الفصــل الأول: مدخــل ريــاضـــي

I- جمل الإحداثيات

1 - الإحداثيات الديكارتية

في الفضاء (أو في المستوي) كل نقطة M معينة بإحداثياتها الديكارتية في المعلم **الثابت المتعامد و الموجه** $R(i, j, k)$. بحيث يكتب شعاع الموضع:

$$\vec{OM} = xi + yj + zk$$

عندما تتغير إحداثيات النقطة M بكميات متناهية في الصغر: dx و dy و dz تنتقل النقطة M انتقالا عنصريا:

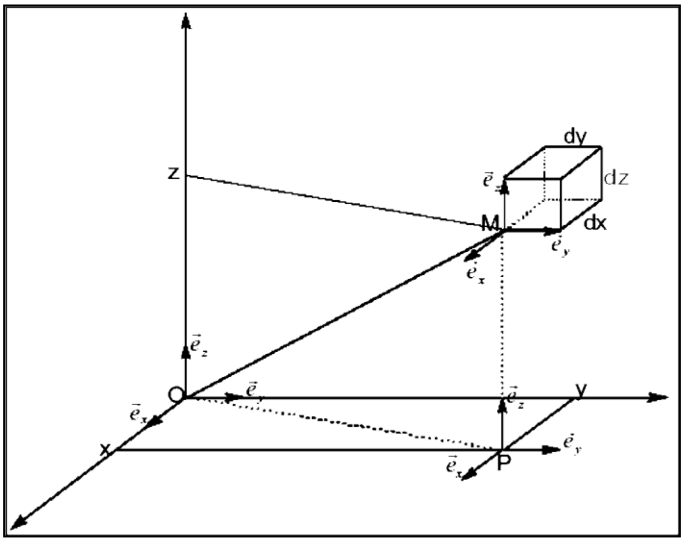
$$\overrightarrow{OM}'(x+dx, y+dy, z+dz) - \overrightarrow{OM}(x,y,z) = dxi + dyj + dzk$$

فالانتقال العنصري $d\overrightarrow{OM} = dx.i + dy.j + dz.k$

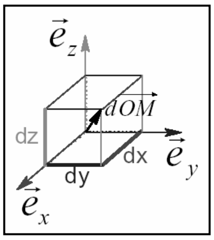
و منه طول الانتقال العنصري:

$$dl = \left\| d\overrightarrow{OM} \right\| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$$

الحجم العنصري $dV = dx.dy.dz$



المساحات العنصرية:

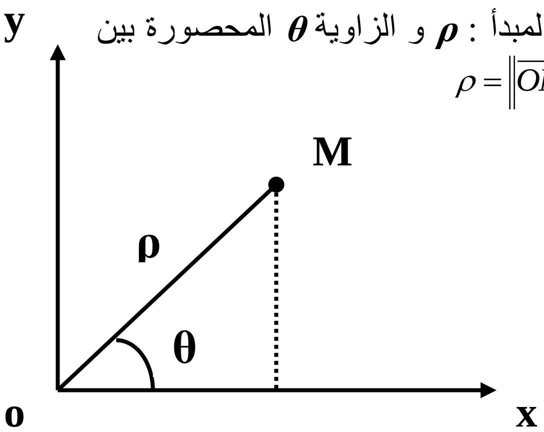


$$dS_x = dy.dz \qquad \perp i$$

$$dS_y = dx.dz \qquad \perp j$$

$$dS_z = dx.dy \qquad \perp k$$

2- الإحداثيات القطبية: (ρ,θ)



في هذه الجملة نعين كل نقطة M في المستوي بدلالة البعد عن المبدأ : ρ و الزاوية θ المحصورة بين المحور (ox) و شعاع الموضع $\overrightarrow{OM}$: $\theta = (\overrightarrow{ox},\overrightarrow{OM})$, $\rho = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$

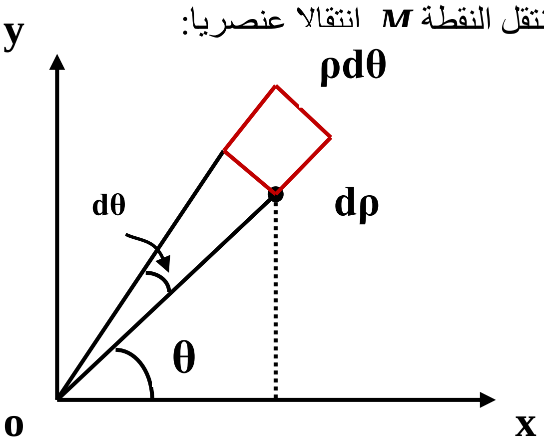
حيث شعاع الموضع يكتب:

$$\overrightarrow{OM} = \rho e_\rho$$

و لدينا:

$$x = \rho.\cos\theta$$
$$y = \rho.\sin\theta$$
$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$
$$tg\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = Arctg\frac{y}{x}$$

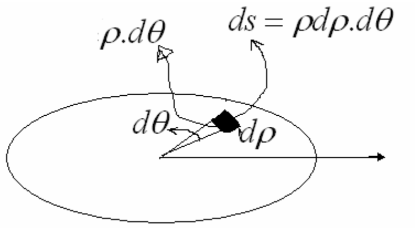
عندما تتغير إحداثيات النقطة M بكميات متناهية في الصغر: $d\theta$, $d\rho$ تنتقل النقطة M انتقالا عنصريا:



$$\overrightarrow{OM}'(\rho+d\rho,\theta+d\theta) - \overrightarrow{OM}(\rho,\theta) = d\,\overrightarrow{OM} = d\rho.u_\rho + \rho.d\theta.u_\theta$$

فالانتقال العنصري $$d\,\overrightarrow{OM} = d\rho.u_\rho + \rho.d\theta.u_\theta$$

المساحة العنصرية $$ds = \rho.d\rho.d\theta$$

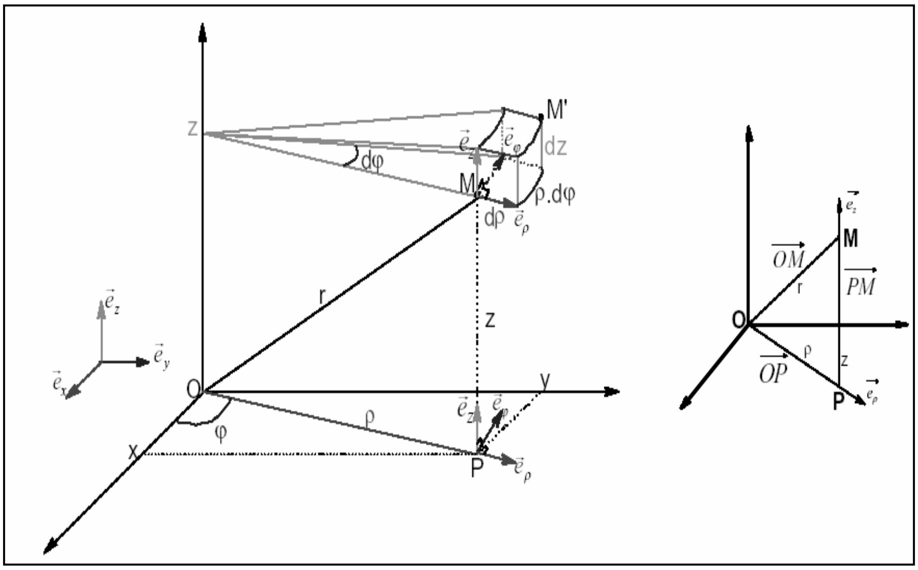


مساحة دائرة نصف قطرها R

$$S = \iint ds = \iint \rho.d\rho.d\theta = \int_0^R \rho.d\rho \int_0^{2\pi} d\theta = \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R \cdot \theta\Big]_0^{2\pi}$$
$$S = \pi R^2$$

3-الإحداثيات الاسطوانية (ρ,θ,z)

في المعلم الديكارتي $R(o,x,y,z)$ نعتبر النقطة M مسقطها P في المستوى (xoy) و Z المسقط العمودي لــ M : على المحور (oz) . بتمثيل النقطة P بدلالة الاحداثيات القطبية و النقطة Z بالاحداثية الديكارتية , نقول أننا نستعمل الاحداثيات الاسطوانية



شعاع الموضع $\vec{OM} = \vec{OP} + \vec{PM}$

$$\vec{OM} = \rho.u_\rho + z.k$$

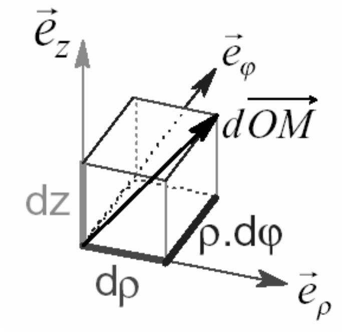
عندما تتغير إحداثيات النقطة M بكميات متناهية في الصغر: $d\rho$ و$d\theta$ و dz تنتقل النقطة M انتقالا عنصريا:

$$\overrightarrow{OM}'(\rho+d\rho,\theta+d\theta,z+dz)-\overrightarrow{OM}(\rho,\theta,z)=d\overrightarrow{OM}=d\rho.u_\rho+\rho.d\theta.u_\varphi+dz.k$$

الانتقال العنصري

$$dl = d\rho.u_\rho + \rho.d\theta.u_\varphi + dz.k_z$$

و منه فطول القوس العنصري: $dl = \left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{(d\rho)^2+(\rho d\theta)^2+(dz)^2}$



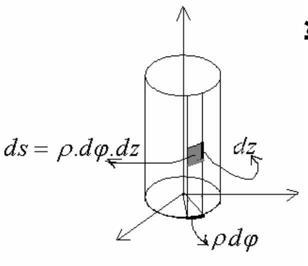
المساحات العنصرية

(السطح الجانبي للاسطوانة)

$$ds_\rho = \rho.d\theta.dz \qquad \perp u_\rho$$

$$ds_\rho = d\rho.dz \qquad \perp u_\theta$$

$$ds_\rho = \rho.d\rho.d\theta \qquad \perp k$$



الحجم العنصري $dV = \rho.d\rho.d\theta.dz$

❖ مساحة السطح الجانبي لاسطوانة نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها L :

$$S = \iint ds = \iint \rho.d\theta.dz = R\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz \qquad (\rho = R)$$
$$S = 2\pi RL$$

❖ حجم اسطوانة نصف قطر قاعدتها R وارتفاعها L

$$V = \iiint dV = \iiint \rho.d\rho.d\theta.dz = \int_0^R \rho.d\rho \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz$$
$$V = \pi R^2 L$$

4 -الإحداثيات الكروية (r,θ,φ)

في جملة الإحداثيات الكروية النقطة M في الفضاء معينة بالبعد عن المبدأ و زاويتين:

$r = \|\overrightarrow{OM}\|$: البعد القطري, $\theta = (k,\overrightarrow{OM})$, $\varphi = (i,\overrightarrow{Om})$

حيث المرور من الإحداثيات الديكارتية إلى الكروية يتم بالتحويل:
$$\begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

و مجال تغيرات الإحداثيات الكروية هو: $(r \geq 0,\ \ 0 \leq \theta \leq \pi,\ \ 0 \leq \varphi \leq 2\pi)$

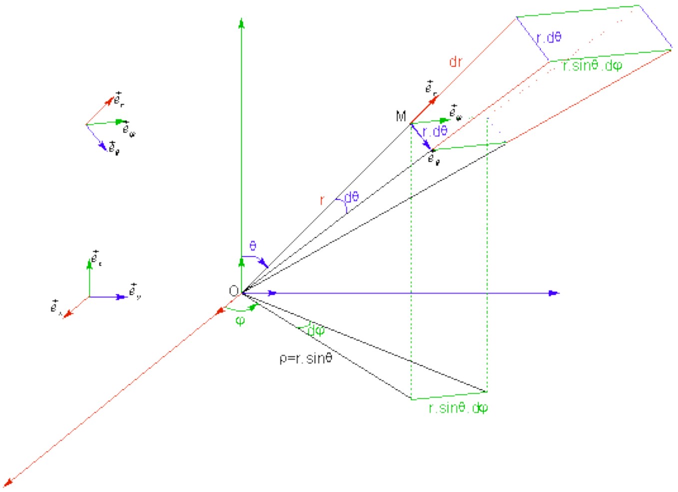
شعاع الموضع $\overrightarrow{OM} = r.u_r$

الانتقال العنصري

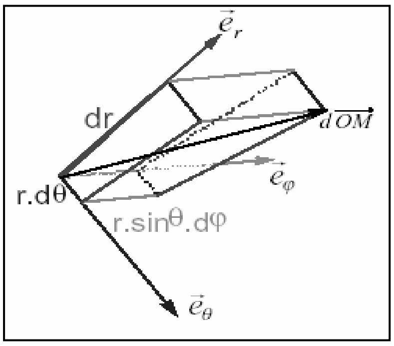
عندما تتغير إحداثيات النقطة M بكميات متناهية في الصغر: dr و $d\theta$ و $d\varphi$ تنتقل النقطة M انتقالا عنصريا:

$$\overrightarrow{OM}'(r+dr,\theta+d\theta,\varphi+d\varphi) - \overrightarrow{OM}(r,\theta,\varphi) = d\overrightarrow{OM} = dl = dr.u_r + r.d\theta.u_\theta + r\sin\theta.d\varphi.u_\varphi$$

$$dl = dr.u_r + r.d\theta.u_\theta + r\sin\theta.d\varphi.u_\varphi$$



و منه الطول العنصري: $dl = \sqrt{(dr)^2 + (rd\theta)^2 + (r.\sin\theta.d\varphi)^2}$



المساحات العنصرية

(سطح الكرة)

$$ds = r^2 \sin\theta.d\theta.d\varphi \qquad \perp u_r$$

$$ds = r \ \sin\theta.dr.d\varphi \qquad \perp u_\theta$$

$$ds = r.dr.d\theta \qquad \perp u_\varphi$$

➢ **مساحة سطح كرة نصف قطرها $r = R$**

$$s = \iint ds = \iint r^2 \sin\theta.d\theta.d\varphi = R^2 \int_0^\pi \sin\theta.d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$s = 4\pi R^2$$

الحجم العنصري : $dV = r^2 dr.\sin\theta.d\theta.d\varphi$

➢ حجم كرة نصف قطرها R

$$V = \iiint dV = \iiint r^2 dr.\sin\theta.d\theta.d\varphi = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin\theta.d\theta.\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

II- المؤثرات:

1- مؤثر التدرج في جملة الإحداثيات الديكارتية

- يعطى المؤثر نابلا Nabla بالعبارة:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k$$

- إذا طبق المؤثر Nabla على **دالة سلمية** $f(x, y, z)$ سمي تدرجا gradient

$$\overrightarrow{grad}\, f = \nabla . f = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

ملاحظة: ليكن الانتقال العنصري $dl = dxi + dyj + dzk$

ولتكن الدالة السلمية $f(x, y, z)$

* يمكن استنتاج عبارة التدرج بالاستعانة بالعلاقة $df(x, y, z) = (\nabla f)(dl)$

* شعاع التدرج يدلنا على اتجاه التغير الاعظمي للدالة $f(x, y, z)$

2- التباعد:

إذا طبق nabla على مقدار شعاعي على شكل جداء سلمي في جملة الإحداثيات الديكارتية سمي تباعدا.

- لتكن الدالة الشعاعية $A = A_x i + A_y j + A_z k$

$$divA = \nabla . A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

3- الدوران

إذا طبق nabla على مقدار شعاعي على شكل جداء شعاعي (صحيحة في جملة الإحداثيات الديكارتية فقط) سمي دورانا

لتكن الدالة الشعاعية $A = A_x i + A_y j + A_z k$

$$\overrightarrow{rot} A = \nabla \wedge A = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right] i - \left[\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right] j + \left[\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right] k$$

مؤثر التدرج في جملة الإحداثيات الاسطوانية

يعطى الشعاع نابلا Nabla في الإحداثيات الأسطوانية $\nabla = \frac{\partial}{\partial \rho} u_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial}{\partial z} k$

إذا طبق المؤثر Nabla على دالة سلمية $f(\rho,\theta,z)$ سمي تدرجا gradient

$$\overrightarrow{grad}\, f = \nabla . f = \frac{\partial f}{\partial \rho} u_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta} u_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} k$$

<u>التباعد في جملة الإحداثيات الاسطوانية:</u>

لتكن الدالة الشعاعية $A(A_\rho, A_\theta, A_z) = A_\rho u_\rho + A_\theta u_\theta + A_z k$

$$divA = \nabla A = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right]$$

<u>الدوران في جملة الإحداثيات الاسطوانية</u>

لتكن الدالة الشعاعية : $A = A_\rho u_\rho + A_\theta u_\theta + A_z k$

$$\overrightarrow{rot}A = \begin{bmatrix} \frac{u_\rho}{\rho} & \frac{u_\varphi}{1} & \frac{k}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\theta & A_z \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \rho A_\theta}{\partial z}\right]\frac{u_\rho}{\rho} - \left[\frac{\partial A_z}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\right]\frac{u_\theta}{1} + \left[\frac{\partial \rho A_\theta}{\partial \rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta}\right]\frac{k}{\rho}$$

<u>مؤثر التدرج في جملة الإحداثيات الكروية</u>

عبارة الشعاع نابلا Nabla هي $\nabla = \frac{\partial}{\partial r} u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} u_\varphi + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \varphi} u_\varphi$

إذا طبق المؤثر Nabla على دالة سلمية $f(r,\theta,\varphi)$ سمي تدرجا

$$\overrightarrow{grad}\, f = \nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta} u_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi} u_\varphi$$

<u>التباعد في جملة الإحداثيات الكروية:</u>

لتكن الدالة الشعاعية $A(A_r, A_\theta, A_\varphi) = A_r u_r + A_\theta u_\theta + A_\varphi u_\varphi$

$$divA=\nabla A=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\frac{\partial\left(r^2\sin\theta.A_r\right)}{\partial r}+\frac{\partial\left(r\sin\theta.A_\theta\right)}{\partial\theta}+\frac{\partial\left(rA_\varphi\right)}{\partial\varphi}\right]$$

<u>الدوران في جملة الإحداثيات الكروية:</u>

لتكن الدالة الشعاعية : $A=A_r u_r+A_\theta u_\theta+A_\varphi u_\varphi$

$$\vec{rot}A=\begin{bmatrix}\frac{u_r}{r^2\sin\theta} & \frac{u_\theta}{r\sin\theta} & \frac{u_\varphi}{r}\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{bmatrix}=$$

$$\left[\frac{\partial\left(r\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial\theta}-\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial\varphi}\right]\frac{u_r}{r^2\sin\theta}-\left[\frac{\partial\left(r\sin\theta A_\varphi\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\varphi}\right]\frac{u_\theta}{r\sin\theta}+\left[\frac{\partial\left(rA_\theta\right)}{\partial r}-\frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\frac{u_\varphi}{r}$$

<u>ملاحظات:</u>

* العلاقة التالية محققة دوما

$$\vec{rot}\left(\vec{grad}\,f\right)=0$$

معنى هذا إذا كان لدينا مثلا $\vec{rot}\,A=0$ فانه توجد دالة سلمية f حيث $A=\vec{grad}\,f$

* تباعد الدوران معدوم دوما $div\left(\vec{rot}\,A\right)=0$

<u>III - تكاملات المضاعفة:</u>

<u>التكامل الثنائي:</u>

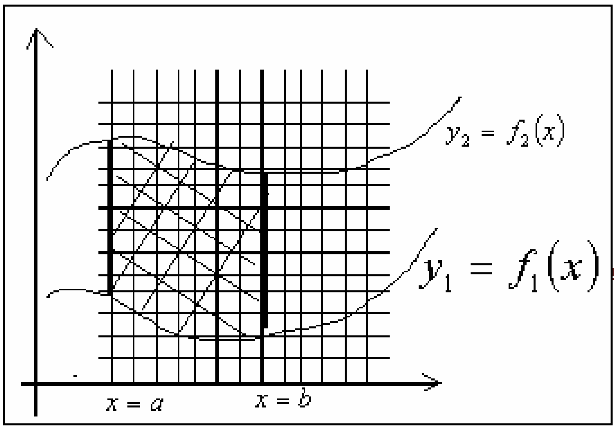
ليكن $F(x,y)$ تابعا ذا متحولين (x,y) معرفا على منطقة A حدودها كما في الشكل

* من الأسفل محددة بالتابع $y_1=f_1(x)$ ومن الأعلى بالتابع $y_2=f_2(x)$

*من اليسار بالمستقيم $x=a$ من اليمين بالمستقيم $x=b$

التكامل الثنائي للتابع $F(x,y)$ على المساحة S يرمز له

ب: $\iint_S F(x,y).dx.dy$



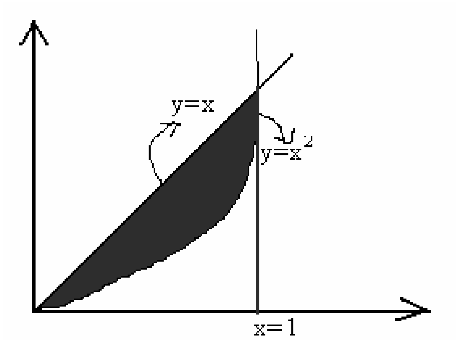
نقوم أولا بإجراء التكامل على y باعتبار x ثابت ثم

نكامل ثانية الناتج بالنسبة لـx أو العكس.

ابسط تطبيق للتكامل الثنائي هو حساب مساحة منطقة
ما في المستوي

مثال: التكامل
$$\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\int_0^1 dx\left[x-x^2\right]=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right)_0^1=\frac{1}{6}$$

يمثل مساحة المنطقة المحصورة بين المنحنى $y=x$ و المنحنى $y=x^2$ و المستقيمين $x=0$ و$x=1$



التكامل الثلاثي:

ليكن حجما V في الفضاء xyz
وليكن $F(x,y,z)$ تابعا تحتوي مجموعة تعريفه على المنطقة V التكامل الثلاثي لــ: F على المنطقة V يعطى بالعلاقة:
$$\iiint_V F(x,y,z)dV=\iiint_V F(x,y,z)dxdydz$$

*إذا كان مثلا $F(x,y,z)=1$ فالتكامل يمثل الحجم V
*إذا كان مثلا $F(x,y,z)=\rho r^2$ حيث ρ تمثل الكتلة الحجمية و r البعد عن محور معين فالتكامل يمثل عزم عطالة الجسم بالنسبة للمحور.