Résumé de Cours

Nombres complexes

- Un nombre complexe s'écrit sous $z = x + iy = re^{i\theta} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$.

- $x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z, \quad \overline{z} = x - iy, \quad |z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos\theta = \dfrac{x}{r}, \quad \sin\theta = \dfrac{y}{r}.$

- Cercle de centre a et de rayon r dans le plan complexe:

$$|z - a| = r \text{ or } z = a + re^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi[\,.$$

- Formule de De Moivre: si $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors $z^n = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta)$.

- Racines $n^{ème}$ d'un nombre complexe: si $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, alors

$$z = r^{\frac{1}{n}}\left\{\cos\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\tfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)\right\}.$$

Fonctions complexes

- Si à chaque valeur $z \in A \subset \mathbb{C}$, il correspond une or plusieurs valeurs $f(z)$ dans $\mathbb{C}$. nous dirons que $f(z)$ est une fonction (complexe) de z.

- Si une seule valeur de $f(z)$ correspond à z, nous dirons que $f(z)$ est uniforme.

  Exemple: $\sin z, \cos z, e^z$...

- Si plusieurs valeurs de $f(z)$ correspond à z, nous dirons que $f(z)$ est multiforme.

  Exemple: $\operatorname{Log}(z)$, a^z.

- $\operatorname{Log}(z) = \ln(|z|) + i\arg(z)$.

  Exemple. $\operatorname{Log}(1+i) = \ln|1+i| + i\arg(1+i) = \ln(2) + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right), k \in \mathbb{Z}$.

- Si $z = x+iy$, la fonction $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$, $u = \operatorname{Re}(f)$, $v = \operatorname{Im}(f)$.

  Exemple. $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$

Fonctions holomorphes

La dérivée de la fonction f en z_0 est

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \overset{ou}{=} \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ pourvu que cette limite existe.}$$

Si cette limite existe, on dit que f est dérivable en z_0.

· On dit que f est **holomorphe** dans un ouvert A, si f est dérivable en tout point z de A.

· Une fonction est dite holomorphe en z_0 si elle est holomorphe dans $\{|z - z_0| < \delta\}, \delta > 0$.

Équations de Cauchy-Riemann.

Soit $A \subset \mathbb{C}$ un ouvert, $f : A \to \mathbb{C}$, $f = u + iv$ une fonction holomorphe dans A.

Si les dérivées partielles $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x}$ sont continues dans A, les équations de Cauchy-Riemann $\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ et } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}}$ sont nécessaires et suffisantes pour que $f = u + iv$ soit holomorphe.

<u>Exemple.</u> $f(z) = 2xy - y + i(y^2 - x^2 + x)$, $u = 2xy - y$ et $v = y^2 - x^2 + x$.
$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 2y \ \to\ \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$. $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x - 1$, $\frac{\partial v}{\partial x} = -2x + 1 \ \to\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.
Les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites, la fonction f est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$.

· Si f est holomorphe dans $A \subset \mathbb{C}$, alors $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}$.

Fonctions harmoniques.

Une fonction u sur $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est dite harmonique si elle est de classe C^2 et son laplacien est nul $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \equiv 0$ sur Ω.

Si les dérivées partielles secondes de u et v par rapport à x et à y existent et sont continues dans $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, alors on peut tirer des équations de Cauchy-Riemann, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ et $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.
i.e. les parties réelles et imaginaires de $f = u + iv$ sont des fonctions harmoniques.

· Si u est une fonction harmonique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Alors une fonction v est dite harmonique conjuguée de u si u et v vérifient équations de Cauchy-Riemann. (Exemple. Voir exercice 6 série 3).

Points singuliers. Un point en lequel une fonction $f(z)$ cesse d'être analytique est appelé un point singulier ou une singularité de $f(z)$. Il existe des types variés de singularités.

· **Pôles.** Si l'on peut trouver un entier positif n tel que $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)^n f(z) = A \neq 0$, alors z_0

est appelé un pôle d'ordre n. Si $n = 1$, z_0 est appelé un pôle simple. Exemple. $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)^2}$ a un pôle double en $z = 1$.

· **Singularités apparentes.** Le point singulier z_0 est appelé singularité apparente de $f(z)$ si $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existe.

Exemple. Le point singulier $z = 0$ est une singularité apparente de la fonction $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$ puisque $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{z} = 1$.

· **Singularités essentielles.** Une singularité qui n'est ni un pôle, ni une singularité apparente est appelée singularité essentielle.

Exemple. $f(z) = e^{\frac{1}{z-2}}$ a une singularité essentielle en $z = 2$.

Intégration dans le domaine complexe

Soit C une courbe dans le plan complexe. Si $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, $z = x + iy$ on a $dz = dx + idy$

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C (u + iv)(dx + idy) = \int_C udx - vdy + i\int_C vdx + udy.$$

Si $x = \phi(t)$, $y = \varphi(t)$ et $t_1 \leq t \leq t_2$, alors

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} \{u \cdot \phi'(t) - v \cdot \varphi'(t)\}\,dt + i\int_{t_1}^{t_2} \{v \cdot \phi'(t) + u \cdot \varphi'(t)\}\,dt$$

Exemple. Calculer $\int_C z^3 dz$ le long du cercle $|z| = 2$ de $2i$ à -2 dans le sens direct.

L'arc de $2i$ à -2 du cercle $|z| = 2$ peut être paramétré par $z = 2e^{it}$, $t \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.

Les points $2i$ et -2 sur C correspondant à $\dfrac{\pi}{2}$ et à π. L'intégrale curviligne considérée vaut donc

$$\int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left\{\left(2e^{it}\right)^3\right\}\left(2ie^{it}dt\right) = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} 2ie^{it}\left(8e^{3it}\right)dt = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 16ie^{4it}dt = \left[4e^{4it}\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = 0$$

Théorème de Cauchy. Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert connexe Ω et sur sa frontière C. Alors $\oint\limits_C f(z)\,dz = 0$.

Ce théorème fondamental est souvent appelé **théorème de Cauchy**.

Exemple Soit $C = \{z \ / \ z = e^{it},\ t \in [-\pi, \pi]\}$. Calculer $\oint\limits_C 2zdz$.

On a $dz = d\left(e^{it}\right) = ie^{it}dt$, alors

$$\oint_C 2zdz = \int_{-\pi}^{\pi} 2e^{it}\left(\ ie^{it}dt\right) = 2i\int_{-\pi}^{\pi} e^{2it}dt = \left[\ e^{2it}\right]_{-\pi}^{\pi} = 1 - 1 = 0.$$

Formule intégrale de Cauchy

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, soit a un point intérieur à C, alors

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z-a} dz \tag{1}$$

où le contour C est décrit dans le sens direct.

De même la n-ième dérivée de f en $z = a$ est donnée par

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \quad n = 1, 2, 3, ... \tag{2}$$

- Les résultats (1) et (2) sont appelés formules intégrales de Cauchy et sont très remarquables car ils montrent que si une fonction f est connue sur la courbe fermée simple C, alors ses valeurs et les valeurs de toutes ses dérivées peuvent être calculées en tout point situé à l'intérieur de C.

Séries entières

Une série de la forme

$$a_0 + a_1 (\ z-a) + a_1 (\ z-a)^2 + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\ z-a)^n \tag{3}$$

est appelée série entière en $z - a$.

Rayon de convergence. Il existe un nombre positif R tel que (3) converge pour $|z-a| < R$ et diverge pour $|z-a| > R$, cependant que pour $|z-a| = R$ elle peut ou non converger.

Nous pouvons obtenir le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ par

$$\text{critère de d'Alembert : } \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \text{,ou par critère de Cauchy : } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}},$$

si les limites existent.

Exemple Trouver les rayons de convergence pour la série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}$ $a_n = \frac{1}{n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} \right| = 1.$$

La série converge dans $|z| < 1$ et diverge en dehors i.e. $|z| > 1$. Sur le cercle $|z| = 1$, la série converge en certains points et diverge en d'autres points.

Séries de Taylor

Soit f une fonction holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C. Alors

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + ... + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a) + ... ,$$

ou en posant . $z = a + h, \quad h = z - a$,

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + ...$$

Ceci est appelé le théorème de Taylor et les séries précédentes sont appelées séries de Taylor ou développement de Taylor de $f(a+h)$ ou $f(z)$.

Quelques séries particulières. La liste qui suit contient quelques séries particulières avec leurs domaines de convergence.

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + ... + \frac{z^n}{n!} + ... \qquad |z| < \infty.$

2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - ... (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + ... \qquad |z| < \infty.$

3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - ... (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + ... \qquad |z| < \infty.$

4. $\mathrm{Log}\, z = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - ... (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n} + ... \qquad |z| < 1.$

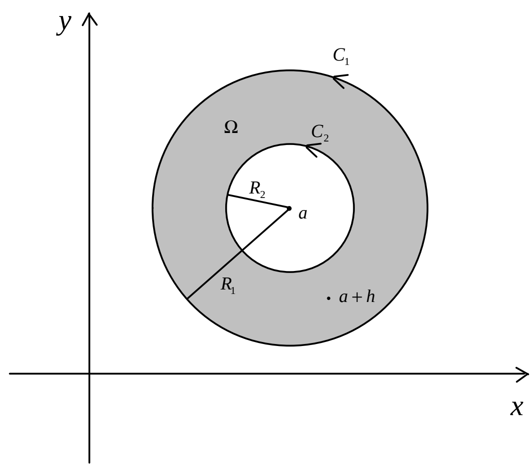
5. $\mathrm{Arctg}\, z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - ... (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{2n-1} + ... \qquad |z| < 1.$

6. $(1+z)^p = 1 + pz + \frac{p(p-1)}{2!} z^2 + ... + \frac{p(p-1)...(p-n+1)}{n!} z^n + ... \qquad |z| < 1.$

Si $(1+z)^p$ est multiforme le résultat est valable pour la branche de la fonction qui prend la valeur 1 pour $z = 0$.

Séries de Laurent

Soit C_1 et C_2 des cercles concentriques, de centre a et de rayons respectifs R_1 et R_2, voir figure ci-contre. On suppose que f est uniforme et **holomorphe** sur C_1 et C_2 et également dans la couronne Ω [ou région annulaire Ω] limitée par C_1 et C_2 et ombrée dans la figure ci-contre. Les courbes C_1 et C_2 étant décrits dans le sens positif par rapport à leurs intérieurs.



Soit $a+h$ un point quelconque de Ω, on a alors

$$\begin{aligned} f(a+h) = a_0 \quad & +a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + ... \\ & + \frac{a_{-1}}{h} + \frac{a_{-2}}{h^2} + \frac{a_{-3}}{h^3} + ... \end{aligned}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz, \qquad n = ... -2, -1, 0, 1, 2, ...$$

et $C = C_1$ ou C_2. Avec le changement de notation $z = a+h$, on peut écrire

$$\begin{aligned} f(z) = a_0 \quad & +a_1 (z-a) + a_2 (z-a)^2 + a_3 (z-a)^3 + ... \\ & + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + ... \end{aligned} \tag{4}$$

Ceci est appelé le théorème de Laurent et la formule ci-dessus est appelée une série de Laurent ou un développement de Laurent.

La partie $a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + a_3(z-a)^3 + ...$ est appelée la partie **analytique** de la série de Laurent cependant que le reste de la série formé des puissances négatives de $z-a$ est appelé la partie **principale**. Si la partie principale est nulle, la série de Laurent se réduit à une série de Taylor.

Classification des singularités. Il est possible de classer les singularités d'une fonction f par l'examen de sa série de Laurent. Dans ce but nous supposerons dans la figure ci-dessus que $R_2 = 0$ si bien que f est holomorphe à l'intérieur de C_1 et sur C_1 excepté en $z = a$ qui est une singularité isolée.

1. Pôles. Si f à la forme (4) dans laquelle la partie principale ne possède qu'un nombre fini de termes donnés par

$$\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + ... + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

où $a_{-n} \neq 0$, alors $z = a$ est appelé un pôle d'ordre n.

Si $n = 1$ on a affaire à un pôle simple.

Si $z = a$ est un pôle de f alors $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$.

2. Singularités apparentes. Si une fonction uniforme f n'est pas définie en $z = a$ mais si $\lim\limits_{z \to a} f(z)$ existe, alors $z = a$ est appelée une singularité apparente. Dans un pareil cas on définit $f(z)$ pour $z = a$ comme étant égal à $\lim\limits_{z \to a} f(z)$.

Exemple Si $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ alors $z = 0$ est une singularité apparente car $f(0)$ n'est pas défini mais $\lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On définit $f(0) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1$. On remarque que dans ce cas

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\left\{z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + ...\right\} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + ...$$

3. Singularités essentielles. Si f est uniforme alors toute singularité qui n'est ni un pôle ni une singularité apparente est appelée une singularité essentielle. Si $z = a$ est une singularité essentielle de $f(z)$, la partie principale du développement de Laurent possède une **infinité** de termes.

Exemple Le développement de $e^{\frac{1}{z}}$ s'écrivant

$$e^{\frac{1}{z}} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + ...,$$

on en déduit que $z = 0$ est une singularité essentielle.

4. Singularités à l'infini. En posant $z = \frac{1}{w}$ dans $f(z)$ on obtient la fonction $f\left(\frac{1}{w}\right) = F(w)$. Alors la nature de la singularité à $z = \infty$ [le point à l'infini] est définie comme étant la même que celle de $F(w)$ en $w = 0$.

Exemple

La fonction $f(z) = z^3$ a un pôle triple en $z = \infty$

car $F(w) = f\left(\frac{1}{w}\right) = \frac{1}{w^3}$ possède un pôle triple en $z = 0$.

Résidus

Soit $f(z)$ une fonction holomorphe et uniforme à l'intérieur d'un cercle C et sur C, **excepté** au point $z = a$ centre de C. Alors $f(z)$ possède un développement en série de Laurent dans le voisinage de $z = a$, donné par

$$\begin{aligned} f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z-a)^n = \; & a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + ... \\ & + \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \frac{a_{-3}}{(z-a)^3} + ... \end{aligned} \tag{5}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, \qquad n = ... -2, -1, 0, 1, 2, ... \tag{6}$$

Dans le cas particulier $n = -1$ nous avons d'après (6)

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i a_{-1}. \tag{7}$$

On peut obtenir formellement (7) à partir de (5) par intégration terme à terme en utilisant le résultat

$$\oint_C \frac{1}{(z-a)^p} dz = \begin{cases} 2\pi i & p=1 \\ 0 & p \in \mathbb{Z},\ p \neq 1. \end{cases} \tag{8}$$

L'intégrale de (7) s'exprimant à l'aide du seul coefficient a_{-1} de (5), on appelle a_{-1} le **résidu** de $f(z)$ en $z=a$, et on le note par Res (f, a).

Calcul des résidus

Pour obtenir le résidu d'une fonction $f(z)$ en $z=a$ on pourrait croire d'après (5) à la nécessité d'écrire le développement de $f(z)$ en série de Laurent dans le voisinage de $z=a$.

Dans le cas où $z=a$ est un **pôle d'ordre** k il existe une formule simple qui donne a_{-1}

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left\{ (z-a)^k f(z) \right\} \tag{9}$$

Si $k=1$ (**pôle simple**) le résultat est particulièrement simple

$$a_{-1} = \lim_{z \to a} (z-a) f(z) \tag{10}$$

<u>Exemple</u>

Si $f(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z+1)^2}$, alors $z=1$ et $z=-1$ sont respectivement des pôles d'ordre 1 et 2.

On a d'après (10) et (9) avec $k=2$,

$$\text{Résidu en } z=1 : \lim_{z \to 1} (z-1) \left\{ \frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right\} = \frac{1}{4}.$$

$$\text{Résidu en } z=-1 : \lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz} \left\{ (z+1)^2 \left(\frac{z}{(z-1)(z+1)^2} \right) \right\} = -\frac{1}{4}.$$

Si $z=a$ est un **point singulier essentiel**, le résidu peut parfois être trouvé en utilisant des développements en série connus.

<u>Exemple</u>

Si $f(z) = e^{-\frac{1}{z}}$, alors $z=0$ est un point singulier essentiel et d'après le développement connu

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \ldots$$

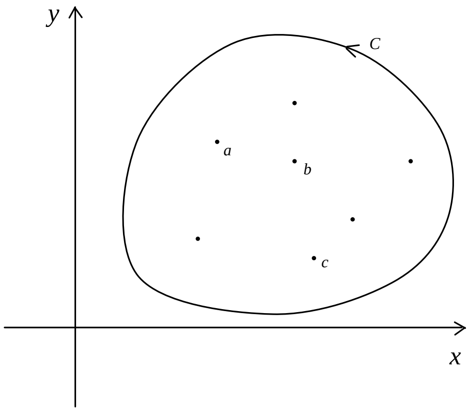
avec $u = -\frac{1}{z}$, on trouve

$$e^{-\frac{1}{z}} = 1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} - \frac{1}{3!z^3} + ...$$

où l'on voit que le résidu en $z = 0$ étant le coefficient de $\frac{1}{z}$ sa valeur est -1.

Le théorème des résidus

Soit $f(z)$ une fonction uniforme et holomorphe à l'intérieur d'une courbe fermée simple C et sur C, sauf en des singularités a, b, c, ... intérieures à C pour lesquelles les résidus de $f(z)$ sont $z_1 = a_{-1}$, $z_2 = b_{-1}$, $z_3 = c_{-1}$, ... [voir figure ci-contre].



Alors le théorème des résidus établit que

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\,(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + ...)$$

ou

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \sum_k \mathrm{Res}\,(f, z_k).$$

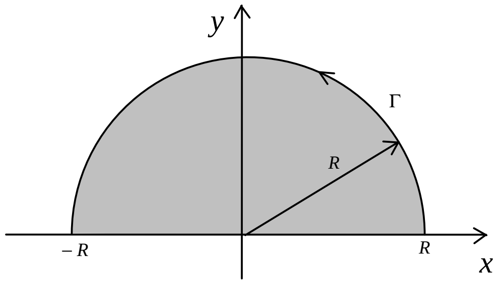
i.e. L'intégrale de $f(z)$ le long de C est égale à $2\pi i$ fois la somme des résidus de $f(z)$ en les singularités contenues dans C. Notons que le théorème de Cauchy et les formules intégrales sont des cas particuliers de ce théorème.

Calcul d'intégrales définies

Le calcul d'intégrales définies peut souvent être effectué en utilisant le **théorème des résidus** appliqué à une **fonction** et à un **contour** convenables dont le choix peut demander une grande **ingéniosité**. Les types d'intégrales qui suivent sont souvent rencontrées dans la pratique.

1. $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$, $F(x)$ est une fraction **rationnelle**.

On considère $\oint_C F(z)\,dz$ le long d'un **contour** C formé d'une portion de l'axe des x de $-R$ à $+R$ et du demi-cercle Γ du demi-plan supérieur $y > 0$, ayant l'axe des x pour diamètre, voir figure ci-contre.



On fait alors tendre R vers ∞. Si $F(z)$ est une fonction paire cette méthode peut être utilisée pour calculer $\int\limits_0^\infty F(x)\,dx$.

2. $\int\limits_0^{2\pi} G(\cos\theta, \sin\theta)\,d\theta,\;\; G(\cos\theta, \sin\theta)$ est une fraction rationnelle de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Soit $z = e^{i\theta}$, alors $\sin\theta = \dfrac{z - z^{-1}}{2i}$, $\cos\theta = \dfrac{z + z^{-1}}{2}$ et $dz = ie^{i\theta}d\theta$ ou $d\theta = \dfrac{1}{iz}dz$.
L'intégrale donnée est égale à $\oint\limits_C F(z)\,dz$ où C est le cercle unité centré à l'origine.

3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} F(x)\{\cos mx, \sin mx\}\,dx,\; F(x)$ est une fraction **rationnelle**.

Dans ce cas on considère $\oint\limits_C F(z)\,e^{imz}dz$ où C est le même contour que dans **1**.

4. Intégrales diverses nécessitant des contours particulier.

Théorèmes particuliers utilisés pour le calcul d'intégrales.

Lorsque l'on calcule des intégrales analogues à celles des types **1** et **3** ci-dessus, il est souvent nécessaire de montrer que $\int\limits_\Gamma F(z)\,dz$ et $\int\limits_\Gamma F(z)\,e^{imz}dz$ tendent vers zéro quand $R \to \infty$. Les théorèmes suivants sont fondamentaux.

Théorème 1 : Si $|F(z)| \leq \dfrac{M}{R^k}$ pour $z = R\,e^{i\theta}$, où $k > 1$ et M sont des constantes, alors si Γ est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_\Gamma F(z)\,dz = 0$.

Théorème 2 : Si $|F(z)| \leq \dfrac{M}{R^k}$ pour $z = R\,e^{i\theta}$, où $k > 0$ et M sont des constantes, alors si Γ est le demi-cercle de la figure ci-dessus, $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_\Gamma e^{imz}F(z)\,dz = 0$.