Chapitre 1

Géométrie euclidienne

Exercice 1.2 On utilise la bilinéarité du produit scalaire. On a $\langle 0, u\rangle = \langle 0.0, u\rangle = 0.\langle 0, u\rangle = 0$.

Exercice 1.3 Pour $t \in \mathbb{R}$ calculons $\|u+tv\|^2$. On a $\|u+tv\|^2 = \langle u+tv, u+tv\rangle = \langle u, u\rangle + 2t\langle u, v\rangle + t^2\langle v, v\rangle = \|v\|^2 t^2 + 2\langle u, v\rangle t + \|u\|^2$. On obtient ainsi un polynôme en t du second degré. On remarque que ce polynôme est toujours ≥ 0. Donc son discriminant doit être ≤ 0. Le discriminant du polynôme $at^2 + bt + c$ est $\Delta = b^2 - 4ac$. Ici on a $a = \|v\|^2, b = 2\langle u, v\rangle$ et $c = \|u\|^2$. Donc

$$\Delta = 4\langle u, v\rangle^2 - 4\|u\|^2\|v\|^2 \leq 0$$

ce qui donne

$$\mid \langle u, v\rangle \mid \leq \|u\|\|v\|$$

Exercice 1.4 On a $\|u\| = 0$ si et seulement si $\|u\|^2 = 0$ et donc si et seulement si $\langle u, u\rangle = 0$, ce qui se passe uniquement quand $u = 0$ (le produit scalaire est défini). Ensuite on a $\|\lambda u\|^2 = \langle \lambda u, \lambda u\rangle = \lambda^2\langle u, u\rangle$. Donc $\|\lambda u\| = \sqrt{\lambda^2}\sqrt{\langle u, u\rangle} =\mid \lambda \mid \|u\|$. Pour l'inégalité triangulaire on va utiliser l'exercice 1.3. On a $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2 \mid \langle u, v\rangle \mid + \|v\|^2 \leq \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 = (|u\| + \|v\|)^2$. Donc $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Exercice 1.6 On a $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$. De même $\|u-v\|^2 = \langle u-v, u-v\rangle = \langle u, u\rangle - 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle = \|u\|^2 - 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2$. Ce qui donne $\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2 = 4\langle u, v\rangle$. On procède de la même manière pour les deux autres formules.

Exercice 1.10 Ce produit est clairement symétrique et bilinéaire. De plus on a $\langle u, u\rangle = 2u_1^2 + 2u_2^2 + 2u_1u_2 = u_1^2 + u_2^2 + (u_1 + u_2)^2$. On a donc une somme de trois carrés qui est clairement ≥ 0. Cette somme est égale à zero si et seulement chaque carré est nul. Donc $u_1 = 0$ et $u_2 = 0$. Ceci montre que le produit est défini positif et c'est donc un produit scalaire. La base canonique de $\mathbb{R}^2$ est formée des deux vecteurs $e_1 = (1, 0)$ et $e_2 = (0, 1)$. On a $\langle e_1, e_1 \rangle = 2$, $\langle e_2, e_2 \rangle = 2$ et $\langle e_1, e_2 \rangle = 1$. La matrice de ce produit scalaire dans la base canonique est donc

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.14 On a $\langle v - proj_u(v), u \rangle = \langle v - \frac{\langle u,v \rangle}{\langle u,u \rangle} u, u \rangle = \langle v, u \rangle - \langle u, v \rangle = 0$. Donc $v - proj_u(v)$ et u sont orthogonaux.

Exercice 1.18 On a $u_1 = v_1 = (1, 2, -1, 1)$ et $\|u_1\| = \sqrt{1 + 2 + 1 + 1} = \sqrt{7}$. Donc $e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{7}(1, 2, -1, 1)$. D'autre part on a $proj_{u_1}(v_2) = \frac{\langle u_1, v_2 \rangle}{\langle u_1, u_1 \rangle} u_1 = \frac{4}{7}(1, 2, -1, 1)$ et $u_2 = v_2 - proj_{u_1}(v_2) = \frac{1}{7}(4, 13, 11, -11)$. Donc $e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{427}}(-4, 13, 11, -11)$. $\{e_1, e_2\}$ est une base orthonormale de F. Les éléments $w \in F^\perp$ sont caractérisés par les équations $\langle u, w \rangle = 0$ pour tout $u \in F$. Comme v_1 et v_2 constituent une base de F cela équivaut aux deux équations

$$\langle v_1, w \rangle = 0$$

et

$$\langle v_2, w \rangle = 0$$

Si $w = (x, y, z, t)$ cela donne les deux équations

$$x + 2y - z + t = 0$$

et

$$3y + z - t = 0$$

Exercice 1.20 Remarquer d'abord que pour deux vecteurs orthogonaux u et v, on a $\|u + v\| = \|u\| + \|v\|$. Pour tout vecteur $x \in E$ on a $x = p_F(x) + v$ avec $v \in F^\perp$ (et donc orthogonal à $p_F(x)$). Donc $\|x\| = \|p_F(x) + v\| = \|p_F(x)\| + \|v\|$. Ce qui montre que $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$. Pour montrer que $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$, il suffit de montrer que $\|x - p_F(x)\| \leq \|x - u\|$ pour tout $u \in F$. Or on a $x - u = (x - p_F(x)) + (p_F(x) - u)$. Comme $p_F(x) - u \in F$ et $x - p_F(x) \in F^\perp$, ces deux vecteurs sont orthogonaux. On a donc $\|x - u\| = \|x - p_F(x)\| + \|p_F(x) - u\|$ et donc $\|x - u\| \geq \|x - p_F(x)\|$.

Enfin on a $\|x - p_F(x)\| = 0$ si et seulement si $x - p_F(x) = 0$, c'est-à-dire $x = p_F(x)$ et donc $x \in F$.

Exercice 1.21 En rajoutant les deux équations définissant F, on obtient l'égalité $z = -x$. En les retranchant on obtient l'égalité $t = -y$. Un vecteur $u = (x, y, z, t) \in F$ s'écrit donc $u = (x, y, -x, -y) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 0, -1)$. Les deux vecteurs $v_1 = (1, 0, -1, 0)$ et $v_2 = (0, 1, 0, -1)$ forment donc une base de F. Le vecteur $w = (x, y, z, t)$ est dans $F^\perp$ si et seulement si

$$\langle v_1, w\rangle = 0$$

et

$$\langle v_2, w\rangle = 0$$

et donc si et seulement si

$$x - z = 0$$

et

$$y - t = 0$$

Les deux vecteurs $w_1 = (1, 0, 1, 0)$ et $w_2 = (0, 1, 0, 1)$ forment donc une base de $F^\perp$. Les quatres vecteurs v_1, v_2, w_1 et w_4 forment donc une nouvelle base de $\mathbb{R}^4$. On a $e_1 = (1, 0, 0, 0) = \frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}w_1, e_2 = (0, 1, 0, 0) = \frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}w_2, e_3 = (0, 0, 1, 0) = -\frac{1}{2}v_1 + \frac{1}{2}w_1$ et $e_4 = (0, 0, 0, 1) = -\frac{1}{2}v_2 + \frac{1}{2}w_2$. Donc

$$p_F(e_1) = \frac{1}{2}v_1 = \frac{1}{2}(1, 0, -1, 0)$$

$$p_F(e_2) = \frac{1}{2}v_2 = \frac{1}{2}(0, 1, 0, -1)$$

$$p_F(e_3) = -\frac{1}{2}v_1 = -\frac{1}{2}(1, 0, -1, 0)$$

et

$$p_F(e_4) = -\frac{1}{2}v_2 = -\frac{1}{2}(0, 1, 0, -1)$$

La matrice de p_F dans la base canonique est la matrice dont les colonnes sont $p_F(e_1), p_F(e_2), p_F(e_3)$ et $p_F(e_4)$. C'est donc la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Remarquer que $x = (1, 1, 1, 1) = w_1 + w_2 \in F^\perp$. Donc $p_F(x) = 0$ et $d(x, F) = \|x - p_F(x)\| = \|x\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$.

Exercice 1.23 F est engendré par le vecteur $e_1 = (1, 0)$. C'est l'axe des x. $v = (x, y) \in F^\perp$ si et seulement si $\langle e_1, v\rangle = 0$ et donc si et seulement si $x = 0$. $F^\perp$ est donc l'axe des y. Tout vecteur $w = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ s'écrit $w = (x, 0) + (0, y)$ avec $u = (x, 0) \in F$ et $v = (0, y) \in F^\perp$. Par définition $s(w) = u - v = (x, -y)$ (ici c'est la symétrie par rapport à l'axe des x). La matrice de s_F dans la base canonique $\{e_1, e_2\}$ est la matrice dont les vecteurs colonnes sont $s_F(e_1) = (1, 0)$ et $s_F(e_2) = (0, -1)$. C'est donc la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1.24 Soient $Q = p_B(P)$ et $Q' = p_B(P')$. On a $\overrightarrow{p_B(P)p_B(P')} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OQ} = u' - u = p_F(\overrightarrow{OP'}) - p_F(\overrightarrow{OP}) = p_F(\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}) = p_F(\overrightarrow{PP'})$. Donc p_B est affine et $\overrightarrow{p_B} = p_F$.

Exercice 1.25 Soient $Q = s_B(P)$ et $Q' = s_B(P')$. On a $\overrightarrow{s_B(P)s_B(P')} = \overrightarrow{QQ'} = \overrightarrow{QO} + \overrightarrow{OQ'} = \overrightarrow{OQ'} - \overrightarrow{OQ} = (u' - v') - (u - v) = s_F(\overrightarrow{OP'}) - s_F(\overrightarrow{OP}) = s_F(\overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP}) = s_F(\overrightarrow{PP'})$. Donc s_B est affine et $\overrightarrow{s_B} = s_F$.

Chapitre 2

Courbes et Surfaces

Exercice 2.4 L'intervalle $I =]0, 2\pi[$ est ouvert. Les fonctions $\gamma_1(t) = 2cost$ et $\gamma_2(t) = 2sint$ sont C^∞ de dérivées respectives $-2sint$ et $2cost$. γ est donc bien une courbe paramétrique. Si on pose $x = 2cost$ et $y = 2sint$, on a l'équation $x^2 + y^2 = 4$. La courbe représente le cercle de centre $(0, 0)$ et de rayon 2 auquel il manque le point $(1, 0)$ (correspondant à $t = 0$ et $t = 2\pi$ qui ne font pas partie de l'intervalle I). Pour $I =]0, 4\pi[$ la courbe représente deux fois le cercle sans le point $(1, 0)$ au départ et à l'arrivée. Pour $I =]-\infty, +\infty[$ c'est le cercle parcouru une infinité de fois (avec tous ses points).

Exercice 2.7 Le vecteur vitesse est $\gamma^{'}(t) = (-2sint, 2cost)$. Il s'annule en t si et seulement si $sint = 0$ et $cost = 0$, ce qui est impossible. Donc les courbes n'ont aucun point singulier.

Exercice 2.9 D'aprés le chapitre 1 (Géométrie euclidienne) la norme (ou longueur) d'un vecteur est nulle si et seulement si ce vecteur est nul. Donc

$$\|\gamma^{'}(t)\| = 0 \iff \gamma^{'}(t) = 0$$

Exercice 2.11 Une courbe à vitesse unité vérifie $\mid \gamma^{'} \mid (t) = \|\gamma^{'}(t)\| = 1$ pour tout t. Donc $\gamma^{'}(t) \neq 0$ pour tout t et la courbe est régulière.

Exercice 2.13 Soient $u(t) = (u_1(t), \ldots, u_n(t))$ et $v(t) = (v_1(t), \ldots, v_n(t))$. On a $f(t) = \langle u(t), v(t)\rangle = u_1(t)v_1(t)+\ldots+u_n(t)v_n(t)$. Donc $f^{'}(t) = u_1^{'}(t)v_1(t)+ u_1(t)v_1^{'}(t) + \ldots + u_n^{'}(t)v_n(t) + u_n(t)v_n^{'}(t) = (u_1^{'}(t)v_1(t) + \ldots + u_n^{'}(t)v_n(t)) + (u_1(t)v_1^{'}(t) + \ldots + u_n(t)v_n^{'}(t)) = \langle u^{'}(t), v(t)\rangle + \langle u(t), v^{'}(t)\rangle$. Si γ est une courbe à vitesse unité, on a $\|\gamma^{'}(t)\| = 1$ et donc $\|\gamma^{'}(t)\|^2 = \langle\gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t)\rangle = 1$. Si on pose $f(t) = \langle\gamma^{'}(t), \gamma^{'}(t)\rangle$, on a $f(t) = 1$ pour tout t et donc $f^{'}(t) = 0$. Appliquant ce qui précéde à $u(t) = v(t) = \gamma^{'}(t)$, on obtient $f^{'}(t) = \langle\gamma^{''}(t), \gamma^{'}(t)\rangle + \langle\gamma^{'}(t), \gamma^{''}(t)\rangle = 0$. Par symétrie du produit scalaire cela donne $2\langle\gamma^{'}(t), \gamma^{''}(t)\rangle = 0$ et donc $\langle\gamma^{'}(t), \gamma^{''}(t)\rangle = 0$. Le vecteur tangent et le vecteur accélération sont donc orthogonaux.

Exercice 2.16 Si β est une reparamétrisation de γ, on a $\beta(u) = (\gamma \circ h)(u) = \gamma(h(u))$ et donc $\beta^{'}(u) = \gamma^{'}(h(u)).h'(u)$. Comme $\gamma^{'}(t) \neq 0$ pour tout t (car γ est régulière) et $h^{'}(u) > 0$, on a $\beta^{'}(u) \neq 0$ pour tout u. La courbe β est donc aussi régulière.

Exercice 2.17 Toute courbe γ est en relation avec elle-même. Il suffit de prendre $h = Id_I : I \longrightarrow I$ l'application identité. La relation est donc réflexive. Si β est en relation avec γ via $h : J \longrightarrow I$ alors γ est en relation avec β via $h^{-1} : I \longrightarrow J$. La relation est donc symétrique. Si β est en relation avec γ via $h : J \longrightarrow I$ et δ est en relation avec β via $k : K \longrightarrow J$, alors δ est en relation avec γ via $h \circ k : K \longrightarrow I$ et la relation est donc transitive.

Exercice 2.21 On a $s^{-1} \circ s = Id_I : I \longrightarrow I$. Autrement dit on a $s^{-1} \circ s(t) = s^{-1}(s(t)) = t$ pour tout $t \in I$. En dérivant on obtient

$$(s^{-1} \circ s)^{'}(t) = 1$$

ou encore

$$(s^{-1})^{'}(s(t)).s^{'}(t) = 1$$

ce qui donne

$$(s^{-1})^{'}(u) = \frac{1}{s^{'}(s^{-1}(u))}$$

en posant $u = s(t)$ et donc $t = s^{-1}(u)$. Comme $s^{'}(t) > 0$ pour tout t, cela donne $(s^{-1})^{'} > 0$.

Exercice 2.23 On a $s(t) = tr$. Ici $I = \mathbb{R}$ et donc $J = s(I) = \mathbb{R}$. On tire s^{-1} de la relation $u = s(t) \iff t = s^{-1}(u)$. Ce qui nous donne $s^{-1}(u) = \frac{u}{r}$. On a

$$\begin{aligned}\beta(u) &= \gamma(s^{-1}(u)) = \gamma(\frac{u}{r}) \\ &= (rcos(\frac{u}{r}), rsin(\frac{u}{r}))\end{aligned}$$

Voyons si β est à vitesse unité. On a

$$\beta^{'}(u) = (-sin(\frac{u}{r}), cos(\frac{u}{r}))$$

et donc

$$\mid \beta^{'}(u) \mid = \sqrt{cos^2(\frac{u}{r}) + sin^2(\frac{u}{r})} = 1$$

Exercice 2.26 On a $\mid \gamma^{'}(t) \mid = r$ et donc la courbe n'est pas à vitesse unité. On doit donc passer par β. On a calculé dans l'exercice 2.23 $\beta(u) = (rcos(\frac{u}{r}), rsin(\frac{u}{r}))$ et $\beta^{'}(u) = (-sin(\frac{u}{r}), cos(\frac{u}{r}))$. Donc

$$\beta^{''}(u) = \frac{1}{r}(-cos(\frac{u}{r}), -sin(\frac{u}{r}))$$

et on a

$$\kappa_\gamma(t) = \mid \beta^{''}(s(t)) \mid = \frac{1}{r}$$

La courbure du cercle de rayon r est donc constante égale à $\frac{1}{r}$.

Exercice 2.27 On a $\gamma^{'}(t) = (1,3)$ et $\mid \gamma^{'}(t) \mid = \sqrt{10} \neq 1$. La courbe n'est donc pas à vitesse unité. Pour $t_0 = 0$, la fonction longueur d'arc est

$$s(t) = \int_0^t \sqrt{10}du = \sqrt{10}t$$

et donc

$$s^{-1}(u) = \frac{u}{\sqrt{10}}$$

ce qui nous donne

$$\beta(u) = \gamma(s^{-1}(u)) = (\frac{u}{\sqrt{10}}, 3\frac{u}{\sqrt{10}} + 1)$$

et

$$\beta^{'}(u) = (\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}})$$

et donc

$$\beta^{''}(u) = (0,0)$$

La courbure de la droite est donc

$$\kappa_\gamma(t) = \mid \beta^{''}(s(t)) \mid = 0$$

Exercice 2.29 Pour la droite $\gamma(t) = (t, at+b)$, on a $\gamma^{'}(t) = (1,a)$ et donc $\gamma^{''}(t) = (0,0)$. En utilisant la première formule on a

$$\kappa_\gamma(t) = \mid \frac{1}{\mid \gamma^{'}(t) \mid} \frac{d}{dt} \frac{\gamma^{'}(t)}{\mid \gamma^{'}(t) \mid} \mid = 0$$

Toujours en utilisant la première formule, on trouve pour le cercle

$$\kappa_\gamma(t) = \frac{1}{r}$$

Exercice 2.33 On a $z = 0$ et la surface représente donc le plan des x et y.

Exercice 2.37 On a $E_1(x, y) = (1, 0, y)$ et $E_2(x, y) = (0, 2y, x)$. Donc

$$E_1(x, y) \times E_2(x, y) = (-2y^2, -x, 2y)$$

et on a $E_1(x, y) \times E_2(x, y) = (0, 0, 0)$ si et seulement si $x = 0$ et $y = 0$. La surface a donc un seul point non régulier qui est le point $P = (0, 0)$.

Exercice 2.39 On a $E_1(x, y) = (1, 0, y)$, $E_2(x, y) = (0, 1, x)$ et $E_1(x, y) \times E_2(x, y) = (-y, -x, 1)$. En le point $P = (3, -2)$ cela donne $E_1(3, -2) = (1, 0, -2), E_2(3, -2) = (0, 1, 3)$ et $E_1(3, -2) \times E_2(3, -2) = (2, -3, 1)$. On a donc

$$T_P S = \{\alpha(1, 0, -2) + \beta(0, 1, 3), \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$$

et

$$N_P S = \{\alpha(2, -3, 1), \alpha \in \mathbb{R}\}$$

On a $u = (1, 0, -2) + 2(0, 1, 3) \in T_P S$. De même on vérifie facilement que $w \in N_P S$ et que $v \notin T_P S$ et $v \notin N_P S$.