Centre universitaire Abdelhafid Boussouf- Mila Année universitaire 2020/2021
Deuxième Année LMD Mathématiques ***Matière*** : *Analyse 04*
Responsable de la matière : Dr. Smail KAOUACHE

**limites, différentiabilité...**

**Exercice n°1** Calculer ( lorsqu'elles existent) les limites suivantes

1. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$, 2. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 3. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\tan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}$,
4. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin\left(x^2\right)\sin(y)}{x^2+\sinh^2(y^2)}$, 5. $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \left(x^2+y^2\right)^x$.

**Exercice n°2**

**I**) Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les fonctions $f$ et $g$ sont-elles différentiabes en $(0,0)$.

**II**) Trouver de deux façons différentes, le développement limité à l'ordre 2 de $f$ au voisinage de $(0,0)$, telle que :

$$f(x,y) = \cos(x)\exp(y).$$

**III**) Soit $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\varphi(x,y) = (x - \sin(\alpha y),\ y - \sin(\alpha x)),\ \alpha \in \left]-1,1\right[.$$

La fonction $\varphi$ est-elle un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$?

**Exercice n°3**

Soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ avec $\varphi(x,y) = (u = x-y, v = x+y)$. On suppose $g$ de classe $C^2$. Soit $f = g \circ \varphi$.

1) Montrer que $\varphi$ détermine un $C^2$-difféomorphisme .

2) Exprimer les dérivées partielles secondes de $f$ en fonction de celle de $g$.

3) Montrer que si $f$ est solution de l'E.D.P :

$$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = 4(x^2 - y^2), \tag{1}$$

alors $g$ est solution de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(x,y) - uv = 0$

4) En déduire la solution générale de (1)

## (Extrema)

**Exercice n°1**

1) a. Montrer que l'équation $x^2+2\exp(y)+\sin(xy)-2=0$ définit au voisinage du point 0 une fonction implicite $y=\varphi(x)$ telle que $\varphi(0)=0$.

b. Montrer que $\varphi$ admet un maximum local en 0.

2) a. Montrer que l'équation $3x^2+6y^2+z^5-2z^4+1=0$ définit au voisinage du point $(0,0)$ une fonction implicite $z=\varphi(x,y)$ telle que $\varphi(0,0)=1$.

b. Vérivier que $(0,0)$ est un point stationnaire de $\varphi$. Etudier sa nature.

## (Intégrales multiples)

**Exercice n°1** :

1) Soit $A=[0,1]\times[0,2]$. Calculer $I_1=\iint\limits_A y\dfrac{\exp(2x+y^2)}{1+\exp(x)}dxdy$.

2) Soit $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1,\ y>1,\ x+y<3\right\}$. Calculer $I_2=\iint\limits_B \dfrac{dxdy}{(x+y)^3}$.

**Exercice n°2** :

1. Soit $C=[0,+\infty[$ . Calculer l'intégrale généralisée de Gauss $J_1=\int\limits_C \exp(-x^2)dx$.

2) Soit $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0<x<y<2x,\ xy<4,\ x^2+y^2>4\right\}$. Calculer $J_2=\iint\limits_D x^2ydxdy$.

3) Soit $E=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 1<x^2+y^2<4\right\}$. Calculer $J_3=\iint\limits_E \dfrac{\cos(x^2+y^2)}{2+\sin(x^2+y^2)}dxdy$.

4) Soit $F=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2<1,\ x+y>1\right\}$. Calculer $F=\iint\limits_F \dfrac{dxdy}{(x^2+y^2)^2}$.

# Solutions des exercices

**limites, différentiabilité....**

**Solution de l'exercice n°1** Calculons ( lorsqu'elles existent) la limite de $f$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$

1. $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. On a $f(0,y) = -1 \neq 1 = f(x,0) \Rightarrow \lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y)$ n'existe pas.

2. $\left|f(x,y)\right| = \left|\dfrac{\sin(xy)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \leq \dfrac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq |x| \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$, donc $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 0$.

3. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x)\sin(y)}{\tan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)} = \left(\dfrac{\dfrac{\sin(x)}{x} \times \dfrac{\sin(y)}{y}}{\dfrac{\tan\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right) \times \left(\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$.

4. $\left|f(x,y)\right| = \left|\dfrac{\sin\left(x^2\right)\sin(y)}{x^2+\sinh^2(y^2)}\right| \leq \left|\dfrac{x^2\left|y\right|}{x^2}\right| \leq \left|y\right| \to 0$, quand $(x,y) \to 0_{\mathbb{R}^2}$, donc $\lim_{(x,y)\to 0_{\mathbb{R}^2}} f(x,y) = 0$.

**Solution de l'exercice n°2**

**I**) Soient $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x^2)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2\sin(x)}{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Les fonctions $f$ et $g$ sont-elles différentiabes en $(0,0)$?.

1. $\dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(t,0)-f(0,0)}{t} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0,t)-f(0,0)}{t} = 0 \end{cases}$

$L_1(x,y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)y = 0$, donc $\dfrac{\left|f(x,y)-f(0,0)-L_1x,y)\right|}{\left\|(x,y)\right\|} \underset{V(y,0)}{\simeq} \left|\dfrac{y^2x^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2} \to 0$, quand $(x,y) \to (0,0)$.

Alors, $f$ est différentiable en $(0,0)$.

2. De même : $\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{g(t,0)-g(0,0)}{t} = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \dfrac{g(0,t)-g(0,0)}{t} = 0 \end{cases}$

$L_2(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial x}(0,0)x+\dfrac{\partial g}{\partial y}(0,0)y = 0$, donc $\dfrac{\left|g(x,y)-g(0,0)-L_2x,y)\right|}{\left\|(x,y)\right\|} = \dfrac{y^2\sin(x)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = G(x,y)$. On a $G(x,x) = \dfrac{x^2\sin(x)}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} \overset{V(0)}{\simeq} \dfrac{x^3}{(2x^2)^{\frac{3}{2}}} = \dfrac{1}{(2)^{\frac{3}{2}}} \nrightarrow 0$. Alors, $g$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.

**II**) Trouvons de deux façons différentes, le développement limité à l'ordre 2 de $f$ au voisinage de $(0,0)$, telle que :

$$f(x,y) = \cos(x)\exp(y).$$

<u>Première méthode</u> **:** Il est claire que $f$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Puisque $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 1$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = -1$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = 1$, on a alors

$$f(x,y) \quad = \quad \cos(x)\exp y = 1+y-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+(x^2+y^2)\epsilon(x,y),$$

avec $\epsilon(x,y)\to 0$, quand $(x,y)\to(0,o)$.
<u>Deuxième méthode :</u>

$$f(x,y) = \cos(x)\exp y = \left(1-\frac{x^2}{2}+x^2\epsilon(x)\right)\left(1+y+\frac{y^2}{2}+y^2\epsilon(y)\right).$$

On fait le produit, et en conservant uniquement les termes en $x, y, xy, x^2, y^2$ et en englobant tout le reste de la forme $(x^2+y^2)\epsilon(x,y)$, on obtient le même résultat.

**III**) *$\det J_\varphi(x,y) = \begin{vmatrix} 1 & -\alpha\cos(\alpha y) \\ -\alpha\cos(\alpha y) & 1 \end{vmatrix} = 1-\alpha^2\cos(\alpha x)\cos(\alpha y) \geq 1-\alpha^2 > 0$.i.e. $J_\varphi$ est inversible au point $(x,y)$.
* $\varphi$ est de classe $C^\infty$ (évident).
* $\varphi$ est injective ?
Soient $(x_1,y_1)$ et $(x_2,y_2)\in\mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_1,y_1) = \varphi(x_2,y_2)$. Alors
$\begin{cases} x_1-\sin(\alpha y_1) = x_2-\sin(\alpha y_2) \\ y_1-\sin(\alpha x_1) = y_2-\sin(\alpha x_2) \end{cases} \Leftrightarrow |x_1-x_2| \overset{TAF}{\leq} \alpha\left|y_1-y_2\right| \overset{TAF}{\leq} \alpha^2|x_1-x_2|$.
Puisque $1-\alpha^2>0$, on a alors $x_1 = x_2$. Ce qui entraîne à son tour $y_1 = y_2$.

D'aprés le théorème d'inversion globale, $\varphi$ est un $C^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\varphi(\mathbb{R}^2)$.

**Solution de l'exercice n°3**

1. $\varphi$ est injective et est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}^2$ (évident). De plus $u = x - y$ et $v = x + y \Rightarrow \det j_\varphi(x,y) = \det\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2 \neq 0$, i.e $j_\varphi$ est inversible.

D'après le théorème d'inversion globale, $\varphi$ est un $C^{+\infty}$ difféomorphisme.

2. Nous avons $f = g \circ \varphi$. On trouve

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) & \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.\text{C'est-à-dire}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}.$$

$$\text{Donc} \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\ \quad = \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}(u,v) + 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}(u,v) \\ \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = \left(-\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}\right)\left(-\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \\ \quad = \frac{\partial^2 g}{(\partial u)^2}(u,v) - 2\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) + \frac{\partial^2 g}{(\partial v)^2}(u,v) \end{cases}.$$

3. L'équation : $\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(x,y) - \frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(x,y) = 4(x^2 - y^2)$ devient alors : $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u,v) = uv$.

4. En intégrant l'équation précédente on trouve $g(u,v) = \frac{1}{4}u^2v^2 + F(u) + H(v))$, où $F, H$ sont de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$.

Par suite $f(x,y) = g(u,v) = \frac{1}{4}(x^2 - y^2)^2 + F(x-y) + H(x+y)$.

## (Extrema)

**Solution de l'exercice n°1**

1) a. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = x^2 + 2\exp(y) + \sin(xy) - 2$.

Alors, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ : $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2\exp(y) + x\cos(xy)$.

Ainsi, puisque $f(0,0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 2 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\varphi : ]-\sigma, \sigma[ \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0) = 0$ et pour tout $x \in ]-\sigma, \sigma[$ : $f(x, \varphi(x)) = 0$, de plus $\varphi \in C^\infty$.

**b-**Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y\cos(xy)$. Par conséquent $\dot{\varphi}(0) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)} = 0$. Autrement dit 0 est un point stationnaire de $\varphi$.

Nature du point stationnaire de $\varphi$. Puisque pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\ddot{\varphi}(0) = -\frac{\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0, \varphi(0))}{\frac{\partial f}{\partial y}(0, \varphi(0))} = -1 < 0$, la fonction $\varphi$ admet alors un maximum local en $(0, 0)$.

**2) a.** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y, z) = 3x^2 + 6y^2 + z^5 - 2z^4 + 1$. Alors, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ : $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 5z^4 - 8z^3$.

Ainsi, puisque $f(0, 0, 1) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 1) = -3 \neq 0$, le théorème des fonctions implicites nous permet d'affirmer qu'il existe localement une unique fonction continue $\varphi : B((0, 0), \sigma) \to \mathbb{R}$ telle que $\varphi(0, 0) = 1$ et pour tout $(x, y) \in B((0, 0), \sigma)$ : $f(x, y, \varphi(x, y)) = 0$, de plus $\varphi \in C^\infty$.

**b-**Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 6x$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 12y$.

Par conséquent $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0) = 0$. Autrement dit $(0, 0)$ est un point stationnaire de $\varphi$.

Nature du point stationnaire de $\varphi$. Puisque pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ :
$\frac{\partial^2 f}{(\partial x)^2}(0, 0, 1) = 6$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0, 1) = 0$ et $\frac{\partial^2 f}{(\partial y)^2}(0, 0, 1) = 12$, on a donc $A = 2, B = 0$ et $C = 4$ ou encore $B^2 - AC = -8 < 0$ et $A = 2 > 0$; ce qui entraîne que la fonction $\varphi$ admet un minimum local en $(0, 0)$.

**(Intégrales multiples)**

**Solution de l'exercice n°1**

1.

$$\begin{aligned}\iint_A y\frac{\exp(2x+y^2)}{1+\exp(x)}dxdy &= \left(\int_0^1 \frac{\exp(2x)}{1+\exp(x)}dx\right)\times\left(\int_0^2 y\exp(y^2)dy\right)\\ &= \left(\int_1^e \frac{z}{1+z}dz\right)\times\left(\int_0^2 y\exp(y^2)dy\right)\\ &= [z-\ln(1+z)]_1^e\times\left[\frac{\exp(y^2)}{2}\right]_0^2 = \left(e-1+\ln\left(\frac{2}{1+e}\right)\right)\times\left(\frac{\exp(4)-1}{2}\right).\end{aligned}$$

2. $B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x>1, y>1, x+y<3\right\}$ peut se réécrire sous la forme :

$$B=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 1<x<2, 1<y<3-x\right\} \text{ (FIGURE 1).}$$

Alors

$$\begin{aligned}\iint_B \frac{dxdy}{(x+y)^3} &= \int_1^2 dx\int_1^{3-x}\frac{dy}{(x+y)^3} = \frac{-1}{2}\int_1^2\left[\frac{1}{(x+y)^2}\right]_1^{3-x}dx\\ &= \frac{-1}{2}\int_1^2\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{(x+1)^2}\right)dx = \frac{-1}{2}\left[\frac{1}{9}x+\frac{1}{x+1}\right]_1^2 = \frac{1}{36}\end{aligned}$$

**Solution de l'exercice n°2**

1. L'intégrale généralisée de Gauss $J_1=\int_0^{\infty}\exp(-x^2)dx$ est convergente.

Posons $J_1^a=\int_0^a\exp(-x^2)dx$

Donc $(J_1^a)^2=\int_0^a\exp(-x^2)dx\times\int_0^a\exp(-y^2)dy=\iint_{[0,a]^2}\exp(-(x^2+y^2))dxdy.$

Posons $x=\rho\cos(\theta)$ et $y=\rho\sin(\theta)$. Alors $(\rho,\theta)\in\left[0,\sqrt{2}a\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Par suite $(J_1^a)^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{\sqrt{2}a}\rho\exp(-\rho^2)d\rho=\frac{-\pi}{4}\left[\exp(-\rho^2)\right]_0^{\sqrt{2}a}.$

Ce qui implique $(J_1)^2 = \frac{\pi}{4}$, et puisque $\exp(-x^2) > 0$, pour tout $x$, on a alors

$$J_1 = \int_0^{\infty} \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2. $D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y < 2x,\ xy < 4,\ x^2 + y^2 > 4\right\}$ peut se réécrire sous la forme :

$$D = D_1 \cup D_2 \text{ (FIGURE 1)},$$

où

$$D_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{2}{\sqrt{5}} < x < \sqrt{2} \text{ et } \sqrt{4 - x^2} < y < 2x\right\},$$

et

$$D_2 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 :\ \sqrt{2} < x < 2 \text{ et } x < y < \frac{4}{x}\right\}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
\iint_D x^2 y dxdy &= \iint_{D_1} x^2 y dxdy + \iint_{D_2} x^2 y dxdy = \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} x^2 \left( \int_{\sqrt{4-x^2}}^{2x} y dy \right) dx + \int_{\sqrt{2}}^{2} x^2 \left( \int_{x}^{\frac{4}{x}} y dy \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} \left(5x^4 - 4x^2\right) dx + \frac{1}{2} \int_{\sqrt{2}}^{2} \left(16 - x^4\right) dx + \\
&= \frac{1}{2} \left[x^5 - \frac{4}{6} x^3\right]_{\frac{2}{\sqrt{5}}}^{\sqrt{2}} + \frac{1}{2} \left[16x - \frac{1}{5} x^5\right]_{\sqrt{2}}^{2} = -\frac{104}{5}\sqrt{2} + \frac{32}{375}\sqrt{5} + \frac{64}{5}.
\end{aligned}$$

3) Soit $E = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 < 4\right\}$. Calculons $J_3 = \iint_E \frac{\sin(x^2 + y^2)}{2 + \cos(x^2 + y^2)} dxdy$.
On pose $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$. Donc $\rho \in [1, 2]$ et $\theta \in [0, 2\pi]$ . On a alors

$$J_3 = \int_0^{2\pi} \left( \int_1^2 \frac{\rho \cos(\rho^2) d\rho}{2 + \sin(\rho^2)} \right) d\theta = \pi \left[\ln\left(2 + \sin(\rho^2)\right)\right]_1^2 = \pi \ln\left(\frac{2 + \sin(4)}{2 + \sin(1)}\right).$$

4) Soit $F = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1,\ x + y > 1\right\}$. Calculons $J_4 = \iint_F \frac{dxdy}{(x^2 + y^2)^2}$..
On pose $x = \rho \cos\theta$ et $y = \rho \sin\theta$. Donc $\rho \in \left[\frac{1}{\cos(\theta) + \sin(\theta)}, 1\right]$ et $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

( FIGURE 1). On a alors

$$
\begin{aligned}
J_4 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{1}{\cos(\theta)+\sin(\theta)}}^{1} \frac{d\rho}{\rho^3} \right) d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( (\cos(\theta)+\sin(\theta))^2 - 1 \right) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(2\theta)\, d\theta = -\frac{1}{4} \left[\cos(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

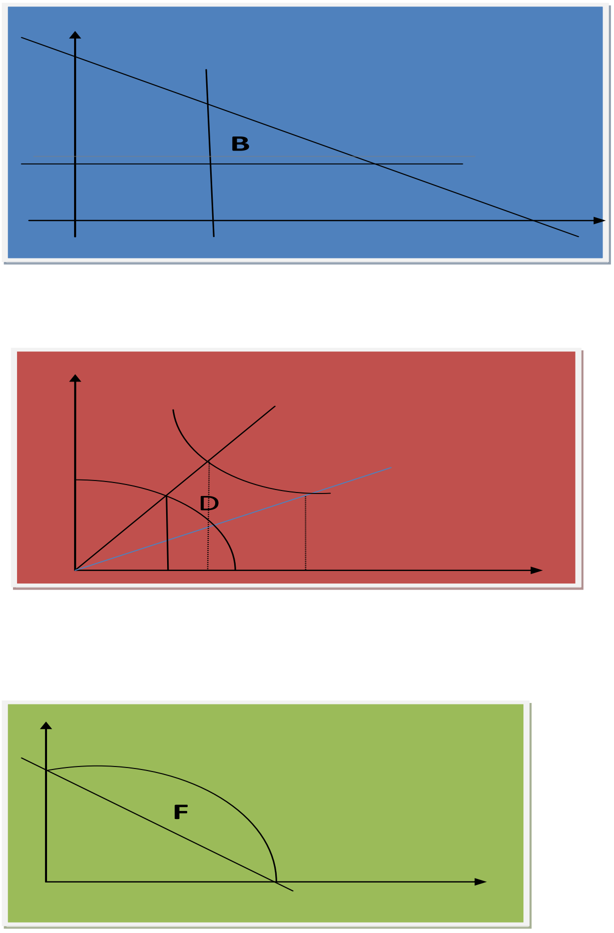


FIGURE 1 –