Table des matières

Chapitre 1

Formule de Taylor et Développements limités

1.1 *Formule de Taylor*

1.1.1 *Formule de Taylor*

Une fonction continue sur un intervalle $[a,b]$ *et dérivable en* $x_0 \in]a,b[$ *peut s'écrire au voisinage de* x_0

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + R(x)$$

avec

$$R(x) = \varepsilon(x)(x - x_0) \qquad et \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

cela revient à dire que f *peut être approximé par le polynôme de degré* 1.

$$x \longmapsto P_1(x) = f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0)$$

et l'erreur tendant vers zéro si $x \longrightarrow x_0$.

La formule de Taylor généralisé ce résultat en montrant que les fonctions n *fois dérivables peuvent être approximés au voisinage de* x_0 *par des polynômes de degré* n.

i.e:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &\quad + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x). \end{aligned}$$

$$\left(\text{ou } f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x) \right)$$

Où le polynôme P_n est de degré n

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k \\ &= f(x_0) + (x - x_0) f'(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \\ &\quad + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \end{aligned}$$

L'erreur $R_n(x)$ est appelé reste d'ordre n

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} + ... \\ &= \varepsilon(x) . (x - x_0)^n \quad et \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

1.1.2 *Théorème de Taylor*

Soient f et $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions vérifiant les conditions suivantes:

1) *$f \in C^n([a, b])$ et $f^{(n)}$ est dérivable sur $]a, b[$.*

2) *La fonction $g \in C([a, b])$ et dérivable sur $]a, b[$ et $\forall x \in]a, b[, g'(x) \neq 0$ et soit $x_0 \in [a, b]$. Alors $\forall x \in [a, b], x \neq x_0$ on a:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 \quad (*) \\ &\quad + ... + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x_0, x). \end{aligned}$$

i.e:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x_0, x)$$

où

$$R_n(x_0,x)=\frac{f^{(n+1)}(c)(x-c)^n g(x)g(x_0)}{n!g'(c)} \tag{**}$$

c est un point strictement compris entre x *et* x_0 $(c\in\,]x,x_0[)$.

- *L'expression (*) est dite formule de Taylor avec reste généralise (**).*
- *Le choix de diverse fonction g vérifiant la condition (**) entraine diverse forme du reste* $R_n(x_0,x)$.

1.1.3 *Formule de Taylor avec le reste de Lagrange*

Théorème 1.1.1 *:*

Soit $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ *une fonction telle que* $f\in C^n([a,b])$ *et* $f^{(n)}$ *est dérivable sur* $]a,b[$ *et soit* $x_0\in[a,b]$. *Alors* $\forall x\in[a,b], x\neq x_0$ *on a:*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\frac{f^{(3)}(x_0)}{3!}(x-x_0)^3 \\ &\quad +\dots\dots\dots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}. \end{aligned}$$

c est strictement compris entre x *et* x_0.
le terme $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ *est appelé le reste de Lagrange.*

Remarque 1.1.1 *:*

1) *On utilise parfois de Taylor avec une autre évaluation de reste (reste de Cauchy)*

En prenant: $c=x_0+\theta(x-x_0)$ *où* $0<\theta<1$.

On obtient:

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x_0,x)$$

où

$$R_n(x_0,x)=\frac{1}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))$$

2) *En prenant* $h=x-x_0$ *et* $c=x_0+\theta h$ *on obtient:*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}h^k+\frac{h^{n+1}(1-\theta)^n}{n!}f^{(n+1)}(x_0+\theta h).$$

1.1.4 *Formule de Maclaurin*

Si $x_0 = 0$ *dans la formule de Taylor Lagrange on obtient la formule dite de Maclaurin*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0)$$
$$+\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x) \qquad \text{où } \ 0 < \theta < 1.$$

1.1.5 *Formule de Taylor avec le reste de Young*

Théorème 1.1.2 *:*

Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in [a,b]$, *supposons que* $f^{(n)}(x_0)$ *existe et fini alors* $\forall x_0 \in [a,b]$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o(x - x_0)^n$$

le reste $R_n(x_0, x) = o(x - x_0)^n$ *est dite reste de Young, qui posé la propriété suivante:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

En posant $\varepsilon(x) = \dfrac{R_n(x_0, x)}{(x - x_0)^n}$ *pour* $x \neq x_0$ *et* $\varepsilon(x_0) = 0$, *on obtient le reste de Young sous la forme suivante:*

$$R_n(x_0, x) = (x - x_0)^n \varepsilon(x) \qquad \text{où} \quad \lim_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$$

Si $x_0 = 0$, *on obtient la formule de Maclaurin-Young*

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1!}f'(0) + \frac{x^2}{2!}f''(0) + \frac{x^3}{3!}f^{(3)}(0) + \ldots\ldots + \frac{x^n}{n!}f^{(n)}(0) + x^n\varepsilon(x)$$

où

$$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

1.2 *Développements limités*

1.2.1 *Développements limités au voisinage de* 0

Définition 1.2.1 *:*

Soit f une fonction définie sur le voisinage de $x = 0$, sauf peut-être en 0.

On dit que f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 s'il existe des nombres $a_0, a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ et une fonction ε tel que pour tout élément x non nul d'un intervalle I de $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad \textit{avec } \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0 \\ &= P_n(x) + x^n \varepsilon(x) \qquad \textit{où} \qquad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0. \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 *:*

Le polynôme $P_n(x)$ est appelé partie régulière du développement limité et $x^n \varepsilon(x)$ est reste ou partie complémentaire.

Exemple 1.2.1 *:*

$f(x) = \dfrac{1}{1-x}; \quad x \neq 1$

On obtient par division suivant les puissances croissantes à l'ordre n

$$\begin{array}{l|l} 1 & 1-x \\ \cline{2-2} \underline{1-x} & 1 + x + x^2 + ... + x^n \\ x & \\ \underline{x - x^2} & \\ x^2 & \\ \vdots & \\ \underline{x - x^{n+1}} & \\ x^{n+1} & \end{array}$$

Alors:

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

où

$$P_n(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^n \qquad \textit{et} \qquad x^n \varepsilon(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x}$$

Donc

$$\varepsilon(x) = \frac{x}{1-x} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{1-x} = 0$$

Donc la fonction $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ admet un développement limité au voisinage de 0.

Proposition 1.2.1 *:*

Soit f une fonction admettant un développement limité au voisinage de 0.

1) *Si f est paire, la partie régulière $P_n(x)$ est un polynôme pair.*

2) *Si f est impaire, la partie régulière $P_n(x)$ est un polynôme impair.*

1.2.2 *Unicité du développement limité*

Théorème 1.2.1 *:*

Si f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 alors ce développement limité est unique.

1.2.3 *Obtention de développement limité à l'aide de la formule de Taylor-Young*

Théorème 1.2.2 *:*

Si $f^{(n)}(0)$ existe alors f admet le développement limité:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x)$$

$$\text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Corollaire 1.2.1 *:*

Si $f^{(n)}(0)$ existe et si f admet un développement limité d'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + x^n\varepsilon(x)$$

Alors: $\quad f(0) = a_0; \quad \dfrac{f'(0)}{1!} = a_1; \quad \dfrac{f''(0)}{2!} = a_2; ....; \quad \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = a_n$

1.2.4 *Développements limités des fonctions usuelles obtenir par la formule de Maclaurin*

Comme nous avons déjà remarqué la formule de Maclaurin-Young admet un développement limité d'ordre n pour toute fonction f telle que $f^{(n)}(0)$ existe.

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)$$

par ce procédé on obtient les développements limités des fonctions usuelles au voisinage de 0.

Exemple 1.2.2 *:*

1) $f(x) = \sin x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

- •) *Si* n *paire* $\Longrightarrow n = 2p \Longrightarrow f^{(2p)}(0) = 0$
- •) *Si* n *impaire* $\Longrightarrow n = 2p+1 \Longrightarrow f^{(2p+1)}(0) = (-1)^p$

Alors:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right).$$

2) $f(x) = \cos x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$

- •) *Si* n *paire* $\Longrightarrow n = 2p \Longrightarrow f^{(2p)}(0) = (-1)^p$
- •) *Si* n *impaire* $\Longrightarrow n = 2p+1 \Longrightarrow f^{(2p+1)}(0) = 0$

Alors:

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right).$$

3) $f(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(x) = e^x \Longrightarrow f^{(n)}(0) = 1$

Alors:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

4) $f(x) = (1+x)^\alpha; \quad \alpha \in \mathbb{R}$

$f^{(p)}(x) = \alpha(\alpha-1)\,.........\,(\alpha-p+1)(1+x)^{\alpha-p}$ *à condition que* $(1+x) > 0$.

pour $x > -1$ *on a:*

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)\,.........\,(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n).$$

Pour $\alpha = \dfrac{1}{2}$; $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+x}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + ... + (-1)^{n-1} \times \frac{1 \times 1 \times 3 \times 5 \times ..... \times (2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n).$$

5) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + ... + (-1)^n \times \frac{1 \times 3 \times 5 \times ..... \times (2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n).$$

1.2.5 *Opérations sur les développements limités*

Développements limités obtenus par restriction

Si la fonction f admet un développement limité au voisinage de 0 jusqu'à l'ordre n, alors elle admet un développement limité d'ordre $k \leq n$.

En effet:

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n + o(x^n) \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + a_{k+1}x^{k+1} + ... + a_nx^n + o(x^n) \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + o\left(x^k\right) \end{aligned}$$

donc

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_kx^k + x^k\varepsilon(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

Opérations algébriques sur les développements limités

Théorème 1.2.3 *:*

Soit f et g deux fonctions admettant des développements limités ont même ordre n au voisinage de 0.

Alors les fonctions $f+g$ et $f \times g$ admettent des développements limités d'ordre n au voisinage de 0. et il de même pour $\dfrac{f}{g}$ si $\lim\limits_{x\to 0} g(x) \neq 0$.

En autres si $f(x) = p_n(x) + o(x^n)$ et $g(x) = q_n(x) + o(x^n)$

$a)$ ***Somme:***

$(f+g)(x) = (p_n(x) + q_n(x)) + o(x^n).$

$b)$ ***Produit:***

$(f \times g)(x) = C_n(x) + o(x^n).$

la partie régulière $C_n(x)$ du produit de f par g s'obtient en se conservent dans le produit des parties régulières $p_n(x)$ et $q_n(x)$ que les termes de degré inférieur ou égal à n.

c) ***Quotient:***

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = D_n(x) + o(x^n).$$

la partie régulière du développement limité de $\frac{f}{g}$ *est le quotient à l'ordre* n *dans la division suivante les puissances croissantes de la partie régulière de* f *sur la partie régulière de* g.

Exemple 1.2.3 *:*

•) *On a le développement limité de* e^x *est:*

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \\ e^{-x} &= 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots\dots\dots\dots\dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n). \end{aligned}$$

Alors on peut calculer le développement limité des fonctions chx *et* shx.

$$\begin{aligned} chx &= \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots.. + \frac{x^n}{n!} + 1 - x + \frac{x^2}{2!} + \dots.. + (-1)^n \frac{x^n}{n!}\right) + o(x^n) \\ &= 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o\left(x^{2n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} shx &= \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right) \\ &= x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots\dots\dots\dots\dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o\left(x^{2n+2}\right) \end{aligned}$$

•) $a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \ln a}$

$$a^x = e^{x\ln a} = 1 + x\ln a + \frac{(x\ln a)^2}{2!} + \dots\dots\dots + \frac{(x\ln a)^n}{n!} + o\left((x\ln a)^n\right)$$

•) $tg\ x = \frac{\sin x}{\cos x}; \quad \cos 0 = 1 \neq 0.$

$$\begin{aligned} tg\ x &= \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + o(x^7)}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)} \\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o\left(x^7\right). \end{aligned}$$

•) $f(x) = \dfrac{\sin x}{1-x} = \sin x\left(\dfrac{1}{1-x}\right); \quad n = 3.$

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(x - \frac{x^3}{3!}\right)\left(1 + x + x^2 + x^3\right) + o\left(x^3\right) \\ &= x + x^2 + x^3 - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right) \\ &= x + x^2 + \frac{5}{6}x^3 + o\left(x^3\right). \end{aligned}$$

•) $f(x) = x.\cot g\, x = x.\dfrac{\cos x}{\sin x}; \qquad n = 4.$

$$\begin{aligned} f(x) &= x.\frac{\cos x}{\sin x} \\ &= x.\frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)} \\ &= \frac{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o\left(x^4\right)} \\ &= 1 - \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{30} + o\left(x^4\right). \end{aligned}$$

Développement limité d'une fonction composée

Proposition 1.2.2 *:*

Soient f et g deux fonctions admet au voisinage de 0 des développements limités d'ordre n de partie $p_n(x)$ et $q_n(x)$.

i.e: $f(x) = p_n(x) + x^n\varepsilon_1(x)$ *où* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_1(x) = 0$

$g(x) = q_n(x) + x^n\varepsilon_2(x)$ *où* $\lim\limits_{x\to 0}\varepsilon_2(x) = 0$

si $g(0) = 0$ alors la fonction composée $f \circ g$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0 et

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (p_n \circ q_n)(x) + x^n\varepsilon(x) \quad \text{où} \quad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$$

et on ne conservant que les puissances où dans $(p_n \circ q_n)(x)$ ne garder que les termes de degré $\leq n$.

Autrement dit:

Si

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + a_n x^n + x^n \varepsilon_1(x)$$

$$g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + b_n x^n + x^n \varepsilon_2(x)$$

Alors

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= a_0 + a_1 (g(x)) + a_2 (g(x))^2 + \dots\dots\dots + a_n (g(x))^n + g(x)^n \varepsilon_1 (g(x)) \\ &= a_0' + a_1' x + a_2' x^2 + \dots\dots\dots\dots\dots + a_n' x^n + x^n \varepsilon(x)\end{aligned}$$

Exemple 1.2.4 *:* $f(x) = e^{\cos x}$; $n = 5$; $V(0)$

$$f(x) = e^{\cos x} = e^{\cos x - 1 + 1} = e e^{\cos x - 1}$$

On pose $g(x) = e^x$; $h(x) = \cos x - 1$

On a: $h(0) = 0$

$$g(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + o\left(x^5\right)$$

$$\begin{aligned}h(x) &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - 1 + o\left(x^5\right) \\ &= -\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^5\right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ h)(x) &= e^{\cos x - 1} \\ &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^2}{2!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^3}{3!} \\ &\quad + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^4}{4!} + \frac{\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^5}{5!} + o\left(\left(-\frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!}\right)^5\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^4}{2!4} + o\left(x^5\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^5\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^5\right)\end{aligned}$$

Alors

$$f(x) = e e^{\cos x - 1} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^5\right)\right) = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o\left(x^5\right).$$

1.2.6 *L'intégration d'un développement limité*

Théorème 1.2.4 *:*

Soit $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction intégrable admet au voisinage de* 0 *le développement limité d'ordre* n *c'est-à-dire:*

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x) \quad avec \ \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$

Alors la fonction $F(x) = \int_0^x f(t)\, dt;\ x \in [-a, a]$ *admet au voisinage de* 0 *un développement limité d'ordre* $(n+1)$.

$$\begin{aligned} F(x) &= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + x^{n+1} \tau(x) \quad avec \ \lim_{x \to 0} \tau(x) = 0 \\ &= \int_0^x p_n(t)\, dt + x^{n+1} \tau(x) \quad avec \ \lim_{x \to 0} \tau(x) = 0. \end{aligned}$$

1.2.7 *Dérivation d'un développement limité*

Théorème 1.2.5 *:*

Si la fonction f *est dérivable sur* $[-a, a]$ *admet un développement limité d'ordre* n *au voisinage de* 0 *et si sa dérivée* f' *admet un développement limité d'ordre* $(n-1)$ *au* $V(0)$ *alors la partie régulière du développement limité est la dérivée de la partie régulière du développement limité de* f.

Exemple 1.2.5 *:* $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + ... + x^n + o(x^n)$

par dérivation on obtient le développement limité la fonction:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{1-x}\right)' = 1 + 2x + 3x^2 + ... + n x^{n-1} + o\left(x^{n-1}\right)$$

En faisant le changement x *par* $-x$ *dans le développement limité de* $\dfrac{1}{1-x}$ *on obtient:*

$$\left(\frac{1}{1+x}\right) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

par intégration on trouve le développement limité de $\ln(1+x)$

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 + ... + (-1)^n \frac{1}{n+1} x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)$$

Le changement de x par $-x$ dans le développement limité de $\ln(1+x)$ *on obtient le développement limité de* $\ln(1-x)$.

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - .... - \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)$$

et donc obtient $\arg th\ x$

$$\begin{aligned}
\arg th\ x &= \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln(1+x) - \ln(1-x)\right) \\
&= \frac{1}{2}(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + ... + (-1)^n\ \frac{1}{n+1}x^{n+1} + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \\
&\quad + ... + \frac{1}{n+1}x^{n+1} + o\left(x^{n+1}\right)) \\
&= x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + ... + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o\left(x^{2n+1}\right) \quad \text{où} \quad -1 < x < 1.
\end{aligned}$$

1.2.8 *Développement limité au voisinage d'un point* x_0

Définition 1.2.2 *:*

On dit qu'une fonction f définie au voisinage de x_0 sauf peut être en x_0, admet un développement limité d'ordre n si la fonction $F : y \longrightarrow F(y) = f(y+x_0)$ admet un développement limité d'ordre n au voisinage de 0. *Alors*

$$F(y) = a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + ... + a_n y^n + o(y^n)$$

$$\Longrightarrow f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + ... + a_n(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right)$$

i. e: *On se ramener du $V(x_0)$ au $V(0)$ par le changement de variable:*

$$\begin{pmatrix} y = x - x_0 \\ V(0) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x = y + x_0 \\ V(x_0) \end{pmatrix}$$

Exemple 1.2.6 *:*

Calculer le développement limité de e^x au $V(1)$

$$\begin{pmatrix} y = x - 1 \\ V(0) \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x = y + 1 \\ V(1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
e^x &= e^{y+1} = e.e^y, \quad y \longrightarrow 0 \quad \text{donc} \\
e^x &= e\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + ... + \frac{y^n}{n!} + o(y^n)\right) \\
&= e\left(1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \frac{(x-1)^3}{3!} + ... + \frac{(x-1)^n}{n!} + o\left((x-1)^n\right)\right).
\end{aligned}$$

Remarque 1.2.2 *:*

De la même manière on peut considérer le développement limité de f au voisinage $\infty\left(V\left(\infty\right)\right)$ qu'ont ramené au $V\left(0\right)$ par le changement de variable

$$\begin{pmatrix} y=\dfrac{1}{x} \\ V\left(0\right) \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x=\dfrac{1}{y} \\ V\left(\infty\right) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} & f\left(x\right)=f\left(\frac{1}{y}\right) \\ & f\left(y\right)=a_0+a_1y+a_2y^2+..........+a_ny^n+o\left(y^n\right) \\ \Longrightarrow\ & f\left(x\right)=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+.........+\frac{a_n}{x^n}+o\left(\left(\frac{1}{x}\right)^n\right) \end{aligned}$$

1.2.9 *Développement limité généralisé*

Soit f une fonction définie au voisinage de 0 sauf peut être en 0. Nous supposons que f n'admet pas un développement limité au voisinage de 0 mais la fonction $x^{\alpha}f\left(x\right)$ (α réel positif) *admet un développement limité au voisinage de 0 alors pour $\alpha\neq0$*

$$\begin{aligned} x^{\alpha}f\left(x\right) &= a_0+a_1x+a_2x^2+..........+a_nx^n+o\left(x^n\right) \\ \text{d'où } f\left(x\right) &= \frac{1}{x^{\alpha}}\left(a_0+a_1x+a_2x^2+..........+a_nx^n+o\left(x^n\right)\right) \end{aligned}$$

cette expression est dite développement limité généralisé au voisinage de 0.

Exemple 1.2.7 *:*

$$f\left(x\right)=\frac{1}{x-x^2}$$

f n'admet pas un développement limité au voisinage de 0 car $\lim\limits_{x\to0}f\left(x\right)=+\infty$.

$$\begin{aligned} xf\left(x\right) &= x.\frac{1}{x-x^2}=\frac{1}{1-x} \\ &= 1+x+x^2+.............+x^n+o\left(x^n\right). \end{aligned}$$

le développement limité généralisé de f

$$\begin{aligned} f\left(x\right) &= \frac{1}{x}\left(1+x+x^2+.............+x^n+o\left(x^n\right)\right) \\ &= \frac{1}{x}+1+x+.............+x^{n-1}+o\left(x^{n-1}\right). \end{aligned}$$

Exercice 1.2.1 *:*

Trouvez les développements limités à l'ordre 4 *au voisinage de* 0 *des fonctions suivantes:*

$$1)\ f(x) = \frac{x}{\sin x}\ ; \quad 2)\ g(x) = \frac{1}{\cos x}\ ; \quad 3)\ h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x}\ ; \quad 4)\ k(x) = e^{\cos x}$$

Solution 1.2.1 *:*

1) *Nous avons:* $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + o(x^5)$

donc

$$f(x) = \frac{x}{\sin x} = \frac{x}{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)} = \frac{1}{1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} + o(x^4)}$$

posons $u = -\dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!}$

nous avons d'autre part:

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + u^2 + o\left(x^2\right)$$

pour u *au voisinage de* 0 *donc:*

$$\begin{aligned}(x) &= \frac{x}{\sin x} = 1 - \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right) + \left(-\frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!}\right)^2 + o\left(x^4\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{120} + \frac{x^4}{36} + o\left(x^4\right) \\ &= 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{7x^4}{360} + o\left(x^4\right).\end{aligned}$$

2) *On a:* $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^4)$

effectuons la division suivant les puissances croissantes de 1 *par* $1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$ *nous obtenons:*

$$\begin{array}{c|l} 1 & 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \\ \cline{2-2} -1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} & 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} \\ \hline \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} & \\ -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{48} & \\ \hline \frac{5x^4}{24} - \frac{x^6}{48} & \end{array}$$

donc

$$g(x) = \frac{1}{\cos x} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o\left(x^4\right)$$

3) *On a:*

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 + o\left(x^4\right)$$

et

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o\left(x^4\right)$$

effectuons le produit de ces deux développements limités:

$$h(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - \frac{3x^2}{2} + \frac{11x^3}{6} - \frac{25x^4}{12} + o\left(x^4\right)$$

4) *On a:*

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)$$

posons $u = -\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24}$

$$e^{\cos x} = e^{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + o\left(x^4\right)} = e^{1+u} = e.e^u$$

$$\begin{aligned} e^u &= 1 + u + \frac{u^2}{2!} + o\left(u^2\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \frac{\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right)^2}{2!} + o\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{8} + o\left(x^4\right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right) \end{aligned}$$

alors

$$k(x) = e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} + o\left(x^4\right)\right) = e - \frac{ex^2}{2} + \frac{ex^4}{6} + o\left(x^4\right)$$

Développements limités usuels

(au voisinage de 0)

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$\text{ch } x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\text{sh } x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{th } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 - \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + o(x^8)$$

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{1}{8}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{1.1.3.5\ldots(2n-3)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}x^n + o(x^n)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}.\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

$$\text{argth } x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\text{argsh } x = x - \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n.\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{3}{8}\frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n n!}\frac{x^{2n+1}}{2n+1} + o(x^{2n+2})$$