Notions Générales sur les Systèmes Dynamiques Discrets

Par
Rabah Bououden
Centre Universitaire Abdelhafid Boussouf - Mila.

7 avril 2021

Contents

Le but de ce premier chapitre est d'introduire de nombreuses notions et techniques de base de la théo-
rie des systèmes dynamiques dans un cadre aussi simple que possible.

1. Définitions
2. Points Fixes et Orbites Périodiques
   - Points fixes et leurs stabilités
   - Orbites périodiques (p-cycle) et leurs stabilités
3. Points limites, ensembles limites et orbites apériodiques
4. Équivalence topologique des systèmes

Définition

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^m$. Un système dynamique discret noté $(D, \mathbb{N}, f)$ est une relation de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1}$$

Ainsi, si $\circ$ représente la composition des applications, on a

$$x_n = f^n(x_0) \tag{2}$$

où

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{nfois}(x), \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } f^0 = Id.$$

L'application f est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle. Si le système dynamique discret est inversible, l'égalité 2 reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Définition

Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^m$. Un système dynamique discret noté $(D, \mathbb{N}, f)$ est une relation de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1}$$

Ainsi, si $\circ$ représente la composition des applications, on a

$$x_n = f^n(x_0) \tag{2}$$

où

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{nfois}(x),\ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } f^0 = Id.$$

L'application f est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle. Si le système dynamique discret est inversible, l'égalité 2 reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Définition

(Systèmes dynamiques discrets autonomes et non-autonomes)
Lorsque la fonction f dans (1) dépend explicitement du temps le système est dit non-autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.

Définition

(Trajectoires)
Étant donné le point initial x_0, on appelle orbite (ou trajectoire) du système (1) la suite

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), ..., x(n+1) = f(x(n)), ...\}.$$

Définition

(Systèmes dynamiques discrets autonomes et non-autonomes)
Lorsque la fonction f dans (1) dépend explicitement du temps le système est dit non-autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.

Définition

(Trajectoires)
Étant donné le point initial x_0, on appelle orbite (ou trajectoire) du système (1) la suite

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), ..., x(n+1) = f(x(n)), ...\}.$$

Le point fixe c'est la trajectoire la plus simple.

Définition

(Points fixes)
Un point x^* est un point fixe du système (1) (ou de l'application f) si

$$f(x^*) = x^*.$$

Parfois, ces points sont appelés points stationnaires ou points d'équilibres.

Example

Les points fixes de l'application logistique $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ $(0 < a \leq 4)$ sont les solutions de l'équation $x = ax(1 - x)$. Donc le système précédant a deux points fixes $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{a-1}{a}$.

Points fixes et leurs stabilités

Le point fixe c'est la trajectoire la plus simple.

Définition

(Points fixes)
Un point x^* est un point fixe du système (1) (ou de l'application f) si

$$f(x^*) = x^*.$$

Parfois, ces points sont appelés points stationnaires ou points d'équilibres.

Example

Les points fixes de l'application logistique $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ $(0 < a \leq 4)$ sont les solutions de l'équation $x = ax(1 - x)$. Donc le système précédant a deux points fixes $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{a-1}{a}$.

Le point fixe c'est la trajectoire la plus simple.

Définition

(Points fixes)
Un point x^* est un point fixe du système (1) (ou de l'application f) si

$$f(x^*) = x^*.$$

Parfois, ces points sont appelés points stationnaires ou points d'équilibres.

Example

Les points fixes de l'application logistique $x_{n+1} = ax_n(1 - x_n)$ $(0 < a \leq 4)$ sont les solutions de l'équation $x = ax(1 - x)$. Donc le système précédant a deux points fixes $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{a-1}{a}$.

Graphiquement les points fixes de $f(x) = ax(1-x)$ sont donnés par l'intersection entre le graphe de f et la droit $y = x$ comme le montre la Figure (1).

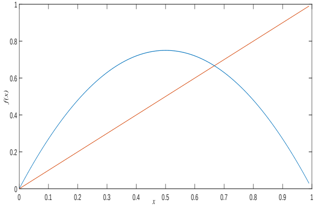

Figure: Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1-x)$.

Graphiquement les points fixes de $f(x) = ax(1-x)$ sont donnés par l'intersection entre le graphe de f et la droit $y = x$ comme le montre la Figure (1).

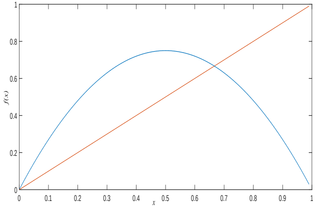

Figure: Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1-x)$.

Remarque

Une orbite qui a le point fixe comme condition initiale reste à ce point. Cette situation est possible en théorie, mais pas en pratique, puisque chaque processus subit de petites perturbations qui ne sont normalement pas prises en compte dans un modèle. Cette observation motive l'introduction de l'idée de stabilité.

Remarque

Une orbite qui a le point fixe comme condition initiale reste à ce point. Cette situation est possible en théorie, mais pas en pratique, puisque chaque processus subit de petites perturbations qui ne sont normalement pas prises en compte dans un modèle. Cette observation motive l'introduction de l'idée de stabilité.

Remarque

Une orbite qui a le point fixe comme condition initiale reste à ce point. Cette situation est possible en théorie, mais pas en pratique, puisque chaque processus subit de petites perturbations qui ne sont normalement pas prises en compte dans un modèle. Cette observation motive l'introduction de l'idée de stabilité.

Définition

Un point fixe x^* est stable si pour tous $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \text{ implique } \|x_n - x^*\| \leq \epsilon \text{ pour tous } n \geq 1. \tag{3}$$

Autrement dit, une fois que nous avons choisi à quel point nous voulons rester près de x^* au future (choix de ϵ), nous pouvons trouver à quel point nous devons commencer au début (existence de δ).

Définition

Un point fixe x^* qui n'est pas stable est dit instable.

Définition

Un point fixe x^* est stable si pour tous $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \text{ implique } \|x_n - x^*\| \leq \epsilon \text{ pour tous } n \geq 1. \tag{3}$$

Autrement dit, une fois que nous avons choisi à quel point nous voulons rester près de x^* au future (choix de ϵ), nous pouvons trouver à quel point nous devons commencer au début (existence de δ).

Définition

Un point fixe x^* qui n'est pas stable est dit instable.

Définition

Un point fixe x^* est stable si pour tous $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \text{ implique } \|x_n - x^*\| \leq \epsilon \text{ pour tous } n \geq 1. \qquad (3)$$

Autrement dit, une fois que nous avons choisi à quel point nous voulons rester près de x^* au future (choix de ϵ), nous pouvons trouver à quel point nous devons commencer au début (existence de δ).

Définition

Un point fixe x^* qui n'est pas stable est dit instable.

Orbites périodiques (p-cycle) et leurs stabilités

Définition

(p-cycles)
Par définition, un p-cycle est un p-uplet $(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, on a $f(x_{k-1}) = x_k$ et $f(x_{p-1}) = x_p = x_0$; p étant le plus petit entier supérieur ou égale à 1 possédant cette propriété. On dira que tout point du cycle est p-périodique.

Remarque

1. *Un point fixe est un point périodique de période 1.*
2. *Un point x est dit point p-périodique d'une transformation f, s'il est point fixe de f^p, sans être un point fixe de f^l, $1 \leq l < p$, (l et p entiers).*

Définition

(p-cycles)
Par définition, un p-cycle est un p-uplet $(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ *tel que pour tout* $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, *on a* $f(x_{k-1}) = x_k$ *et* $f(x_{p-1}) = x_p = x_0$; *p étant le plus petit entier supérieur ou égale à 1 possédant cette propriété. On dira que tout point du cycle est p-périodique.*

Remarque

1. *Un point fixe est un point périodique de période 1.*
2. *Un point* x *est dit point p-périodique d'une transformation* f, *s'il est point fixe de* f^p, *sans être un point fixe de* f^l, $1 \leq l < p$, *(*l *et* p *entiers).*

Example

Soit le système dynamique gouverné par l'application logistique $f(x) = ax(1-x)$ $(0 < a \leq 4)$. Les points 2-périodiques sont solutions du système

$$\begin{cases} f^2(x) = x, \\ f(x) \neq x. \end{cases}$$

Si $2 < a \leq 4$ ce système à deux solutions

$$x_1 = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2a} \text{ et } x_2 = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2a},$$

qui sont les points d'un cycle de période 2. Graphiquement les points d'un cycle de période 2 sont l'intersection entre le graphe de $f^2 = f \circ f$ et la droit $y = x$ tel que $f(x) \neq x$ comme le montre la Figure (2).

Orbites périodiques (p-cycle) et leurs stabilités

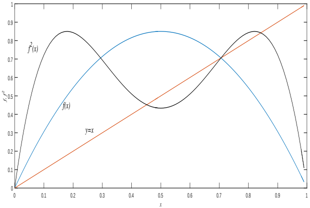

Figure: Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1-x)$.

Définition

Une orbite périodique $(x_0, x_1, \ldots, x_{p-1})$ d'un système dynamique gouverné par une application f est stable si tous point x_i, $i = 0, 1, \ldots, p-1$ est un point fixe stable du système dynamique gouverné par l'application f^p.

Orbites périodiques (p-cycle) et leurs stabilités

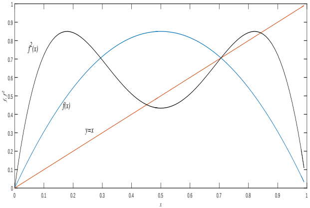

Figure: Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1-x)$.

Définition

Une orbite périodique $(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ *d'un système dynamique gouverné par une application* f *est stable si tous point* x_i, $i = 0, 1, ..., p-1$ *est un point fixe stable du système dynamique gouverné par l'application* f^p.

Définition

Une orbite périodique $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$ *qui n'est pas stable est dite instable.*

1. Définitions
2. Points Fixes et Orbites Périodiques
   - Points fixes et leurs stabilités
   - Orbites périodiques (p-cycle) et leurs stabilités
3. Points limites, ensembles limites et orbites apériodiques
4. Équivalence topologique des systèmes

Soit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ une orbite d'un système dynamique

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{4}$$

x_0 est une condition initiale donnée.

Définition

Un point z est dit point limite de l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ s'il existe une sous suite
$\{x_{n_k} : k = 0, 1, ...\}$ *de $\mathcal{O}(x_0)$ tel que*

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_{n_k} - z\| = 0 \tag{5}$$

Soit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ une orbite d'un système dynamique

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{4}$$

x_0 est une condition initiale donnée.

Définition

Un point z est dit point limite de l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ s'il existe une sous suite
$\{x_{n_k} : k = 0, 1, ...\}$ *de $\mathcal{O}(x_0)$ tel que*

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_{n_k} - z\| = 0 \tag{5}$$

Remarque

1. *Une orbite stationnaire a un seul point limite (point fixe).*
2. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ p-périodique a exactement p points limites :* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

Définition

L'ensemble $L(x_0)$ de tous les points limites d'une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dit ensemble limite.

L'égalité fondamentale entre $L(x_0)$ et son image par l'application f est

$$f(L(x_0)) = L(x_0)$$

Remarque

1. *Une orbite stationnaire a un seul point limite (point fixe).*
2. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ p-périodique a exactement p points limites :* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

Définition

L'ensemble $L(x_0)$ de tous les points limites d'une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dit ensemble limite.

L'égalité fondamentale entre $L(x_0)$ et son image par l'application f est

$$f(L(x_0)) = L(x_0)$$

Remarque

1. *Une orbite stationnaire a un seul point limite (point fixe).*
2. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ p-périodique a exactement p points limites :* $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{p-1}$.

Définition

L'ensemble $L(x_0)$ de tous les points limites d'une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dit ensemble limite.

L'égalité fondamentale entre $L(x_0)$ et son image par l'application f est

$$f(L(x_0)) = L(x_0)$$

Définition

1. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite asymptotiquement stationnaire si son ensemble limite est un point stationnaire (point fixe), et elle est asymptotiquement périodique si son ensemble limite est une orbite périodique.*
2. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement périodique de période p s'il n'est pas périodique mais il existe un $m > 0$ tel que $f^{p+k}(x) = f^k(x)$ pour tous $k \geq m$ (i.e. $f^k(x)$ est un point périodique pour $k \geq m$). Si $p = 1$, $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement stationnaire.*

Par conséquent, toute orbite éventuellement stationnaire (resp éventuellement périodique) est asymptotiquement stationnaire (resp asymptotiquement périodique). L'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

Définition

1. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite asymptotiquement stationnaire si son ensemble limite est un point stationnaire (point fixe), et elle est asymptotiquement périodique si son ensemble limite est une orbite périodique.*
2. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement périodique de période p s'il n'est pas périodique mais il existe un $m > 0$ tel que $f^{p+k}(x) = f^k(x)$ pour tous $k \geq m$ (i.e. $f^k(x)$ est un point périodique pour $k \geq m$). Si $p = 1$, $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement stationnaire.*

Par conséquent, toute orbite éventuellement stationnaire (resp éventuellement périodique) est asymptotiquement stationnaire (resp asymptotiquement périodique). L'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

Définition

1. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite asymptotiquement stationnaire si son ensemble limite est un point stationnaire (point fixe), et elle est asymptotiquement périodique si son ensemble limite est une orbite périodique.*
2. *Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement périodique de période p s'il n'est pas périodique mais il existe un $m > 0$ tel que $f^{p+k}(x) = f^k(x)$ pour tous $k \geq m$ (i.e. $f^k(x)$ est un point périodique pour $k \geq m$). Si $p = 1$, $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement stationnaire.*

Par conséquent, toute orbite éventuellement stationnaire (resp éventuellement périodique) est asymptotiquement stationnaire (resp asymptotiquement périodique). L'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

Example

Pour le système dynamique $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, l'orbite $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ est asymptotiquement stationnaire mais n'est pas éventuellement stationnaire.

Définition

*Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite **apériodique** si son ensemble limite $L(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.*

D'après ce qui précède, il est clair que soit $\mathcal{O}(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($L(x_0)$ est fini), ou apériodique ($L(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique. Le résultat suivant assure l'existence d'orbites apériodiques pour les systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$.

Example

Pour le système dynamique $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, l'orbite $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ est asymptotiquement stationnaire mais n'est pas éventuellement stationnaire.

Définition

Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite ***apériodique*** *si son ensemble limite $L(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.*

D'après ce qui précède, il est clair que soit $\mathcal{O}(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($L(x_0)$ est fini), ou apériodique ($L(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique. Le résultat suivant assure l'existence d'orbites apériodiques pour les systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$.

Example

Pour le système dynamique $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, l'orbite $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ est asymptotiquement stationnaire mais n'est pas éventuellement stationnaire.

Définition

*Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite **apériodique** si son ensemble limite $L(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.*

D'après ce qui précède, il est clair que soit $\mathcal{O}(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($L(x_0)$ est fini), ou apériodique ($L(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique. Le résultat suivant assure l'existence d'orbites apériodiques pour les systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$.

Example

Pour le système dynamique $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, l'orbite $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ est asymptotiquement stationnaire mais n'est pas éventuellement stationnaire.

Définition

Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite ***apériodique*** *si son ensemble limite $L(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.*

D'après ce qui précède, il est clair que soit $\mathcal{O}(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($L(x_0)$ est fini), ou apériodique ($L(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique. Le résultat suivant assure l'existence d'orbites apériodiques pour les systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$.

Example

Pour le système dynamique $x_{n+1} = x_n(1 - x_n)$, l'orbite $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ est asymptotiquement stationnaire mais n'est pas éventuellement stationnaire.

Définition

Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite ***apériodique*** *si son ensemble limite $L(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.*

D'après ce qui précède, il est clair que soit $\mathcal{O}(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($L(x_0)$ est fini), ou apériodique ($L(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique. Le résultat suivant assure l'existence d'orbites apériodiques pour les systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$.

Théorème

(Théorème de Li-Yorke [35])
Soit I un intervalle et $f : I \to I$ une application continu. Supposons que f a une orbite périodique de période 3. Alors f a des orbites périodiques de période p pour tout $p \geq 1$ et il y a un ensemble infini S contenu dans I telle que chaque orbite issu à partir d'un point de S est apériodique.

Nous allons aborder dans cette section la notion d'équivalence entre deux systèmes, cette notion est très importante pour l'étude des systèmes dynamiques, surtout pour les systèmes qui ont des comportements complexes.

Soient D et E deux espaces métriques et $f : D \to D$, $g : E \to E$ deux applications définissant sur D et G respectivement deux systèmes dynamiques.

Définition

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective) $h : D \to E$ tel que $h \circ f = g \circ h$.

Le théorème suivant montre l'importance de cette définition.

Nous allons aborder dans cette section la notion d'équivalence entre deux systèmes, cette notion est très importante pour l'étude des systèmes dynamiques, surtout pour les systèmes qui ont des comportements complexes.

Soient D et E deux espaces métriques et $f : D \to D$, $g : E \to E$ deux applications définissant sur D et G respectivement deux systèmes dynamiques.

Définition

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective) $h : D \to E$ tel que $h \circ f = g \circ h$.

Le théorème suivant montre l'importance de cette définition.

Nous allons aborder dans cette section la notion d'équivalence entre deux systèmes, cette notion est très importante pour l'étude des systèmes dynamiques, surtout pour les systèmes qui ont des comportements complexes.
Soient D et E deux espaces métriques et $f : D \to D$, $g : E \to E$ deux applications définissant sur D et G respectivement deux systèmes dynamiques.

Définition

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective) $h : D \to E$ tel que $h \circ f = g \circ h$.

Le théorème suivant montre l'importance de cette définition.

Nous allons aborder dans cette section la notion d'équivalence entre deux systèmes, cette notion est très importante pour l'étude des systèmes dynamiques, surtout pour les systèmes qui ont des comportements complexes.
Soient D et E deux espaces métriques et $f : D \to D$, $g : E \to E$ deux applications définissant sur D et G respectivement deux systèmes dynamiques.

Définition

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective) $h : D \to E$ tel que $h \circ f = g \circ h$.

Le théorème suivant montre l'importance de cette définition.

Théorème

Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. Supposons qu'ils sont topologiquement conjugués par un homéomorphisme $h : D \to E$. Alors

1. *L'application $h^{-1} : E \to D$ vérifie aussi la définition et assure donc l'équivalence topologique entre les systèmes (D, f) et (E, g).*
2. *$h \circ f^n = g^n \circ h$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*
3. *Si $x^* \in D$ est un point périodique de f de période fondamentale p alors $h(x^*) \in E$ est un point périodique de g de période fondamentale p.*

- S.H. Strogatz, *Nonlinear dynamics and Chaos : with applications to physics, biology, chemistry, and engineering.* Addison-Wesley Pub, 1994.
- E.N. Lorenz, Deterministic nonperiodic flow, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 130–141.
- D. Ruelle and F. Takens, On the Nature of Turbulence, *Commun. math. Phys.*. 20 (1971) 167–192.
- R.M. May, Simple Mathematical Models With Very Complicated Dynamics, *Nature.* 261(1976) 459–467.
- M.J. Feigenbaum, The Universal Metric Properties of Nonlinear Transformations, *Journal of Statistical Physics.* 21(1979) 669–706.
- A.T. Winfree, *The Geometry of Biological Time.* Springer, New York, 1980.

J. Rinzel and G.B. Ermentrout, Analysis of neural excitability and oscillations, *Neural ScienceMathematics.* (1989) 135–169.

A. Libchaber, C. Laroche and S. Fauve, Period doubling cascade in mercury, a quantitative measurement, *J. Physique Lett.* 43(1982) 211–216.

P. Linsay, Period doubling and chaotic behavior in a driven anharmonic oscillator, *Phys. Rev. Lett.* 47(1981) 1949–1352.

F.C. Moon and G.X. Li, Fractal basin boundaries and homoclinic orbits for periodic motion in a two-well potential, *Phys. Rev. Lett.* 55(1985) 1439–1442.

S.H. Strogatz, C.M. Marcus, R.M. Westervelt, and R.E. Mirollo, Collective dynamics of coupled oscillators with random pinning, *Physica D.* 36(1989) 23–50.

- W. Tucker, L. Kocarev, Z. Galias, S. Lian, *Intelligent Computing Based on Chaos.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2009.
- R.L. Devaney, *An introduction to chaotic dynamical systems.* In Adission-wisley, Redwood City, CA 37, 2003.
- I. Gumowski and C. Mira, *Recurrences and discrete dynamic systems.* Springer- verlag, 1980.
- O. Galor, *Discrete dynamical systems and chaos.* Longman Scientific, 1992.
- M. Martelli, *Discrete Dynamical Systems.* Springer, 2007.
- R. Abraham, L. Gardini and C. Mira, *Chaos in discrete dynamical systems.* Springer, 1997.
- J.L. Pac, *Systèmes dynamiques : Cours et exercices corrigés.* Dunod, 2016.

- H. Dang-Vu and C. Delcarte, *Bifurcations et chaos : une introduction à la dynamique contemporaine avec des programmes en Pascal, Fortran et Mathematica.* Ellipses, 2000.
- M. Viana, *Lectures on Lyapunov exponents.* Cambridge Univ. Press, 2014.
- M. Barnsley, *Fractals everywhere.* Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.
- D. Stauffer, H.E. Stanley and A. Lesne, *From Newton to Mandelbrot : A Primer in theoretical physics.* Springer, 2017.
- E.K.P. Chong, S.H. Zak, *An Introduction to Optimization.* Wiley, 2001.
- S.S. Rao, *Engineering Optimization Theory and Practice.* Wiley, 2009.
- T. El-Ghazali, *Metaheuristics : from design to implementation.* Wiley, 2009.

- K.F. Doerner, M. Gendreau, P. Greistorfer, W. Gutjahr, R.F. Hartl, M. Reimann, *Metaheuristics : Progress in Complex Systems Optimization.* Springer, 2007.
- T. Ibaraki, K. Nonobe, M. Yagiura, *Metaheuristics : Progress as Real Problem Solvers.* Springer, 2005.
- J. Dréo, A. Pétrowski, P. Siarry, E. Taillard, *Metaheuristics for Hard Optimization : Methods and Case Studies.* Springer, 2005.
- M. Clerc, *Particle swarm optimization.* ISTE, 2006.
- A. Lazinica, *Particle swarm optimization.* InTech, 2009.
- K.E. Parsopoulos, M.N. Vrahatis, *Particle Swarm Optimization and Intelligence : Advances and Applications.* Information Science Publishing, 2010.
- D.E. Goldber, *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.* Addison-Wesley Professional, 1989.

- R. Chibante, *Simulated Annealing, Theory with Applications.* Springer Netherlands, 1987.
- E. Bonabeau, M. Dorigo and G. Theraulaz, *Intelligence : from Natural to Artificial Systems.* Oxford University Press, New York, 1999.
- T. Yien Li and J.A. Yorke, Period three implies chaos, *The American Mathematical Monthly*. 82 (1975) 985–992.
- D. Ruelle and F. Takens, On the Nature of Turbulence, *Commun. math. Phys*. 20(1971) 167–192.
- P. A. P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Proc. Cambridge Philos.Soc*. 42(1946) 15–23.
- P. Frederickson, J.L. Kaplan, E.D. Yorke and J. A. Yorke, The Liapunov Dimension of Strange Attractors, *J. Diff. Eq*. 49(1983) 185–207.

- J. Kennedy and R. Eberhart, Particle Swarm Optimization, *Proceedings of IEEE International Conference on Neural Networks.* IV(1995) 1942–1948.
- J.H. Holland, Outline for a logical theory of adaptive systems, *Journal of the ACM.* 3(1962) 297–314.
- D.T. Pham, E. Koc, A. Ghanbarzadeh, S. Otri, S. Rahim, M. Zaidi, The Bees Algorithm–a novel tool for complex optimisation problems, *Proceedings of the Second International Virtual Conference on Intelligent Production Machines and Systems.* (2006) 454–461.
- D.T. Pham, M. Castellani, The Bees Algorithm : modelling foraging behaviour to solve continuous optimization problems, *Proceeding of Institute Mechanical Engineering, C : Journal of Mechanical Engineering and Science.* 223(2009) 2919–2938.

- G.Q. Zhong, F. Ayrom, Experimental confirmation of chaos from Chua's circuit, International Journal of Circuit Theory and Applications. (1985)vol.13, no.1, 93-98.
- L. Illing, Digital communication using chaos and non linear dynamics, Nonlinear Anal.71(2009) 2958-2964.
- G.I. Bischi, L. Gardini, M. Kopel, Analysis of global bifurcations in a market share attraction model, J. Econ. Dyn. Control 24(5), (2000) 855-879.
- H.N. Agiza, A.S. Hegazi, A.A. Elsadany, The dynamics of Bowley's model with boundedInternational Journal of Circuit Theory and Applications. 13(1) (1985) 93-98.
- Q. Lin, K.W. Wong, J. Chen, An enhanced variable-length arithmetic coding and encryption scheme using chaotic maps, J. Syst. Softw. 86 (2013) 1384-1389.

- Z. Povalej, Quasi-Newton's method for multi objective optimization, J. Comput. Appl. Math. 255 (2014) 765-777.
- J. Liu, S. J. Li, New hybrid conjugate gradient method for unconstrained optimization, Appl. Math. Comput. 245 (2014) 36-43.
- TW.C. Chen, V. S. Vassiliadis, Solution of general nonlinear optimization problems using the penalty/ modified barrier method with the use of exact hessians, Comput. Chem. Eng. 27(4) (2003) 501-525.
- E. Canale, F. Robledo, P. Romero, P. Sartor, Monte Carlo methods in diameter-constrained reliability, Opt. Switch. Netw.14(2)(2014) 134-148.
- J. A.T. Machado, Optimal tuning of fractional controllers using genetic algorithms, Nonlinear Dyn. 62(12)(2010) 447-452.

D. Bunnag , M. Sun, Genetic algorithm for constrained global optimization in continuous variables, Appl. Math. Comput.171(1)(2005) 604-636.

R. Bououden, M-S. Abdelouahab, *On Efficient Chaotic Optimization Algorithm Based on Partition of Data Set in Global Research Step*. Nonlinear Dynamics and Systems Theory. 18 (1) (2018) 42-52.

L. Chen, K. Aihara, Optimization by chaotic simulated annealing, Proceedings of International Conference of Sino-JapaneseYoung Scientist. 3 (1995) 57-59.

Y. Hu,Y.C. Li, J.X.Yu, H.D. Chao, Steeped-up chaos optimization algorithm and its application, J. System Eng. 17 (1) (2002) 41-44.

V.T. Jovanovic, Chaotic descent method and fractal conjecture, Internat. J. Numer. Methods Eng. 48 (2000) 137-152.

- B. Li, W.S. Jiang, Optimizing complex function by chaos search, Cybernetics and Systems 29 (4) (1998) 409-419.
- L. S. Coelho, "Tuning of PID controller for an automatic regulator voltage system using chaotic optimization approach", Chaos, Solitons and Fractals. 39 (2009) 1504-1514.
- B. Li, W.S. Jiang, Chaos optimization method and its application, Journal of Control Theory and Application 14 (4) (1997) 613-615.
- C. Choi, J.J. Lee, Chaotic local search algorithm, Artificial Life and Robotics 2 (1) (1998) 41-47.
- C. Zhang, L. Xu, H. Shao, Chaos optimization algorithm based on linear search and its application to nonlinear constraint optimization problems, Chinese Journal of Control and Decision 16 (1) (2001) 123-128.

- M.L. Hung, J.S. Lin, J.J. Yan, T.L. Liao, Optimal PID control design for synchronization of delayed discrete chaotic systems. Chaos, Solitons Fractals. 35(4) (2008) 781-5.
- H. Pan, L. Wang, B. Liu, Chaotic annealing with hypothesis test for function optimization in noisy environments. Chaos, Solitons Fractals 35(5) (2008) 888-894.
- D. Yang, Z Liu, J Zhou, Chaos optimization algorithms based on chaotic maps with different probability distribution and search speed for global optimization, Commun Nonlinear Sci Numer Simulat 19 (2014) 1229–1246
- R. Lozi, Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, Journal de Physique. Colloque C5, Supplément au 8(39) (1978) 9-10.
- T. Hamaizia, R. Lozi, N. Hamri, Fast chaotic optimization algorithm based on locally averaged strategy and multifold

chaotic attractor, Applied Mathematics and Computation 219 (2012) 188–196.