الفصل الثاني: الكهرباء الساكنة

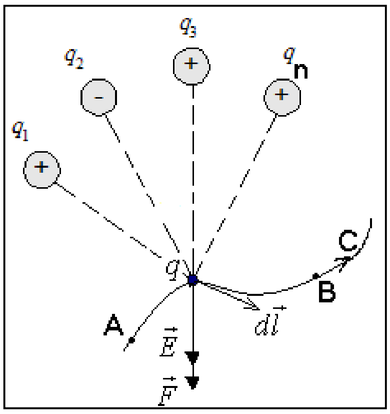
2 ـ الكمون الكهربائي

مقدمة:

هذا الفصل يعنى بدراسة مفهوم الكمون الكهربائي. هذا المفهوم يساعدنا على حساب الطاقة الكامنة لشحنة أو مجموعة من الشحن موجودة بجوار شحن أخرى وبما أن القوة الكهربائية قوة محافظة فهذا يسمح لنا بإدخال مفهوم الطاقة الكامنة الكهربائية وتطبيق قانون مصونية الطاقة في مسائل الكهرباء وحيث أن الجهد (الكمون) الكهربائي مقدار قياسي سيكون التعامل معه أسهل في التعبير عن التأثير الكهربائي من الحقل الكهربائي.

عمل قوة كهربائية:

لتكن لدينا مجموعة من الشحن النقطية $q_1, q_2, ...,q_n$ الحقل الكهربائي الذي تولده هذه الشحن في نقطة كيفية M هو



$$\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

إذا وضعت شحنة q عند النقطة M في منطقة من الفضاء التي يسود فيها الحقل $\vec{E}$ فإنها ستخضع لقوة كهربائية

$$\vec{F} = q\vec{E} = q\sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i = q\sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{r_i^2} \vec{u}_i$$

إذا انتقلت الشحنة q من النقطة A إلى النقطة B وفق المنحنى C فعمل القوة الكهربائية $\vec{F}$ يعطى بالعلاقة

* العمل العنصري $dw = \vec{F}.d\vec{l}$

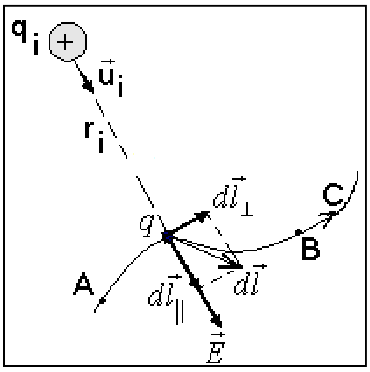
*العمل الكلي للقوة $\vec{F}$ هو

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E}d\vec{l} ....(1)$$

مفهوم تجوال الحقل الكهربائي:

ليكن الحقل الشعاعي $\vec{a}$, بالتعريف تجوال شعاع الحقل $\vec{a}$ بين النقطتين Aو B على طول المسار الموجه C هو المقدار

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{a}.d\vec{l}$$



إذا كان الشعاع $\vec{a}$ يمثل الحقل الكهربائي $\vec{E}$ فتجوال شعاع الحقل بين النقطتين A و B

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}.d\vec{l} ....(2)$$

يعطى الحقل الكهربائي الناتج عن الشحنة q_i في النقطة M بالعلاقة $\vec{E}_i(M) = \frac{kq_i}{r_i^2} \vec{u}_i$

لنحلل شعاع الانتقال $d\vec{l}$ إلى مركبتين, مركبة موازية $d\vec{l}_\parallel$ لشعاع الحقل $\vec{E}_i$ ومركبة

$d\vec{l}_\perp$ عمودية عليه $\qquad d\vec{l}=d\vec{l}_\parallel+d\vec{l}_\perp$

$$\vec{E}_i.d\vec{l}=\vec{E}_i\left(d\vec{l}_\parallel+d\vec{l}_\perp\right)=\vec{E}.d\vec{l}_\parallel=\left\|\vec{E}_i\right\|\left\|d\vec{l}_\parallel\right\|$$

مركبة شعاع الانتقال الموازية لشعاع الحقل يمكن كتابتها على الشكل $d\vec{l}_\parallel=dr_i.\vec{u}_i$

ومنه الجداء السلمي $\qquad \vec{E}_i.d\vec{l}_i=\left(\frac{kq_i}{r_i^2}\vec{u}\right)(dr_i\vec{u}_i)=\frac{kq_i}{r_i^2}dr_i......(3)$

العلاقة رقم 3 يمكن كتابتها على الشكل

$$\vec{E}_i.d\vec{l}_i=(E_i)(dr_i)=\frac{kq_i}{r_i^2}dr_i=-kq_i.d\left(\frac{1}{r_i}\right)......(4)$$

* تجوال الحقل بين النقطتين A وB $\qquad C_{AB}=\int_A^B\vec{E}_i.d\vec{l}=\int_A^B(E_i)(dr_i)$

$$C_{AB}=\int_A^B\vec{E}_i.d\vec{l}=\int_A^B\frac{kq_i}{r_i^2}dr_i=-kq_i.\int_A^B d\left(\frac{1}{r_i}\right)......(5)$$

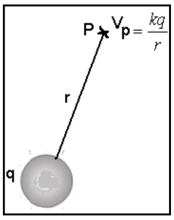
$$\boxed{C_{AB}=-kq_i.\left(\frac{1}{r_i}\right)_A^B=\left(\frac{kq_i}{r_A}-\frac{kq_i}{r_B}\right)......(6)}$$

- من العلاقة 6 نلاحظ أن تجوال الحقل الكهربائي لا يتعلق بالمسار المتبع و إنما يتعلق بنقطتي البداية والنهاية.
- تجوال الحقل الكهربائي على مسار مغلق معدوم $\quad C_{AA}=\left(\frac{kq}{r_A}-\frac{kq}{r_A}\right)=0$.

<u>الكمون الكهربائي:</u>

من العلاقة 6 لنضع $\boxed{V=\frac{kq}{r}+cte......(7)}$ هذا المقدار يسمى الكمون الكهربائي

وهو يمثل الكمون الذي ولدته الشحنة q في نقطة كيفية p من الفضاء المحيط بها والتي تبعد عنها بمسافة r.



بالنسبة للثابت ***cte*** فقيمته تتعلق بمبدأ قياس الكمون الذي يتم اختياره.

في حالة شحنة نقطية مبدأ قياس الكمون هو $V(r\to\infty)=0$

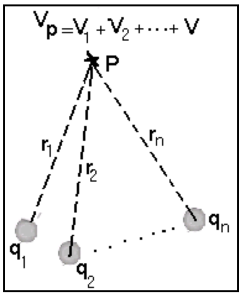
$$V(r\to\infty)=0\Rightarrow cte=0$$

$$\boxed{V=\frac{kq}{r}........(8)}$$

ملاحظة:في جملة الإحداثيات الديكارتية مثلا إذا كان موضع الشحنة q هو النقطة $A(x_A,y_A,z_A)$ فالكمون في النقطة $P(x_p,y_p,z_p)$ هو

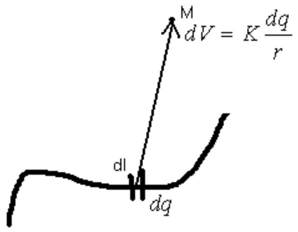
$$V=\frac{kq}{r}=\frac{kq}{\left\|\vec{AP}\right\|}=\frac{kq}{\sqrt{(x_A-x_p)^2+(y_A-y_p)^2+(z_A-z_p)^2}}$$

مبدأ التجميع: إذا كانت هناك مجموعة من الشحن فالكمون الكهربائي في نقطة كيفية P هو مجموع



الكمونات الناتجة عن كل شحنة على حدا

$$\boxed{V = V_1 + V_2 + ...V_n = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{kq_i}{r_i} ....(9)}$$



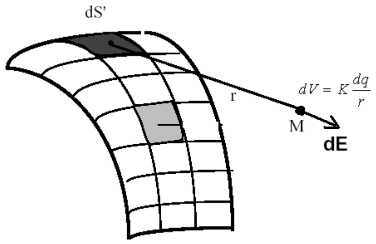
<u>الكمون الكهربائي في حالة التوزيع المستمر للشحنة:</u>

<u>أ. توزيع خطي:</u> $dV = K\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r}$

الكثافة الخطية للشحنة $\lambda = \frac{dq}{d\ell}$

$$V(M') = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_L \frac{\lambda d\ell}{r} ......(...)$$

<u>ب- توزيع سطحي:</u> الكمون الناتج في النقطة 'M عن الشحنة العنصرية dq التي يحملها السطح ds



$$dV(M') = K\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma ds}{r}$$

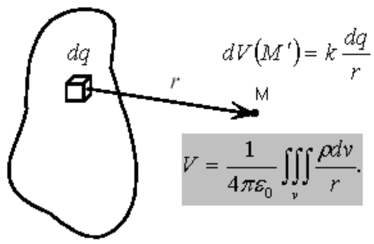
حيث $\sigma = \frac{dq}{ds}$ تمثل الكثافة السطحية للشحنة

الكمون الكلي الناتج عن السطح s

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma ds}{r} .....(...)$$

<u>ج- توزيع حجمي:</u> الكمون الناتج الشحنة العنصرية dq في النقطة 'M

$$dV(M') = k\frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho dv}{r}$$

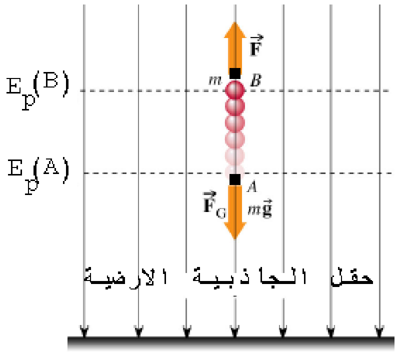


الكثافة الحجمية للشحنة $\rho = \frac{dq}{dv}$

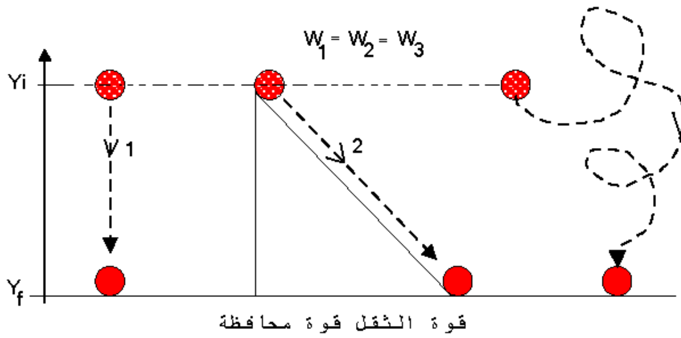
$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_v \frac{\rho dv}{r} ....(...)$$

<u>الطاقة الكامنة:</u>

توجد عدة أشكال للطاقة فأنت تعرف الطاقة الحركية لجسم كتلته m يتحرك بسرعة v: $E_C = \frac{1}{2}mv^2$ وتعرف الطاقة الكامنة. مثل الطاقة الكامنة الثقالية $E_p = mgh$ فعند رفع جسم كتلته m إلى ارتفاع h فوق سطح الأرض فإننا نقول أن عملا خارجيا تم بذله لتحريك الجسم ضد قوة الجاذبية الأرضية، وهذا العمل سوف يتحول إلى طاقة كامنة مخزنة في المجموعة المكونة من الجسم m والأرض. والطاقة الكامنة هذه تزداد بازدياد المسافة h لأنه بالطبع سيزداد العمل المبذول. هذه الأخيرة أي الطاقة الكامنة لا تتعلق سوى بموضع الجسم لذالك تعرف الطاقة الكامنة على أنها تساوي العمل اللازم بذله لجلب الجسم إلى وضعه النهائي.



$$W(F) = -W(F_G) = (U(B) - U(A))$$



الطاقة الكامنة الكهربائية:

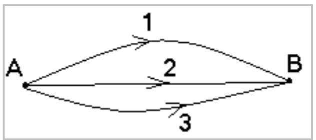
لنرجع لعبارة العمل (العلاقة رقم 1)
$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \int_A^B q\vec{E}d\vec{l}$$

لدينا $\vec{E} = \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i$ ومنه عبارة العمل
$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = q\int_A^B \sum_{i=1}^{n} \vec{E}_i d\vec{l} = q\sum_{i=1}^{n} \int_A^B \vec{E}_i d\vec{l}$$

$$W = q\sum_{i=1}^{n} \int_A^B \frac{kq_i}{r_i} \vec{u}_i d\vec{l}_i$$

$$W = q\sum_{i=1}^{n} \int_A^B \frac{kq_i}{r_i} dr_i = -q\sum_{i=1}^{n} \left(k\frac{q_i}{r_i}\right)_A^B = -q\sum_{i=1}^{n} \left(k\frac{q_i}{r_{iB}} - k\frac{q_i}{r_{iA}}\right) ......(10)$$

هذه العلاقة تبين لنا أن عمل القوة الكهربائية لا يتعلق بالمسار المتبع وإنما يتعلق بنقطتي البداية والنهاية فنقول أن القوة الكهربائية قوة محافظة (أو مشتقة من كمون). $W_{A1B} = W_{A2B} = W_{A3B}$



العلاقة 10 يمكن كتابتها على الشكل

$$W = -q\sum_{i=1}^{n} \left(k\frac{q_i}{r_i}\right)_A^B = -q\sum_{i=1}^{n} (V_i)_A^B = -q\left[\sum_{i=1}^{n} V_i(B) - \sum_{i=1}^{n} V_i(A)\right] = -q[V(B) - V(A)]......(11)$$

$$\boxed{W_{(\vec{F}_{el})} = -q[\Delta V]}$$

حيث q تمثل قيمة الشحنة , V(B) الكمون في النقطة B، V(A) الكمون في النقطة A

. العمل المنجز من قبل قوة كهربائية على شحنة يساوي قيمة الشحنة q مضروب في فرق الكمون بين النقطتين B و A .

. لنضع : $qV(A) = U(A)$ و $qV(B) = U(B)$

المقدار $\boxed{U_p = qV ....(12)}$ يسمى الطاقة الكامنة

. $qV(A) = U(A)$ هي الطاقة الكامنة للشحنة q عند النقطة A

$qV(B)=U(B)$ الطاقة الكامنة للشحنة q عند النقطةB.

. العمل المنجز من قبل قوة كهربائية على شحنة q يساوي ناقص التغير في الطاقة الكامنة للشحنة بين النقطتين B و A .

$$W_{A\to B}=-(U(B)-U(A))\text{.......}(13)$$

لنفرض أنه لدينا شحنة Q عند النقطة M ما هو العمل اللازم بذله لجلب شحنة q من النقطة A (حيث النقطة A موجودة ∞ →A و $V(\infty)=0$) إلى النقطة B التي كمونها V_B؟

يجب بذل قوة تساوي وتعاكس القوة الكهربائية الناتجة عن الشحنة Q: فالعمل المنجز يساوي ويعاكس عمل القوة الكهربائية

$$W_{A\to B}=-W_{el}=\left(U(B)\underbrace{-U(A)}_{0}\right)=U_p(B)=qV_B$$

و يساوي الطاقة الكامنة للشحنة q عند النقطة B وهذا هو تعريف الطاقة الكامنة.

. **ملاحظة:** وحدة الكمون الكهربائي هي الفولط (V).

وحدة الطاقة الكامنة هي الجول (J) وهي كبيرة نوعا ما بالنسبة للجسيمات الصغيرة لذلك تم إدخال وحدة جديدة وهي الإلكترون فولت éV وهي الطاقة الحركية لإلكترون تم تسريعه بكمون قدره واحد فولط 1V.

$$U=qV \qquad\qquad 1\text{év}=1.6\times10^{-19}\text{J}$$

– تعريف الكمون: لدينا العلاقة $U=qV$ ومنه $V=\frac{U}{q}$ إذا كان q=1 $V=U$ يمكن القول أن الكمون هو عبارة عن الطاقة الكامنة لواحدة الشحنة. (وهو يشابه تعريف الحقل الكهربائي $\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q}$ الحقل عبارة عن قوة لواحدة الشحنة).

الطاقة الداخلية:

1ـ حالـة جملـة مكونـة مـن شـحنتين: لتكن لدينا شحنة q_1 موجودة عند النقطة M_1. ما هي الطاقة اللازمة لجلب شحنة ثانية q_2 من ∞ إلى النقطة M_2 حيث الكمون هو V2 ؟

الشحنة q_2 في ∞ طاقتها الكامنة معدومة (لان الكمون $V(\infty)=0$)

لنقل الشحنة q_2 إلى غاية النقطة M_2 دون تغير طاقتها الحركية يجب بذل عمل يساوي الفرق في الطاقة الكامنة بين نقطتي البداية والنهاية

$$W_{\infty \to M2} = q_2\left(V(M2) - \underbrace{V(\infty)}_{0}\right) = q_2\left(\frac{Kq_1}{\left\|\overrightarrow{M_1M_2}\right\|}\right) = U_{12}$$

المقدار ***U12*** يسمى الطاقة الداخلية للجملة وهو يساوي الطاقة الكامنة لإحدى الشحنتين في حقل الشحنة الأخرى

$$U_{12} = U_{21} = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}}$$

1. حالة جملة مكونة من ثلاثة شحن:

لتكن لدينا الشحنة q_1 موجودة عند النقطة M_1. الشحنة q_2 موجودة عند النقطة M_2. الشحنة q_3 موجودة عند النقطة M_3.

لنفرض أننا جمعنا أولا الشحنتين q_1 و q_2 الطاقة الداخلية للجملة هي $U_{12} = U_{21} = \frac{Kq_1q_2}{r_{12}}$

لنأتي الآن بالشحنة الثالثة q_3 الطاقة الكامنة لهذه الشحنة في حقل الشحنة q_1 هي

$$U_{13} = U_{31} = \frac{Kq_1q_3}{r_{13}}$$

وفي حقل الشحنة q_2 هي:

$$U_{23} = U_{32} = \frac{Kq_2q_3}{r_{23}}$$

الطاقة الداخلية للجملة هي:

$$U = U_{13} + U_{23} + U_{21} = \frac{1}{2}\left(U_{13} + U_{31} + U_{21} + U_{12} + U_{23} + U_{32}\right)$$

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{3} \sum_{j=1}^{3}\left(U_{ij}\right) = \frac{k}{2}\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{3} \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{q_iq_j}{r_{ij}}\right)}$$

<u>العلاقة بين الحقل والكمون:</u>

من العلاقتين 5 و 6 لدينا

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = -kq.\int_A^B d\left(\frac{1}{r}\right) = -\left(\frac{kq}{r(B)} - \frac{kq}{r(A)}\right) = -\left(V(B) - V(A)\right)$$

$$\left(V(B) - V(A)\right) = \int_A^B dV$$

$$C_{AB} = \int_A^B \vec{E}.\vec{dl} = -\left(V(B) - V(A)\right) = -\int_A^B dV$$

$$\boxed{dV = -\vec{E}.\vec{dl}\ ......(17)}$$

بضرب طرفي العلاقة 17 في q $q(dV)=d(qV)=-q\vec{E}.\vec{dl}=-\vec{F}\vec{dl}$ $\boxed{dU_P=-\vec{F}.\vec{dl}}$

يمكن البرهان على العلاقة التالية إذا كانت f دالة سلمية فإن: $df=\overrightarrow{grad}f.\vec{dl}$

دالة الكمون الكهربائي (V) دالة سلمية: $dV=\overrightarrow{grad}V.\vec{dl}$

لدينا من العلاقة 17 $dV=-\vec{E}.\vec{dl}$

بالمطابقة بين العلاقتين السابقتين نستنتج:

$$\vec{E}=-\overrightarrow{grad}V......(18)$$

لدينا العلاقة الرياضية التالية: لتكن f دالة سلمية $\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}(f))=\vec{0}$.

$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}(V))=\vec{0}$ لكن $\overrightarrow{grad}V=-\vec{E}$

$\overrightarrow{Rot}(\overrightarrow{grad}(V))=-\overrightarrow{Rot}(E)=\vec{0}$

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{E})=\vec{0}.....(19)$$

دوران الحقل الكهربائي معدوم نقول أن الحقل مشتق من كمون V.

لنرجع للعلاقة 18 بضرب طرفي المعادلة في q نجد $q\vec{E}=-q.\overrightarrow{grad}(V)=-\overrightarrow{grad}(qV)$.

$$\vec{F}=-\overrightarrow{grad}(U_P)....(20)$$

من العلاقة 19 $q\,\overrightarrow{Rot}(\vec{E})=\overrightarrow{Rot}(q\vec{E})=\overrightarrow{Rot}(\vec{F})=\vec{0}$:

$$\overrightarrow{Rot}(\vec{F})=\vec{0}.....(21)$$

<u>القوة الكهربائية مشتقة من طاقة كامنة U_P (القوة الكهربائية قوة محافظة).</u>

<u>سطوح تساوي الجهد (الكمون):</u> هو مجموعة النقاط التي يكون لها نفس الكمون

$\boxed{V(M)=V_0=cte=\text{ثابت}}$

بعض خواص خطوط الحقل الكهربائي:

. خطوط الحقل تكون دوما عمودية على سطوح تساوي الكمون.

البرهان: لدينا العلاقة　　　$dV = -\vec{E}.d\vec{\ell}$

إذا تحركنا على سطح تساوي الكمون (الانتقال $d\vec{\ell}$ واقع على السطح)　$\boxed{V(M) = V_0 = cte = \text{ثابت}}$

فان $dV = 0$

$$\vec{E}.d\vec{\ell} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} \perp d\vec{\ell}$$

. يتناقص الكمون على طوال خط الحقل الكهربائي.

لنفرض أننا انتقلنا في اتجاه خط الحقل $\left(\vec{E} \| d\vec{\ell}\right)$

$$dV = -\vec{E}.d\vec{\ell} = -\left\|\vec{E}\right\|.\left\|d\vec{\ell}\right\|\cos(0) = -\left\|\vec{E}\right\|.\left\|d\vec{\ell}\right\| \prec 0$$

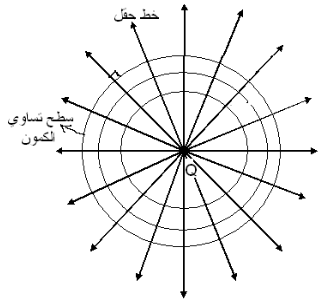
$$dV = V_2 - V_1 \prec 0 \Leftrightarrow V_2 \prec V_1$$

خطوط الحقل تتجه من الكمون الأعلى إلى الكمون الأقل.

<u>**مثال:**</u> شحنة كهربائية Q موجودة عند النقطة $P(x_0,y_0,z_0)$. أوجد معادلة سطوح تساوي الكمون.

<u>**الحل:**</u> على سطح تساوي الكمون　　$V(M) = c = \text{ثابت}$

الكمون الكهربائي الذي تولده الشحنة Q في نقطة كيفية $M(x,y,z)$ هو　$V(M) = \dfrac{KQ}{r} = \dfrac{KQ}{\left\|\vec{PM}\right\|}$



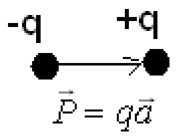
$$V(M) = \frac{KQ}{r} = \frac{KQ}{\left\|\vec{PM}\right\|} = c \qquad \Leftarrow V(M) = c = \text{ثابت}$$

$$\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} = C' \Leftarrow \left\|\vec{PM}\right\| = \frac{KQ}{C} = C'$$

$\boxed{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = C'^2}$ وهي معادلة كرة مركزها النقطة $P(x_0,y_0,z_0)$

إذن سطوح تساوي الكمون عبارة عن كرات مركزها النقطة $P(x_0,y_0,z_0)$.

<u>**ثنائي القطب الكهربائي:**</u>



. عبارة عن شحنتين نقطيتين متساويتين في المقدار ومتعاكستين في الإشارة.

. عزم ثنائي القطب بالتعريف هو $\vec{P} = q\vec{a}$ اتجاهه من الشحنة السالبة إلى المو