left(2k-1\right)J_k \Longrightarrow 2J_2 = \frac{t}{\left(1+t^2\right)} + J_1 \Longrightarrow J_2 = \frac{1}{2}\frac{t}{\left(1+t^2\right)} + \frac{1}{2}J_1$$

où $J_1 = \displaystyle\int \frac{1}{1+t^2}dt = arctg\ t$

donc

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\frac{1}{2}\frac{t}{\left(1+t^2\right)} + \frac{1}{2}J_1\right) = \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{t}{\left(1+t^2\right)} + \frac{\sqrt{2}}{8}J_1 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{t}{\left(1+t^2\right)} + \frac{\sqrt{2}}{8}arctg\ t \\ &= \frac{\sqrt{2}}{8}\frac{\frac{x-1}{\sqrt{2}}}{\left(1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2\right)} + \frac{\sqrt{2}}{8}arctg\ \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \frac{x-1}{4\left(x^2-2x+3\right)} + \frac{\sqrt{2}}{8}arctg\ \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right). \end{aligned}$$

Alors:

$$\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{2\left(x^2-2x+3\right)}+2\left(\frac{x-1}{4\left(x^2-2x+3\right)}+\frac{\sqrt{2}}{8}arctg\ \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\right) \\
&= -\frac{1}{2\left(x^2-2x+3\right)}+\frac{x-1}{2\left(x^2-2x+3\right)}+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\ \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+c \\
&= \frac{x-2}{2\left(x^2-2x+3\right)}+\frac{\sqrt{2}}{4}arctg\ \left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)+c
\end{aligned}$$

1.2.3 *Primitive d'une fonction rationnelle de* $\sin x$ *et* $\cos x$

Soit à calculer $I=\displaystyle\int R\left(\sin x,\cos x\right)dx$ où R *est une fonction rationnelle de* $\sin x$ *et* $\cos x$.

***Méthode générale*:** *Il est toujours possible de ramener cette intégration a celle d'une fraction rationnelle par le changement de variable* $t=tg\ \dfrac{x}{2}$, *on a alors les formules:*

$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2}\quad ,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\quad et\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}$$

Exemple 1.2.5 *:*

1)

$$\begin{aligned}
I &= \int\frac{1}{\sin x}dx=\int\frac{1}{\frac{2t}{1+t^2}}\times\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2}{2t}\times\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1}{t}dt=\ln|t|+c \\
&= \ln\left|tg\ \frac{x}{2}\right|+c.
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
J &= \int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{1}{\frac{1-t^2}{1+t^2}}\times\frac{2dt}{1+t^2}=\int\frac{1+t^2}{1-t^2}\times\frac{2dt}{1+t^2}=2\int\frac{1}{1-t^2}dt \\
&= 2\int\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-t}+\frac{\frac{1}{2}}{1+t}\right)dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int \frac{1}{1-t}dt + \int \frac{1}{1+t}dt \\
&= -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c \\
&= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{1+tg\ \frac{x}{2}}{1-tg\ \frac{x}{2}}\right| + c.
\end{aligned}$$

***<u>Cas particulier</u>*:** *Dans les cas suivants les changements des variables sont évidents:*

$$\begin{aligned}
\int R(\sin x)\cos x dx \quad \textit{on pose} \quad t &= \sin x \\
\int R(\cos x)\sin x dx \quad \textit{on pose} \quad t &= \cos x \\
\int R(tg\ x)\frac{1}{\cos^2 x}dx \quad \textit{on pose} \quad t &= tg\ x
\end{aligned}$$

Exemple 1.2.6 *:*

$$I = \int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx$$

on pose $t = \cos x \Longrightarrow dt = -\sin x dx \Longrightarrow dx = -\dfrac{dt}{\sin x}$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sin^5 x}{\cos x}dx \\
&= -\int \frac{\sin^5 x}{\cos x}.\frac{dt}{\sin x} \\
&= -\int \frac{\sin^4 x}{\cos x}dt \\
&= -\int \frac{\left(1-\cos^2 x\right)^2}{\cos x}dt \\
&= -\int \frac{\left(1-t^2\right)^2}{t}dt \\
&= -\left(\int \frac{1}{t}dt - 2\int tdt + \int t^3 dt\right) \\
&= -\ln|t| + t^2 - \frac{1}{4}t^4 + c \\
&= -\ln|\cos x| + \cos^2 x - \frac{1}{4}\cos^4 x + c.
\end{aligned}$$

1.2.4 *Intégration des fonctions rationnelles en* e^x

Il est toujours possible de ramener cette intégration d'une fraction rationnelle par le changement de variable $t = e^x$.

Exemple 1.2.7 *:*

$$I = \int \frac{1}{1+e^x}dx$$

$$\text{on pose } t = e^x \Longrightarrow dt = e^x dx \Longrightarrow dx = \frac{dt}{e^x} = \frac{dt}{t}$$

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{1}{1+e^x}dx = \int \frac{1}{(1+t)}\frac{dt}{t} \\
&= \int \left(\frac{a}{(1+t)} + \frac{b}{t}\right) dt, \qquad (a=-1, b=1) \\
&= \int \left(\frac{-1}{(1+t)} + \frac{1}{t}\right) dt \\
&= \int \frac{-1}{(1+t)}dt + \int \frac{1}{t}dt \\
&= -\ln|1+t| + \ln|t| + c \\
&= \ln\left|\frac{t}{1+t}\right| + c \\
&= \ln\left|\frac{e^x}{1+e^x}\right| + c.
\end{aligned}$$