

Chapitre 02 : Calcul des pièces sollicitées en compression simple :

Le flambement (partie 01)

1- Utilisation des pièces comprimées :

Un composant est dit comprimé ou en compression pure lorsque ses extrémités sont soumises à des efforts qui imposent un rétrécissement uniforme à toutes ses fibres. Dans une section quelconque, la résultante des efforts se réduit à un effort normal appliqué au centre de gravité de la section et dirigé vers l'intérieur de l'élément (figure 1).

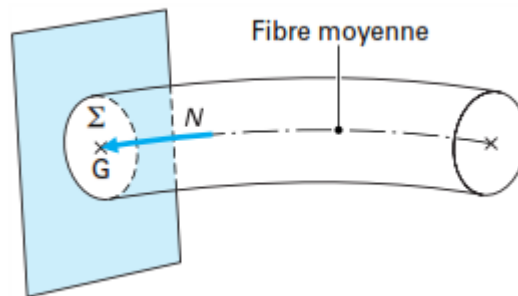


Figure 1 : Section soumise à un effort de compression.

Les composants comprimés ont cette particularité qu'au-delà d'un certain niveau de l'effort de compression, des instabilités géométriques apparaissent. Ces instabilités de forme qui affectent les parois de la section ou de l'élément dans son ensemble vont restreindre

Différents constituants fondamentaux des ossatures métalliques sont des composants comprimés : les **poteaux de bâtiment**, les **membrures comprimées de treillis** certaines **diagonales des systèmes de contreventement**, les **arcs de pont bow-string**

Des appellations spécifiques désignent parfois certains composants comprimés : **bracon**, **Jambe de force** ou **contrefiche** pour une barre inclinée servant d'appui à une poutre (figure 2), **chandelle**, **étais** ou **béquilles** pour des poteaux secondaires généralement articulés à leurs deux extrémités (figure 3).

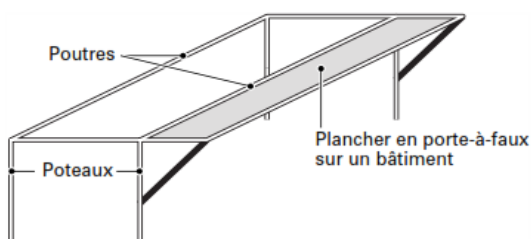


Figure 2 : bracon ou contrefiche.

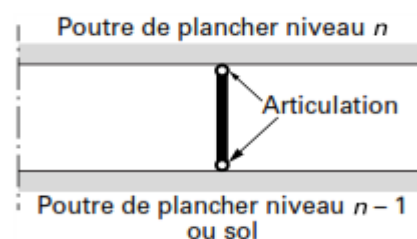


Figure 3 : Poteau secondaire, étau, béquille ou chandelle.

2- Théorie de flambement :

Le flambement ou le flambage est un phénomène d'instabilité d'une structure qui soumise à un effort normal de compression a tendance à fléchir et se déformer dans une direction perpendiculaire à l'axe de compression.

- Plus la pièce est longue et de faible section, plus elle va se plier et se briser.

3 – Flambement simple :

Le flambement simple affecte les pièces soumises à la compression simple, ce phénomène a été étudié pour la première fois par **EULER**

- Les hypothèses de cette théorie sont fondées sur :
 - Une poutre droite (rectiligne), bi-encastée à ces extrémités.
 - Soumise à un effort normal de compression centrée N.
 - Les dimensions transversales sont faibles par rapport à la longueur.
- L'analyse de l'équilibre d'une pièce soumise à un effort de compression N induit à considérer que toute section d'abscisse x est soumise à :
 - a. Un effort normal de compression.
 - b. Un moment de flexion égal au produit de même effort N par l'amplitude de la déformation.
- Prenons l'exemple d'une barre bi-articulée parfaitement rectiligne soumise à un effort de compression N :

*Cas 1 :

La barre est soumise à un effort N1, si la barre revient à sa position initiale lorsque la charge est enlevée \longrightarrow on dit qu'elle est en **équilibre stable**

*Cas 2 :

La barre est soumise à un effort N2 supérieur à N1 pour lequel la barre garde sa position déformée après la suppression de la charge enlevée \longrightarrow on dit qu'elle est en **équilibre instable** ou **indifférent**.

\longrightarrow La charge N2 est appelée : **Charge critique de flambage élastique N_{cr}** .

*Cas 3 :

Pour une charge N3 supérieure à N_{cr} , dans ce cas la déformation devient inacceptable \longrightarrow

On dit que **le système est instable**.

But : est d'étudier la stabilité d'un système et déterminer la valeur de la charge critique pour laquelle le système est en équilibre instable.

- N_{cr} dépend de la forme de la barre et la longueur de flambement l_k .

D'après la résistance des matériaux, la condition d'équilibre entre les moments extérieurs et intérieurs permet d'écrire les équations différentielles suivantes :

$$EI_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2} + N y(x) = 0 \dots\dots\dots (1) \text{ déformation selon l'axe (z)}$$

$$EI_y \frac{d^2 w(x)}{dx^2} + N w(x) = 0 \dots\dots\dots (2) \text{ déformation selon l'axe (y)}$$

Dans l'équation (1), le premier terme $EI_z \frac{d^2 y(x)}{dx^2}$ représente l'équation différentielle de la déformation d'une poutre :

$$M = \int z \sigma_x d_A \qquad \sigma = \frac{My}{I} \qquad \varepsilon = \sigma.E$$

E : module de déformation

I : inertie de la section transversale

* En posant : $\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$ on obtient : $\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \alpha^2 y(x) = 0$

La solution de cette équation est de la forme :

$$Y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

Donc : $Y(x) = A \sin \sqrt{\frac{N}{EI}} x + B \cos \sqrt{\frac{N}{EI}} x$

Les conditions aux limites sont :

- Pour $x = 0$: $Y(0) = 0$ $B = 0$ (1)
- Pour $x = l_0$: $Y(l_0) = 0$ $A \sin \alpha l_0 = 0$ (2)

On a deux possibilités pour l'équation 2 :

- Si $\sin \alpha l_0 \neq 0 \implies A = 0$ et $Y(x) = 0$ quel que soit x.
- Si $\sin \alpha l_0 = 0 \implies \alpha l_0 = K \pi$ on tire :

$$\alpha = \frac{K\pi}{l_0} = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

Donc : $N = \frac{K^2 \pi^2 .EI}{l_0^2}$

K : est un nombre entier, pour que la barre reste fléchie il faut que K soit au moins égal à 1, ce qui conduit à la valeur minimale de N donc de N_{cr} :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 .EI}{l_0^2} \quad (k= 1)$$

Mais, dans le cas général, la charge critique d'Euler s'écrit :

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 .EI}{l_K^2}$$

..... (3)

Ou :

l_0 : Longueur réelle de la barre.

l_K : Longueur de flambement de la barre.

La contrainte moyenne de compression est définie comme la contrainte critique, s'écrit :

$$\sigma_{cr} = \frac{N_{cr}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l_K^2} \cdot \frac{I}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l_K^2} \cdot i^2 = \frac{\pi^2 \cdot E}{\Lambda^2}$$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\Lambda^2} \dots\dots\dots(4)$$

A : la section droite de la pièce

$i = \sqrt{\frac{I}{A}}$: Rayon de giration minimal

$\Lambda = \frac{l_K}{i}$: Élancement de la barre. \longrightarrow Selon la forme (4) $\Lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}}$

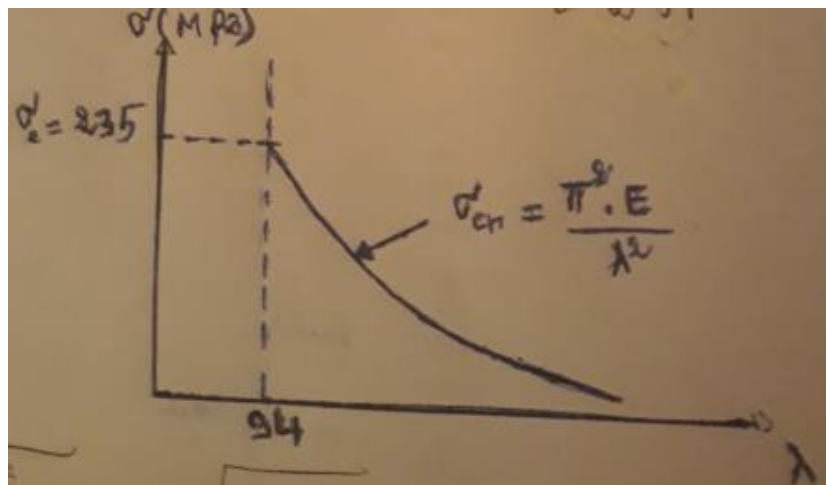
Remarque :

*lorsque $\sigma_{cr} > \sigma_e$: aucun risque de flambement

* lorsque $\sigma_{cr} \leq \sigma_e$: il y a ruine par flambement.

Exemple :

On a un poteau bi-articulé en acier E 235 ($\sigma_e = 235$)



$$\Lambda = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{cr}}} = \pi \sqrt{\frac{210000}{235}} = 94 : \text{Élancement critique}$$

Donc on peut définir l'élancement limite élastique :

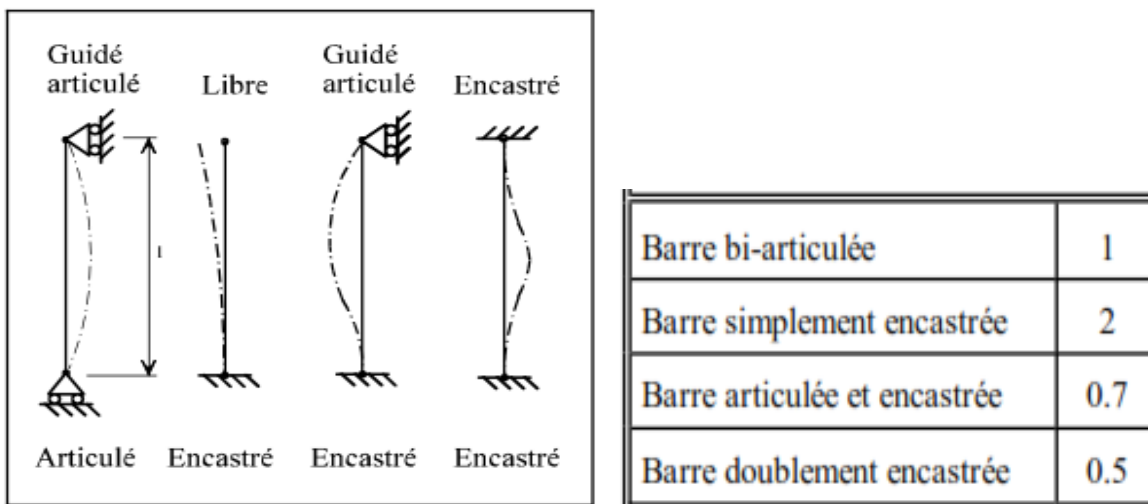
$$\lambda_1 = \pi \sqrt{\frac{E}{f_y}} \text{ avec : } f_y \text{ la limite d'élasticité d'un acier}$$

* l'élancement réduit $\bar{\lambda}$ est le rapport entre λ et λ_1 :

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1}$$

3- Longueur de flambement :

La longueur de flambement d'une barre dépend des conditions de déplacements et de rotations à ces deux extrémités.



Donc la valeur de la longueur de flambement l_K est le produit de longueur initiale l_0 et le facteur de réduction selon les conditions aux appuis, données par le tableau ci-dessus.

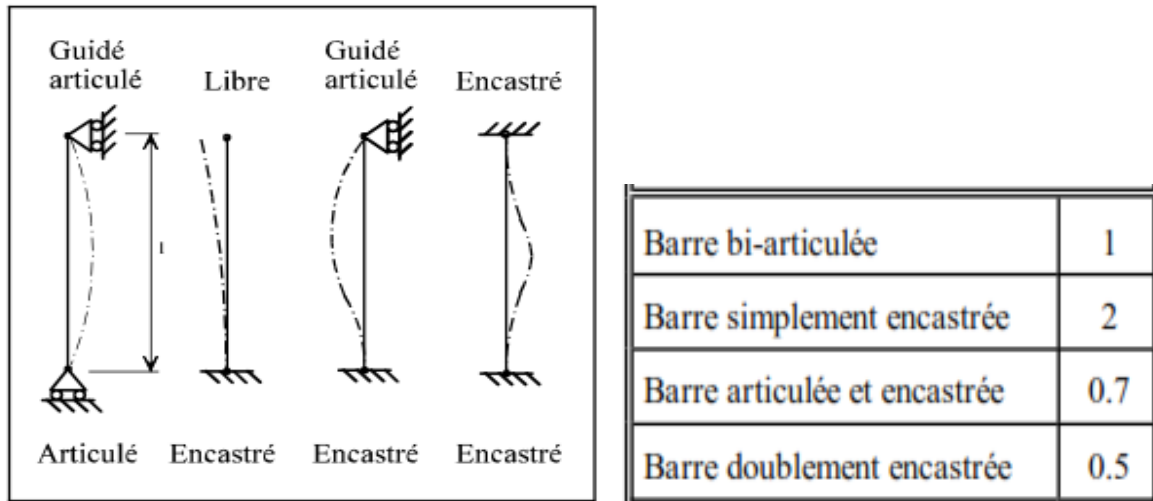
$l_K = 0.5 l_0$ Pour une barre bi-encastree par exemple.

Chapitre 02 : Calcul des pièces sollicitées en compression simple :

Le flambement (partie 02)

3- Longueur de flambement :

La longueur de flambement d'une barre dépend des conditions de déplacements et de rotations à ces deux extrémités.



Donc la valeur de la longueur de flambement l_K est le produit de longueur initiale l_0 et le facteur de réduction selon les conditions aux appuis, données par le tableau ci-dessus.

$l_K = 0.5 l_0$ Pour une barre bi-encastrée par exemple.

- **Cas des poteaux de bâtiments :**

Soit un élément de poteau situé entre deux niveaux de bâtiment (voir figure ; 02)

A chaque nœud, est défini un facteur de distribution η .

*** Au nœud 1 (haut)**

$$\eta_1 = \frac{K_c + K_1}{K_c + K_1 + K_{11} + K_{12}}$$

*** Au nœud 2 (bas)**

$$\eta_2 = \frac{K_c + K_2}{K_c + K_2 + K_{21} + K_{22}}$$

K_c : Rigidité du poteau $K_c = \frac{I}{l_0}$

K_1 et K_2 Rigidités des poteaux adjacents $K_1 = \frac{I_1}{l_1}$, $K_2 = \frac{I_2}{l_2}$

$$K_{ij} : \text{Rigidités des poutres } K_{ij} = \frac{I}{l_{poutre}}$$

Les facteurs η_1 et η_2 sont ensuite utilisés pour déterminer K ou ;

K : coefficient de longueur de flambement

$$K = \frac{l_K}{l_0} \text{ puis : } l_K = K \cdot l_0 \text{ voir figure 03, de } \eta_1 \text{ et } \eta_2 .$$

4- Vérification de la sécurité [selon l' EUROCODE 3 et CCM 97] :

Pour dimensionner une pièce comprimée, il faut vérifier la relation suivante :

$$N_{sd} \leq N_{Rd}$$

N_{sd} : L'effort de compression.

N_{Rd} : La résistance de calcul à la compression de la section transversale.

$$N_{Rd} = \chi \cdot \beta_A \cdot N_{pl}$$

$$N_{pl} = \frac{A \cdot f_y}{\gamma_{M1}} \quad : \text{ Résistance plastique}$$

$$\gamma_{M1} = 1.1$$

Ou : $\beta_A = 1$ pour les sections transversales de classe 1, 2, 3

$$\beta_A = \frac{A_{eff}}{A} \text{ pour les sections transversales de classe 4}$$

avec : A_{eff} : Aire efficace de la section

χ : coefficient de réduction, peut être lu directement du tableau en fonction de $\bar{\lambda}$.

$$\chi = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad \text{Avec : } \Phi = 0.5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0.2) + \bar{\lambda}^2]$$

α : Facteur d'imperfection.

Courbe de flambement	a	b	c	d
Facteur d'imperfection	0.21	0.34	0.49	0.76

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda_1} \cdot \sqrt{\beta_A}$$

Remarque :

- **Cas 1 :** $\bar{\lambda} \leq 0.2$ et section transversale de classe 1, 2, 3.
 - Il y a ni risque de flambement ni risque de voilement
- **Cas 2 :** $\bar{\lambda} \leq 0.2$ et section transversale de classe 4 :
 - Pas de risque de flambement simple mais risque de voilement.
- **Cas 3 :** $\bar{\lambda} > 0.2$ section de classe 1, 2, 3 :
 - On a un risque de flambement simple.
- **Cas 4 :** $\bar{\lambda} > 0.2$ section de classe 4 :
 - On a un risque de flambement simple + voilement.

- Pour calculer χ , on peut utiliser directement la courbe de flambement (voir figure 4)

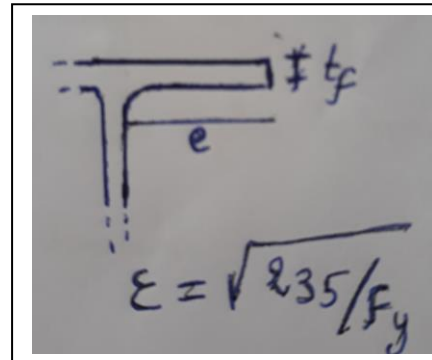
- Les courbes a, b, c et d dépendent de type de section, de l'axe de flambement et les dimensions (voir tableau 1)

5- classe des sections laminées :

Semelles comprimées

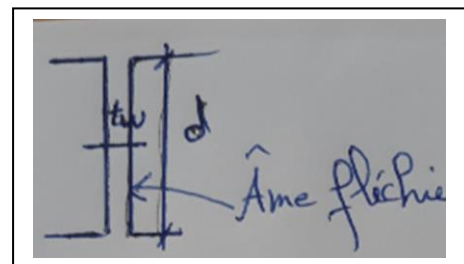
- Classe 1 : $\frac{e}{t_f} \leq 9 \varepsilon$
- Classe 2 : $\frac{e}{t_f} \leq 10 \varepsilon$
- Classe 3 : $\frac{e}{t_f} \leq 15 \varepsilon$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{235}{f_y}}$$

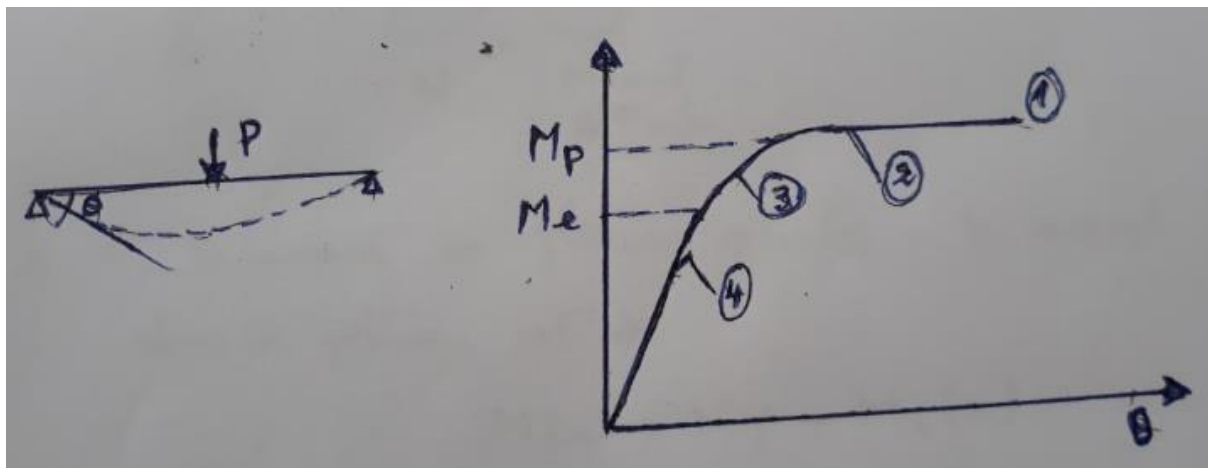


Âme fléchie

- Classe 1 : $\frac{d}{t_w} \leq 72 \varepsilon$
- Classe 2 : $\frac{d}{t_w} \leq 83 \varepsilon$
- Classe 3 : $\frac{d}{t_w} \leq 124 \varepsilon$



Ex : classe de la semelle 3, de l'âme 1 \longrightarrow la classe de la section est de 3.

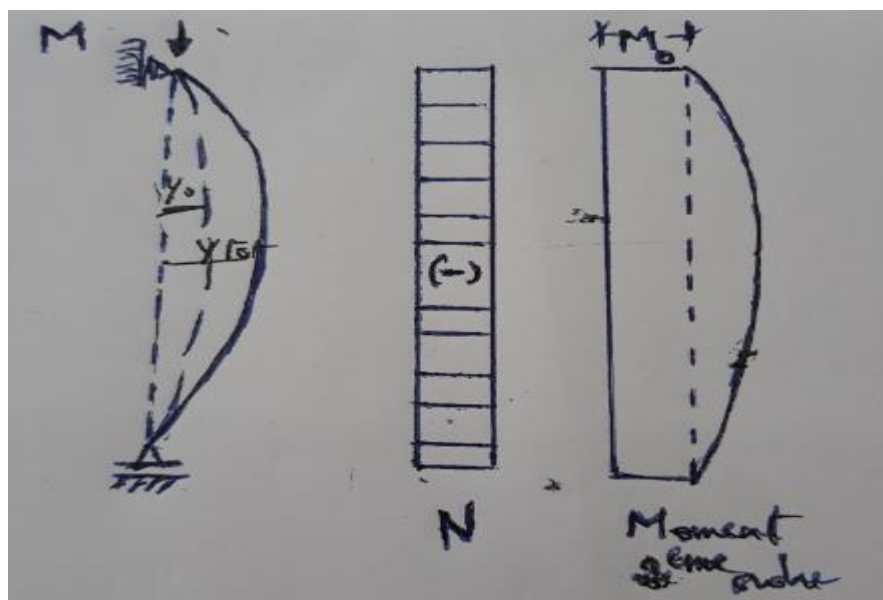


5- Le flambement flexion :

Il s'agit dans ce cas, d'un poteau rectiligne, soumis simultanément à un effort normal N et à un moment fléchissant M .

- Il y a dans ce cas une amplification de la déformée et donc des contraintes de compression et de flexion.
- La résistance ultime au flambage est influencée directement par la grandeur du moment de flexion : plus le moment est grand, plus la résistance ultime va diminuer.

Donc, un moment de second ordre qui peut se manifester, provient à la fois de l'excentricité de N par rapport à la déformée initiale + la présence d'un moment de flexion.



Si : M_0 , le moment de flexion initiale, le moment de flexion total dans le poteau est de :

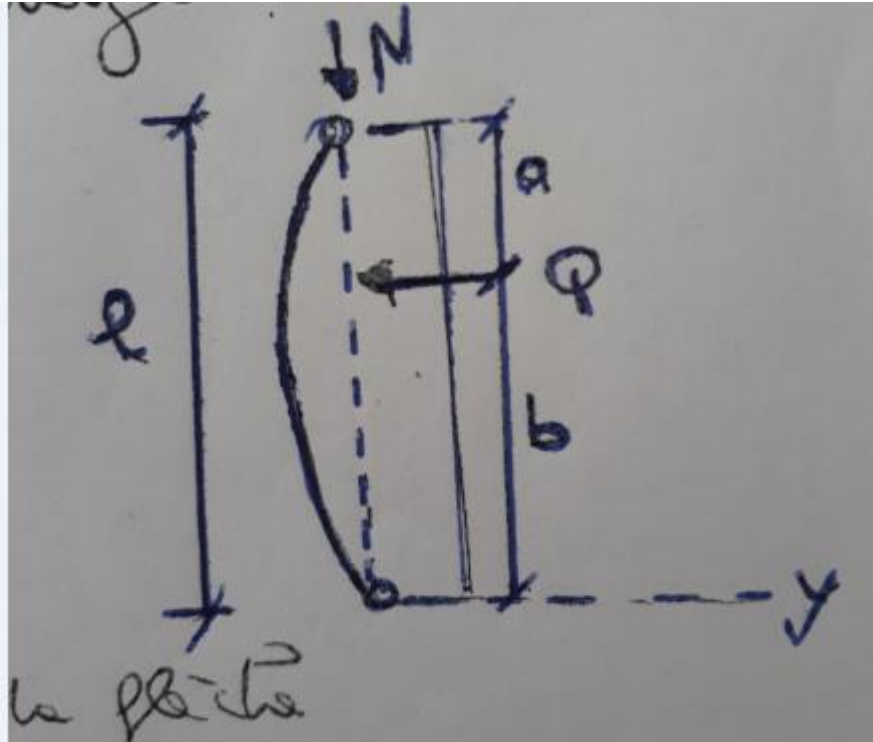
$$M_{(x)} = N y + M_0 (x)$$

- La déformée est de :

$$EI \frac{\partial^2 y^2}{\partial x^2} + Ny = - M_0 (x)$$

➤ On considère 02 cas :

A- Pièce sous charge concentrée Q :



La déformée $Y_{(x)}$ la flèche de cette pièce peut être écrite :

* Si : $0 \leq x \leq e$

$$Y_{(x)} = - \frac{Q}{\alpha N} \cdot \frac{\sin \alpha (l - a)}{\sin \alpha l} \sin \alpha x + \frac{Q}{N} x \frac{l - a}{l}$$

* Si : $e \leq x \leq l$

$$Y_{(x)} = - \frac{Q}{\alpha N} \cdot \frac{\sin \alpha e}{\sin \alpha l} \sin \alpha (l - x) + \frac{Q}{N} e \frac{l - x}{l}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

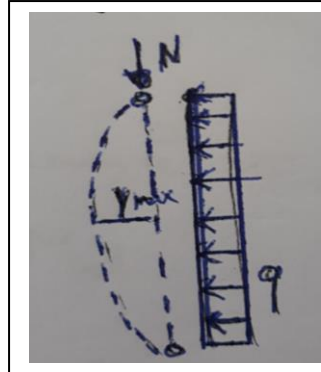
Pour : $x = \frac{l}{2}$ et $e = \frac{l}{2}$

$$Y_{max} = \frac{ql}{4} \frac{tg u}{u} \quad u = \frac{l}{2} \sqrt{\frac{N}{EI}}$$

B- Pièce sous charge uniformément répartie q :

La flèche max pour $x = \frac{l}{2}$

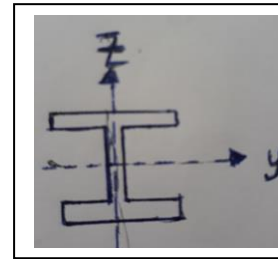
$$Y_{max} = \frac{ql^2}{8} \frac{2(\cos u - 1)}{u^2 \cos u}$$



- Vérification de la sécurité (selon l'EUROCODE et CCM 97) :

• **Section de classes 1 et 2 :**

$$\frac{N}{\chi_{min} \cdot \frac{N_{pl}}{\gamma_{M1}}} + \frac{K_Y \cdot M_Y}{\frac{M_{pl y}}{\gamma_{M1}}} + \frac{K_Z \cdot M_Z}{\frac{M_{pl z}}{\gamma_{M1}}} \leq 1$$



Avec :

$$N_{pl} = A \cdot f_y$$

$$M_{pl} = w_{pl} \cdot f_y \quad w : \text{module de résistance} \quad w = \frac{I}{h/2}$$

$$K_Y = 1 - \frac{\mu_y \cdot N}{\chi_y \cdot A f_y}$$

$$\mu_y = \bar{\lambda}_y (2 \cdot \beta_{My} - 4) + \left[\frac{W_{ply} - W_{ely}}{W_{ely}} \right]$$

$$\mu_y \leq 0.9 ; \quad K_Y \leq 1.5 \text{ (Supérieur à 1)}$$

$$K_Z = 1 - \frac{\mu_z \cdot N}{\chi_z \cdot A f_y}$$

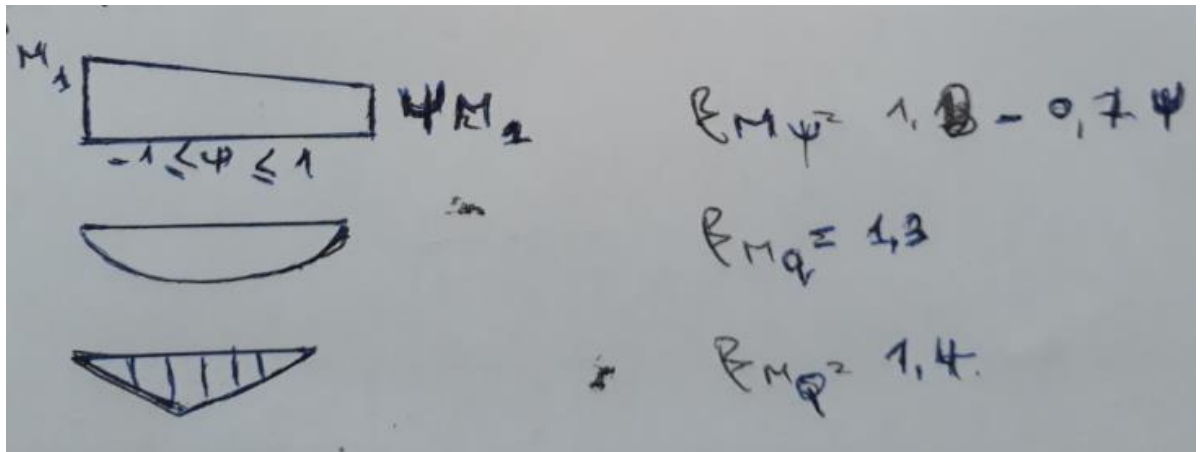
$$\mu_z = \bar{\lambda}_z (2 \cdot \beta_{Mz} - 4) + \left[\frac{W_{plz} - W_{elz}}{W_{elz}} \right]$$

$$\mu_z \leq 0.9 ; \quad K_Z \leq 1.5 \text{ (Supérieur à 1)}$$

$$\chi_{min} = \min(\chi_y, \chi_z)$$

β_{My} et β_{Mz} : facteurs de moment uniforme équivalent pour le flambement flexion.

- Diagrammes des moments :



Section de classe 3 :

On utilise la même formule de la section 1 et 2 mais, on remplace M_{pl} par M_{el}

Section de classe 4 :

Remplacer A par A_{eff} et W_{pl} par W_{eff} :

$$\frac{N}{\chi_{min} \cdot A_{eff} \frac{f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{K_Y \cdot M_Y + N \cdot e_y}{W_{eff,y} \frac{f_y}{\gamma_{M1}}} + \frac{K_Z \cdot M_Z + N \cdot e_z}{W_{eff,z} \frac{f_y}{\gamma_{M1}}} \leq 1$$

Remarque :

Il faut toujours vérifier la sécurité vis-à-vis au flambement ^par ce que en réalité :

- 1- Les pièces ne sont pas toujours rectilignes.
- 2- Leurs inerties ne sont pas toujours constantes
- 3- Les efforts normaux et lzs appuis ne sont jamais centrés
- 4- Les poteaux sur chantier ne sont pas verticaux.