

# Chapitre 2

## Systemes dynamiques discrets unidimensionnelles de premier ordre

On dit que le système dynamique discret

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{2.1}$$

est de dimension 1 si la variable d'état  $x$  est une scalaire, i.e.  $x \in \mathbb{R}$ . Souvent  $f$  dépend d'un ou de plusieurs paramètres que nous appellerons paramètres de bifurcations. Dans ce cas le système (2.1) devient

$$x_{n+1} = f(x_n, a), \tag{2.2}$$

où  $a = (a_1, a_2, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ .

### 2.1 Étude graphique des systèmes dynamiques unidimensionnelles

Nous décrivons maintenant une méthode graphique pour analyser les trajectoires d'un système dynamique, appelée méthode de Koenigs Lemeray ou Cobweb. Rappelons que les points fixes d'une application  $f$  sont les abscisses des points d'intersection entre le graphe de  $f$  et la droite  $y = x$ . Supposons que le paramètre  $a$  dans (2.2) est fixé. La trajectoire  $\mathcal{O}(x_0)$  peut être visualisée dans le plan en dessinant un segment vertical du point  $(x_0, 0)$  vers  $(x_0, f(x_0)) = (x_0, x_1)$  sur le graphe de  $f$ , puis un segment vers la droite  $y = x$  au point  $(x_1, x_1)$ , et une autre fois vers

$(x_1, x_2)$  sur le graphe de  $f$ . Continuez ce processus jusqu'à l'obtention des informations suffisantes sur le comportement d'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$ . L'image qui fournit cette information est appelée **le diagramme cobweb** figures (2.1,2.2,2.4, 2.3).

Par exemple, lorsque l'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  converge vers un point fixe  $x^*$ , le diagramme cobweb qui démarre à partir du point  $(x_0, 0)$  sera une séquence de vertical et horizontal segments en spirale vers  $(x^*, x^*)$ . Cette situation est illustrée dans la figure (2.1), par un diagramme cobweb de l'application logistique

$$f(x) = 2.9x(1 - x).$$

Le point fixé de  $f$  est  $x^* = \frac{19}{29}$  et la condition initiale est  $x_0 = 0.1$ .

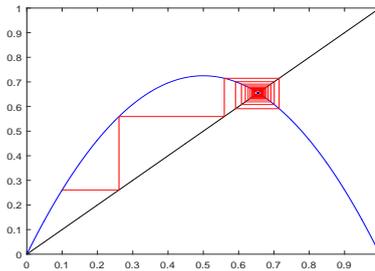


FIGURE 2.1: Le diagramme cobweb du système dynamique  $f(x) = 2.9x(1 - x)$ .

De façon analogue, lorsque l'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  converge vers une orbite périodique de période  $p$   $(z_0, z_1, \dots, z_{p-1})$ , le diagramme cobweb démarre de  $(x_0, 0)$  et s'approche du cycle fermé  $\{(z_0, z_0), (z_0, z_1), \dots, (z_{p-1}, z_{p-1}), (z_{p-1}, z_0)\}$ . La figure (2.2) illustre cette situation en utilisant l'application logistique  $f(x) = 3.4x(1 - x)$ . Dans ce cas,  $\mathcal{O}(0.1)$  converge vers une orbite 2-périodique.

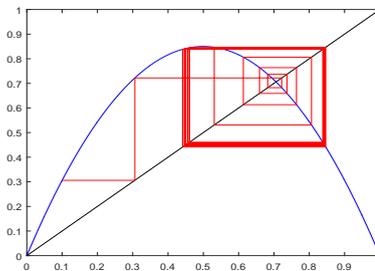


FIGURE 2.2: Le diagramme cobweb du système dynamique  $f(x) = 3.4x(1 - x)$ .

La figure (2.3) montre que la trajectoire du système dynamique

$$f(x) = 3.4495x(1 - x),$$

converge vers une orbite périodique de période 4.

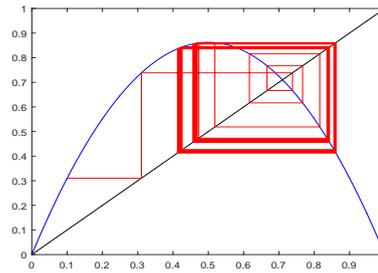


FIGURE 2.3: Le diagramme cobweb du système dynamique  $f(x) = 3.4495x(1 - x)$ .

Finalement la figure (2.4) décrit le comportement chaotique de la trajectoire  $\mathcal{O}(0.1)$  du système dynamique  $f(x) = 4x(1 - x)$ .

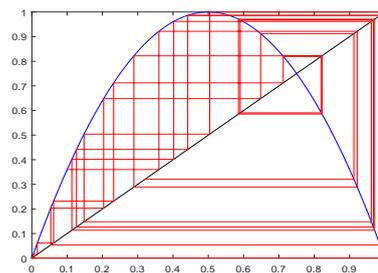


FIGURE 2.4: Le diagramme cobweb du système dynamique  $f(x) = 4x(1 - x)$ .

## 2.2 Systèmes linéaires

Après une translation d'origine, un système dynamique linéaire d'ordre un, de dimension un, peut toujours être mise sous la forme :

$$x_{n+1} = Sx_n, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (2.3)$$

On est dans un cas où le second nombre permet l'obtention de la solution sous forme explicite, pour une condition initiale  $x_0$  quelconque.

$$x_n = S^n x_0. \quad (2.4)$$

L'origine ( $x = 0$ ) de l'axe des  $x$ , est le seul point fixe et d'après (2.3) et (2.4), on voit que la nature de ce point est complètement déterminée par le nombre réel  $S$ , appelé *multiplicateur* du point fixe  $x = 0$ . En effet

1. Si  $|S| < 1$ , quel que soit  $x_0$  l'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  du système (2.3) tend vers le point fixe  $x = 0$ . Ce point 0 est dit **attractif**, ou encore **asymptotiquement stable**.
2. Si  $|S| > 1$ , quel que soit  $x_0$  l'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  du système (2.3) s'éloigne de 0 quand  $n$  augmente. Ce point 0 est alors dit **répulsif** ou **instable**.

La nature du point fixe 0 dépend aussi du signe du multiplicateur  $S$ . En effet,

1. si  $S$  est positif la suite des points engendrés par (2.3) et telle que  $x_n$  a toujours le même signe que  $x_0$ . 0 est appelé dans ce cas **point de type 1** ;
2. par contre si  $S$  est négatif la suite des points engendrée par (2.3) et telle que le signe de  $x_n$  dépend de  $n$ . Cette suite oscille autour du point fixe 0. 0 est alors appelé **point de type 2**

Dans le contexte linéaire,  $|S| = 1$  correspond à un cas banal, car si  $S = 1$  tout point de l'axe des  $x$  est un point fixe, et si  $S = -1$ , tout point de l'axe des  $x$  est un point fixe de

$$x_{n+1} = S^2 x_n. \tag{2.5}$$

Lorsque 0 est attractif, le domaine d'attraction de 0, est l'ensemble des points  $x_0$  qui donne une suite tendant vers 0. Il est ici constitué par tout l'axe des  $x$ .

Étant donné un point initial  $x_0$ , le point  $x_1$  obtenu à partir de (2.3) est appelé le conséquent de  $x_0$ . En écrivant (2.3) sous la forme :

$$x_n = S^{-1} x_{n+1}, \tag{2.6}$$

on définit la récurrence inverse, (2.3) étant la récurrence directe. Au point  $x_0$  correspond un point  $x_{-1}$  donné par (2.6), qui est appelé antécédent de rang un de  $x_0$ . Si (2.3) correspond à une transformation ponctuelle  $f$ , (2.6) correspond à la transformation inverse  $f^{-1}$ . Dans le cas linéaire, il est évident que  $f^{-1}$  est toujours uniforme, c'est-à-dire, un point  $x_0$  possède un antécédent de rang  $n$  et un seul. Le point  $x_{-n}$  issu de  $x_0$  est l'antécédent de rang  $n$ .

*Remarque 2.1.*

Notons que si on a un système dynamique linéaire défini par l'application  $f(x) = Sx$  donc le multiplicateur du point fixe  $x^* = 0$  est donné par  $S = f'(x^*)$ .

## 2.3 Systèmes dynamiques unidimensionnelles non-linéaires

Soit le système dynamique non-linéaire défini par :

$$x_{n+1} = f(x_n, a), \quad (2.7)$$

$a \in \mathbb{R}^m$  est le paramètre de bifurcation et  $f(x)$  étant une fonction uniforme de classe  $C^1$  de la variable réelle  $x$ , ne pouvant être ramenée à la forme (2.3) par un changement linéaire de variables.

La question principale qui se pose ici est de savoir si le système (2.7) possède un seul point fixe, ou plusieurs et quelle est la nature de ces points, ou s'il a des orbites périodiques et de quelles périodes et de quelle nature. Il s'agit donc de décrire le comportement du système (2.7). La discussion suivante aide à répondre à ces questions.

### 2.3.1 Existence des points fixes et orbites périodiques

Rappelons que les points fixes du système dynamique (2.7) sont les solutions de l'équation

$$x = f(x), \quad (2.8)$$

Similairement, les points périodiques de période  $p$  sont les solutions de l'équation

$$x = f^p(x), \quad (2.9)$$

qui ne sont pas solutions de l'équation

$$x = f^m(x), \quad (2.10)$$

pour tous  $m < p$ .

#### **Théorème 2.2.**

*Supposons que l'application  $h : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$  est continue. Alors l'image de  $h$  est un intervalle fermé et borné.*

#### **Lemme 2.3.**

*Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$  une application continue au point  $x_0 \in I$ .*

Supposons que  $|f(x_0)| < 1$ . Soit  $k \in (|f(x_0)|, 1)$ . Alors il existe  $r > 0$  tel que

$$|f(x)| \leq k \text{ pour tout } x \in [x_0 - r, x_0 + r] \cap I.$$

*Remarque 2.4.*

Le lemme (2.3) reste vrai si on remplace  $<$  et  $\leq$  par  $>$  et  $\geq$  respectivement.

Des autres notions importantes du calcul élémentaire est le théorème des accroissements finis et le théorème des valeurs intermédiaires sont données ci-dessus.

**Théorème 2.5.** (*Théorème des accroissements finis*)

Pour toute fonction réelle d'une variable réelle  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  ( $a$  et  $b$  réels tels que  $a < b$ ), supposée continue sur l'intervalle fermé  $[a, b]$  et dérivable sur l'intervalle ouvert  $]a, b[$ , il existe un réel  $c$  dans  $]a, b[$  vérifiant :

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c). \tag{2.11}$$

**Théorème 2.6.** (*Théorème des valeurs intermédiaires.*)

Pour toute application continue  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  et tout réel  $u$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$ , il existe au moins un réel  $c$  compris entre  $a$  et  $b$  tel que  $f(c) = u$ .

Les deux théorèmes qui suivent peuvent être utilisés pour analyser l'existence des points fixes des systèmes.

**Théorème 2.7.**

Soit  $I = [a, b]$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow I$  une application continue. Alors  $f$  a au moins un point fixe dans  $I$ .

*Démonstration.*

Soit  $g(x) = f(x) - x$ .  $g$  est continue sur  $I$ . Supposons que  $f(a) > a$  et  $f(b) < b$  (sinon  $a$  ou  $b$  est un point fixe). Donc  $g(a) > 0$  et  $g(b) < 0$ . D'après le théorème (2.6) il existe  $c$  entre  $a$  et  $b$  tel que  $g(c) = 0$ , d'où  $f(c) = c$ .  $\square$

**Théorème 2.8.**

Soit  $f : I \rightarrow I$  et supposons que  $|f'(x)| < 1$  pour tout  $x$  dans  $I$ . Alors il existe un point fixe unique pour  $f$  dans  $I$ . De plus

$$|f(x) - f(y)| < |x - y|,$$

pour tout  $x, y \in I, x \neq y$ .

*Démonstration.*

Le théorème (2.7) garantit au moins un point fixe pour  $f$ . Nous supposons que  $x$  et  $y$  sont des points fixes,  $x \neq y$ . Par le théorème (2.5), il y a un  $c$  entre  $x$  et  $y$  tel que

$$f'(c) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x} = 1.$$

Contradiction. Donc  $x = y$ . Pour établir la deuxième affirmation du théorème, nous utilisons une deuxième fois le théorème des accroissements finis pour affirmer que pour tous  $x, y \in I$ ,  $x \neq y$  on a

$$|f(x) - f(y)| < f'(c)|x - y| < |x - y|.$$

□

*Remarque 2.9.*

1. L'existence de points périodiques de période  $p$  peut être établie en utilisant les théorèmes (2.7), (2.8) et en remplaçant  $f$  par  $f^p$ .
2. L'existence d'une orbite périodique de période 2 implique l'existence d'un point fixe. En fait, soit  $x_1 = f(x_2)$  et  $x_2 = f(x_1)$ , avec  $x_1 \neq x_2$ . Nous pouvons évidemment supposer que  $x_1 < x_2$ . Alors,  $f(x_1) > x_1$  et  $f(x_2) < x_2$  d'où l'existence d'un point fixe dans  $[x_1, x_2]$

Un autre résultat concernant l'existence des orbites périodiques est donné par le théorème de Sarkovskii.

**Théorème 2.10.** (*Charkovski*)

*Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow I$  continu. Si  $f$  admet un point périodique de période  $n$ , alors pour tout  $m$  succédant à  $n$  dans l'ordre de Sharkovski,  $f$  admet un point périodique de période  $m$ .*

## 2.3.2 Attracteurs et Sources

### 2.3.2.1 Attracteurs

Au chapitre 1, nous avons introduit la notion de stabilité des points fixes et des orbites périodiques. Nous présentons ici une condition qui assure la stabilité, avec quelques autres notions et résultats strictement liés à la stabilité et à l'instabilité des points fixes et des orbites périodiques.

**Théorème 2.11.** [16]

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $x^*$  un point fixe d'une fonction continue  $f : I \rightarrow I$ . Supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que  $f$  soit différentiable sur  $]x^* - r, x^* + r[$  sauf possiblement à  $x^*$  et  $|f'(x)| \leq 1$ . Alors  $x^*$  est stable.

*Démonstration.*

Soit  $x_0 \in I$ . D'après le théorème des accroissements finis, il existe  $c$  entre  $x_0$  et  $x^*$  tel que  $f(x_0) - f(x^*) = f'(c)(x_0 - x^*)$ , de plus

$$|f'(x)| \leq 1.$$

Alors

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| \leq |x_0 - x^*|,$$

d'où

$$|x_{n+1} - x^*| = |f(x_n) - f(x^*)| \leq |x_n - x^*| \leq \dots \leq |x_0 - x^*|.$$

Donc, le point fixe  $x^*$  est stable. □

Rappelons qu'un point périodique de période  $p$  est un point fixe de  $f^p$ . D'où le théorème suivant.

**Théorème 2.12.** [16]

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  une orbite périodique de période  $p$  d'une fonction continue  $f : I \rightarrow I$ . Supposons qu'il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $j = 0, 1, \dots, p-1$ ,  $f$  est différentiable sur  $]x_j - r, x_j + r[$ , sauf possiblement à  $x_j$  de plus

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x) \right| \leq 1.$$

Alors l'orbite périodique  $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  est stable.

Nous allons discuter ici deux cas extrêmes de stabilité et d'instabilité.

**Définition 2.13.**

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue. Un point fixe  $x^*$  s'appelle **attractif** s'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que

$$\forall x_0 \in B_\epsilon(x^*), x_n = f^n(x_0) \longrightarrow x^* \text{ quand } n \longrightarrow \infty.$$

Une orbite périodique de période  $p$   $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  de  $f$  est dite **attractive** si chacun de ses points est un point fixe attractif de l'application  $f^p$ .

Cette définition, n'est pas toujours facile à appliquer. Voici un critère.

**Théorème 2.14.** [16]

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue sur  $I$  ayant un point fixe  $x^*$ . Supposons qu'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que la fonction  $f$  est dérivable sur tout le voisinage  $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$  du point  $x^*$  et que la dérivée de la fonction  $f$  est continue au point  $x^*$ . Alors  $|\frac{d}{dx}f(x^*)| < 1$  implique que le point  $x^*$  est attractif.

*Démonstration.* Soit  $k \in \{|f'(x^*)|, 1\}$ . Par le lemme (2.3), il y a un nombre positif  $r < \epsilon$  tel que  $|f'(x)| \leq k < 1$  pour tout  $x \in [x^* - r, x^* + r] = J$ . Soit une condition initiale  $x_0 \in J$ . Ensuite, par le théorème des accroissements finis, il existe un  $c$  entre  $x_0$  et  $x^*$  tel que

$$x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f'(c)(x_0 - x^*).$$

Par conséquent,

$$|x_1 - x^*| \leq k|x_0 - x^*|.$$

Cette inégalité montre que  $x_1 \in J$  et on peut appliquer à  $x_1$  la même argument utilisé pour  $x_0$ . On obtient

$$|x_2 - x^*| \leq k|x_1 - x^*| \leq k^2|x_0 - x^*|.$$

En continuant de la même manière, on arrive, après  $n$  étapes, à l'inégalité

$$|x_n - x^*| \leq k^n|x_0 - x^*|.$$

Comme  $k \in [0, 1[$ , on déduit que  $|x_n - x^*| \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ . □

Le nombre  $S = f'(x^*)$  est appelé le multiplicateur du point fixe  $x^*$ .

Pour donner une condition suffisante pour la quelle une orbite périodique de période  $p$  sera un attracteur il suffit de remarquer qu'un point périodique de période  $p$  est un point fixe de  $f^p$ . En appliquant la règle de chaîne on trouve

$$\frac{d}{dx}f^p(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{p-1}), \quad (2.12)$$

d'où

$$\frac{d}{dx}f^p(x_i) = \frac{d}{dx}f^p(x_j), \quad 0 \leq i, j \leq p-1. \quad (2.13)$$

**Théorème 2.15.**

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  une orbite périodique de période  $p$  d'une fonction continue  $f : I \rightarrow I$ . Supposons qu'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que la fonction  $f$  est dérivable sur tout le voisinage  $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$  du point  $x_j$  et que la dérivée de la fonction  $f$  est continue au point  $x_j$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, p-1$ . Alors

$$\left| \frac{d}{dx} f^p(x_0) \right| < 1, \quad (2.14)$$

implique que l'orbite périodique  $(x_0, x_1, \dots, x_{p-1})$  est attractive.

*Démonstration.*

Rappelons que chaque point  $x_j$ ,  $j=1,2,\dots,p-1$  est un point fixe de  $f^p$ . L'inégalité (2.14) et le théorème (2.14) entraîne que le point  $x_0$  est un attracteur pour  $f^p$ . L'égalité (2.13) avec l'inégalité (2.14) impliquent que tout point  $x_j$ ,  $j=1,2,\dots,p-1$  est un attracteur du système dynamique défini par  $f^p$ . donc l'orbite périodique est un attracteur.  $\square$

Le nombre

$$S = \frac{d}{dx} f^p(x_0) = f'(x_0)f'(x_1)\dots f'(x_{p-1}),$$

est appelé le multiplicateur de l'orbite périodique  $\{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$ .

Parfois, la dérivée de la fonction  $f$  satisfait une inégalité plus faible que celle dans le théorème (2.14). Il se peut arriver qu'il existe un  $d > 0$  tel que  $|f'(x)| < 1$  pour tout  $x \in ]x^* - d, x^* + d[$ , sauf à  $x^*$  où la dérivée peut ne pas exister ou  $|f'(x^*)| = 1$ . Sous ces hypothèses plus faibles, nous pouvons prouver que  $x^*$  est un attracteur. Pour montrer ce résultat, et d'autres résultats présentés plus tard dans ce chapitre, nous avons besoin d'introduire le lemme suivante.

**Lemme 2.16.**

1. Toute suite croissante et majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante et minorée est convergente.

**Théorème 2.17.**

Soit  $I$  un intervalle. Soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue sur  $I$  ayant un point fixe  $x^*$ . Supposons qu'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que la fonction  $f$  est dérivable sur tout le voisinage  $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$  sauf possiblement à  $x^*$  et  $|f'(x)| < 1$ . Alors le point  $x^*$  est attractif.

*Démonstration.*

Soit  $x_0 \in ]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$ . Par le théorème des accroissements finis, on a

$$|x_1 - x^*| = |f(x_0) - f(x^*)| < |x_0 - x^*|.$$

Ceci montre que la suite  $\{|x_n - x^*|, n = 0, 1, \dots\}$  est strictement décroissante. Selon le lemme (2.16), elle doit converger vers  $c \in [0, r[$ . Nous montrons que  $c = 0$ . L'ensemble des points limites  $L(x_0)$  de  $\mathcal{O}(x_0)$  est contenu dans (et peut coïncider avec) l'ensemble  $]x^* - c, x^* + c[$ . D'autre part  $f(L(x_0)) = L(x_0)$ . Le théorème des accroissements finis implique que

$$|f(x^* + c) - f(x^*)| < |(x^* + c) - x^*| = c \text{ et } |f(x^* - c) - f(x^*)| < |x^* - c) - x^*| = c.$$

Donc les deux nombres  $f(x^* + c)$  et  $f(x^* - c)$  sont très proche de  $x^*$  que  $c$ . Contradiction avec l'égalité  $f(L(x_0)) = L(x_0)$ , donc  $c = 0$ .  $\square$

Le théorème (2.17) peut facilement être étendu aux orbites périodiques de période  $p$  en remplaçant  $f$  par  $f^p$ .

### 2.3.2.2 Sources

#### Définition 2.18.

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $f : I \rightarrow I$  une application continue. Un point fixe  $x^*$  de  $f$  est une source appelé aussi un point répulsif s'il existe  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $x_0 \in I$ ,  $0 < |x_0 - x^*| \leq \epsilon$ , il existe un  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq n_0$

$$|x_n - x^*| > \epsilon.$$

#### Définition 2.19.

On dit qu'une orbite périodique  $\mathcal{O}(x_0)$  de période  $p$  de  $f$  est une source (ou répulsive) si chaque point de l'orbite est une source pour le système dynamique généré par  $f^p$ .

Voici un critère pour qu'un point fixe soit une source.

#### Théorème 2.20.

*Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $x^*$  un point fixe d'une fonction continue  $f : I \rightarrow I$ . Supposons qu'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que la fonction  $f$  est dérivable sur tout le*

voisinage  $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$  du point  $x^*$  et que la dérivée de la fonction  $f$  est continue au point  $x^*$ . Alors  $|\frac{d}{dx}f(x^*)| > 1$  implique que le point  $x^*$  est répulsif.

*Démonstration.*

Choisissons un nombre  $k \in (1, |f'(x^*)|)$ . Par la remarque (2.4) il existe  $0 < r < \epsilon$  tel que  $|f'(x)| \geq k$  pour tout  $x \in [x^* - r, x^* + r] = J$ . Soit  $x_0 \in J, x_0 \neq x^*$ . Par le théorème des accroissements finis on a

$$x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f'(c)(x_0 - x^*),$$

avec  $c$  entre  $x_0$  et  $x^*$ . Donc

$$|x_1 - x^*| \geq k|x_0 - x^*|.$$

Si  $|x_1 - x^*| > r$  on a fini. Sinon le raisonnement ci-dessus peut être répété pour  $x_1$  et on a

$$|x_2 - x^*| \geq k|x_1 - x^*| \geq k^2|x_0 - x^*|.$$

Tant que  $x_1, x_2, \dots, x_{j-1}$  restent dans l'intervalle  $[x^* - r, x^* + r]$  on obtient

$$|x_j - x^*| \geq k^j|x_0 - x^*|.$$

Comme  $k > 1$ , l'orbite quittera finalement l'intervalle  $[x^* - r, x^* + r]$ , c'est-à-dire qu'il existe un entier  $m > 1$  tel que

$$|x_m - x^*| \geq k^m|x_0 - x^*| > r.$$

Donc,  $x^*$  est un point répulsif. □

Pour les orbites périodiques de période  $p$ , la condition d'être une source est établie en utilisant  $f^p$  à la place de  $f$ .

**Théorème 2.21.**

Soit  $I$  un intervalle ouvert et  $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, \dots, x_{p-1}\}$  une orbite périodique de période  $p$  d'une fonction continue  $f : I \rightarrow I$ . Supposons qu'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que la fonction  $f$  est dérivable sur tout le voisinage  $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$  du point  $x_j$  et que la dérivée de la fonction  $f$  est continue au point  $x_j$  pour tout  $j = 1, 2, \dots, p - 1$ . Alors

$$|\frac{d}{dx}f^p(x_0)| > 1, \tag{2.15}$$

implique que l'orbite périodique  $\mathcal{O}(x_0)$  est répulsive.

*Démonstration.*

Par le théorème (2.20) chaque point  $x_j$  est un répulsif pour le système dynamique défini par  $f^p$ . Par conséquent, l'orbite périodique est une source (répulsive).  $\square$

Un résultat similaire au théorème (2.17) assure qu'un point fixe  $x^*$  est une source (répulsif) dans des conditions moins exigeantes que celles du théorème (2.20).

**Théorème 2.22.**

*Soit  $I$  un intervalle et soit  $f : I \rightarrow I$  une fonction continue sur  $I$  ayant un point fixe  $x^*$ . Supposons qu'il existe un  $\epsilon > 0$  tel que la fonction  $f$  est dérivable sur tout le voisinage  $]x^* - \epsilon, x^* + \epsilon[$  sauf possiblement à  $x^*$  et  $|f'(x)| > 1$ . Alors le point  $x^*$  est répulsif.*

*Démonstration.*

Soit  $x_0 \in [x^* - r, x^* + r]$ . Par le théorème des accroissements finis on déduit que la suite  $\{|x_n - x^*|, n = 0, 1, 2, \dots\}$  est strictement croissante tant que les distances entre les points de l'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  et  $x^*$  ne sont pas plus grand que  $r$ . En fait

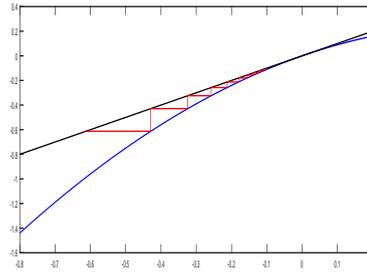
$$|x_{i+1} - x^*| = |f(x_i) - f(x^*)| = |f'(c_i)||x_i - x^*|.$$

Supposons que  $\{|x_n - x^*|, n = 0, 1, 2, \dots\}$  ne dépasse jamais  $r$ . Par le lemme (2.16), la suite est convergente, c'est-à-dire,  $|x_n - x^*| \rightarrow c \leq r$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Donc l'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  converge vers  $x^* - c$  ou vers  $x^* + c$  ou vers l'orbite périodique  $\{x^* - c, x^* + c\}$ . Les inégalités  $|f(x^* - c) - x^*| > c$  et  $|f(x^* + c) - x^*| > c$  donne une contradiction avec  $f(L(x_0)) = L(x_0)$ . Donc il existe  $m \geq 1$  tel que  $|x_m - x^*| > r$  d'où  $x^*$  est une source (répulsive).  $\square$

Le théorème (2.22) peut facilement être étendu aux orbites périodiques de période  $p$  en remplaçant  $f$  par  $f^p$ . Au chapitre 1 nous avons introduit la notion d'instabilité pour un point fixe  $x^*$  ou une orbite périodique  $\mathcal{O}(x_0)$  de période  $p$ . Les points fixes répulsifs ou les orbites périodiques répulsives sont évidemment instable. L'inverse n'est pas vrai, comme le montrent les exemples suivants.

**Exemple 2.1.**

*Soit  $f(x) = x - x^2$ . Le seul point fixe est  $x^* = 0$  (voir figure (2.7)). Pour  $0 < x < 1$  on a  $|f'(x)| < 1$  et  $0 < f(x) < x$ . Ainsi chaque orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  avec  $x_0 \in ]0, 1[$  converge vers 0. Pour tout  $x_0 < 0$  nous avons  $f'(x) > 1$  et  $f(x) < x$ . Chaque orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  avec  $x_0 < 0$  tend vers  $-\infty$ . L'origine est un point instable, mais n'est pas répulsif (source). Dans ce cas, certains auteurs appellent 0 un point fixe semi-stable.*


 FIGURE 2.5: Le diagramme cobweb du système dynamique  $f(x) = 2.9x(1-x)$ .

### Exemple 2.2.

Soit

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ -0.5x + 0.5 & \text{si } -1 < x \leq -0.25 \\ -2.5x & \text{si } -0.25 < x \leq 0.25 \\ -0.5x - 0.5 & \text{si } 0.25 < x \leq 1 \\ -2x + 1 & \text{si } 1 < x \end{cases} \quad (2.16)$$

On a  $f([-1, 1]) = [-1, 1]$ ,  $f(-1) = 1$  et  $f(1) = -1$  figure (2.6). Pour toute condition initiale  $x_0 \in [-1, 1]$  (sauf  $x_0 = 0$ ) l'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  converge vers l'orbite périodique  $\{-1, 1\}$ . Pour toute condition initiale  $|x_0| > 1$  l'orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  tend à l'infini.

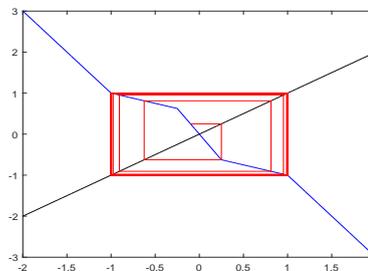


FIGURE 2.6: Le diagramme cobweb du système dynamique (2.16)

#### 2.3.2.3 Attracteurs globales

Jusqu'à présent, nous avons concentré notre attention sur le comportement local du système dynamique unidimensionnelle, dans le sens où notre étude de la stabilité des points fixes et des orbites périodiques a été limitée au voisinage de ces points. Nous donnons maintenant des résultats pour obtenir des informations sur le comportement global d'un système dynamique, au moins dans quelques cas simples.

Le théorème (2.24) ci-dessous donne des conditions suffisantes pour l'existence d'un point fixe  $x^*$  unique tel que toutes les trajectoires convergent vers ce point  $x^*$ . Le résultat est assez général et sera étendu aux systèmes dynamiques multidimensionnelle avec des petits changements. La preuve de ce théorème est basée sur le lemme suivant

**Lemme 2.23.**

Soit  $I$  un intervalle et  $h : I \rightarrow \mathbb{R}$  une application continue sur  $I$  et différentiable à chaque point dans l'intérieur de  $I$ . Supposons que  $h'(x) \geq 0$ . Alors  $h$  est croissante sur  $I$ . Si de plus,  $h'$  est nul seulement pour un nombre fini de points sur tout intervalle borné  $J \subset I$ , alors  $h$  est strictement croissante sur  $I$ .

Nous pouvons maintenant démontrer le résultat suivant.

**Théorème 2.24.**

Soit  $I$  un intervalle et  $f : I \rightarrow I$  une application continue sur  $I$  et différentiable à chaque point dans l'intérieur de  $I$ . Supposons que

1.  $f$  a un point fixe  $x^*$ .
2.  $|f'(x)| \leq 1$  pour tout  $x \in I$
3. Il existe un intervalle ouvert  $J \subset I$ ,  $x^* \in J$ , tel que  $|f'(x)| < 1$ , pour tout  $x \in J$ ,  $x \neq x^*$ .

Alors  $x^*$  est le seul point fixe de  $f$  et chaque orbite  $\mathcal{O}(x_0)$  converge vers  $x^*$ .

*Démonstration.*

On pose  $h(x) = x - f(x)$ . Donc  $h(x) = 0$  si et seulement si  $x$  est un point fixe de  $f$ . D'où  $h(x^*) = 0$ . L'inégalité  $|f'(x)| \leq 1$  implique que  $h'(x) = 1 - f'(x) \geq 0$  sur  $I$  et  $h'(x) > 0$  sur  $J$  sauf éventuellement à  $x^*$ . Alors, la fonction  $h$  est croissante sur  $I$  et strictement croissante sur  $J$ . Comme  $h(x^*) = 0$  alors  $h(x) < 0$  ( $x < f(x)$ ) pour tout  $x < x^*$  et  $h(x) > 0$  ( $x > f(x)$ ) pour tout  $x > x^*$ . Donc  $x^*$  est le seul point fixe de  $f$ .

Nous montrons maintenant que chaque orbite converge vers  $x^*$ . Soit  $x_0 < x^*$  et  $y \in (x_0, x^*) \cap J$ . Alors par le théorème des accroissements finis on a

$$x_1 - x^* = f(x_0) - f(x^*) = f(x_0) - f(y) + f(y) - f(x^*) = f'(d)(x_0 - y) + f'(c)(y - x^*),$$

avec  $d \in (y, x_0)$  et  $c \in (x^*, y)$ . Par conséquent

$$|x_1 - x^*| < |x_0 - y| + |y - x^*| = |x_0 - x^*|.$$

car  $y \in (x_0, x^*)$ . Similairement on montre que  $|x_1 - x^*| < |x_0 - x^*|$  si  $x_0 > x^*$ . D'où, la suite  $\{|x_n - x^*|, n = 0, 1, \dots\}$  est strictement décroissante et à partir de ce point nous pouvons suivre le même raisonnement comme dans la preuve du théorème (2.17).  $\square$

**Exemple 2.3.**

Soit  $f(x) = \arctan(x)$ . Alors  $x^* = 0$  est un point fixe de  $f$ . De plus  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  et  $0 < f'(x) \leq 1$ , avec  $f'(0) = 1$ . D'où, toutes les orbites convergent vers 0 (figure (2.7)).

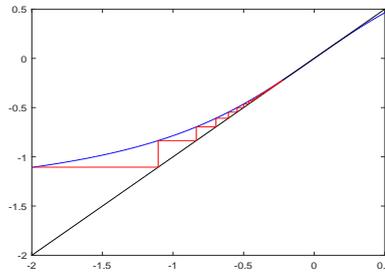


FIGURE 2.7: Le diagramme cobweb de l'application  $f(x) = \arctan(x)$ .

**Exemple 2.4.**

Soit  $f(x) = \cos(x)$ . Il existe  $x^* \in (0, 1)$  tel que  $f(x^*) = x^*$  (voir figure (2.8)). La fonction satisfait toutes les hypothèses du théorème (2.24). Par conséquent, toutes les orbites convergent vers  $x^*$ .

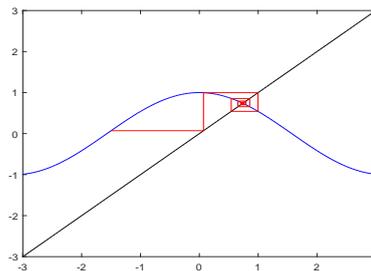


FIGURE 2.8: Le diagramme cobweb de l'application  $f(x) = \cos(x)$ .