Chapitre 1

Notions Générales sur les Systèmes Dynamiques Discrets

Le but de ce premier chapitre est d'introduire de nombreuses notions et techniques de base de la théorie des systèmes dynamiques dans un cadre aussi simple que possible.

1.1 Définitions

Définition 1.1. [16]
Soit f une fonction de classe C^1 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^m$. Un système dynamique discret noté $(D, \mathbb{N}, f)$ est une relation de la forme

$$x_{n+1} = f(x_n) \tag{1.1}$$

Ainsi, si $\circ$ représente la composition des applications, on a

$$x_n = f^n(x_0) \tag{1.2}$$

où

$$f^n(x) = \underbrace{f \circ f \circ ... \circ f}_{n fois}(x), \ \forall n \in \mathbb{N} \text{ et } f^0 = Id.$$

L'application f est appelée récurrence, itération ou transformation ponctuelle. Si le système dynamique discret est inversible, l'égalité 1.2 reste vraie pour $n \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.2. (Systèmes dynamiques discrets autonomes et non-autonomes)
Lorsque la fonction f dans (1.1) dépend explicitement du temps le système est dit non-autonome. Dans le cas contraire, on dit que le système est autonome.

Définition 1.3. (Trajectoires)
Étant donné le point initial x_0, on appelle orbite (ou trajectoire) du système (1.1) la suite

$$\mathcal{O}(x_0) = \{x(0) = x_0, x(1) = f(x(0)), ..., x(n+1) = f(x(n)), ...\}.$$

1.2 Points Fixes et Orbites Périodiques

Les points fixes et les orbites périodiques sont des trajectoires particulièrement simples mais qui jouent un rôle central dans l'étude des systèmes dynamiques.

1.2.1 Points fixes et leurs stabilités

Le point fixe c'est la trajectoire la plus simple.

Définition 1.4. (Points fixes)
Un point x^* est un point fixe du système (1.1) (ou de l'application f) si

$$f(x^*) = x^*.$$

Parfois, ces points sont appelés points stationnaires ou points d'équilibres.

Exemple 1.1.
Les points fixes de l'application logistique $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ $(0 < a \leq 4)$ sont les solutions de l'équation $x = ax(1-x)$. Donc le système précédant a deux points fixes $x_1^* = 0$ et $x_2^* = \frac{a-1}{a}$. Graphiquement les points fixes de $f(x) = ax(1-x)$ sont donnés par l'intersection entre le graphe de f et la droit $y = x$ comme le montre la Figure (1.1).

Remarque 1.5.
Une orbite qui a le point fixe comme condition initiale reste à ce point. Cette situation est possible en théorie, mais pas en pratique, puisque chaque processus subit de petites perturbations qui ne sont normalement pas prises en compte dans un modèle. Cette observation motive l'introduction de l'idée de stabilité.

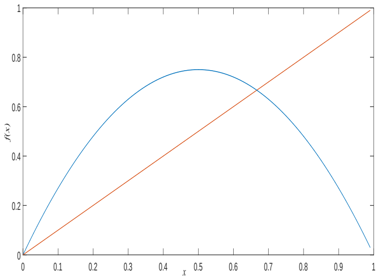

FIGURE 1.1: Les points fixes de l'application $f(x) = 3x(1-x)$.

Définition 1.6.

Un point fixe x^* est stable si pour tous $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que

$$\|x_0 - x^*\| \leq \delta \text{ implique } \|x_n - x^*\| \leq \epsilon \text{ pour tous } n \geq 1. \tag{1.3}$$

Autrement dit, une fois que nous avons choisi à quel point nous voulons rester près de x^* au future (choix de ϵ), nous pouvons trouver à quel point nous devons commencer au début (existence de δ).

Définition 1.7.

Un point fixe x^* qui n'est pas stable est dit instable.

1.2.2 Orbites périodiques (p-cycle) et leurs stabilités

Définition 1.8. (p-cycles)

Par définition, un p-cycle est un p-uplet $(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ tel que pour tout $k \in \{1, 2, ..., p-1\}$, on a $f(x_{k-1}) = x_k$ et $f(x_{p-1}) = x_p = x_0$; p étant le plus petit entier supérieur ou égale à 1 possédant cette propriété. On dira que tout point du cycle est p-périodique.

Remarque 1.9.

1. Un point fixe est un point périodique de période 1.
2. Un point x est dit point p-périodique d'une transformation f, s'il est point fixe de f^p, sans être un point fixe de f^l, $1 \leq l < p$, (l et p entiers).

Exemple 1.2.

Soit le système dynamique gouverné par l'application logistique $f(x) = ax(1-x)$

$(0 < a \leq 4)$. Les points 2-périodiques sont solutions du système

$$\begin{cases} f^2(x) = x, \\ f(x) \neq x. \end{cases}$$

Si $2 < a \leq 4$ ce système à deux solutions

$$x_1 = \frac{a+1+\sqrt{a^2-2a-3}}{2a} \quad et \quad x_2 = \frac{a+1-\sqrt{a^2-2a-3}}{2a},$$

qui sont les points d'un cycle de période 2. Graphiquement les points d'un cycle de période 2 sont l'intersection entre le graphe de $f^2 = f \circ f$ et la droit $y = x$ tel que $f(x) \neq x$ comme le montre la Figure (1.2).

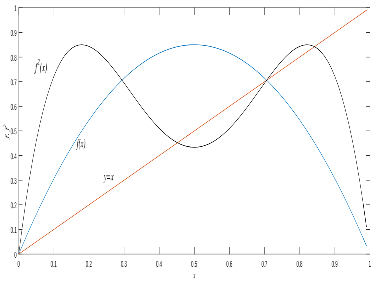

FIGURE 1.2: Les points 2-périodiques de l'application $f(x) = 3.4x(1-x)$.

Définition 1.10.
Une orbite périodique $(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ d'un système dynamique gouverné par une application f est stable si tous point x_i, $i = 0, 1, ..., p-1$ est un point fixe stable du système dynamique gouverné par l'application f^p.

Définition 1.11.
Une orbite périodique $(x_0, x_1, ..., x_{p-1})$ qui n'est pas stable est dite instable.

1.3 Points limites, ensembles limites et orbites apériodiques

Soit $\mathcal{O}(x_0) = \{x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$ une orbite d'un système dynamique

$$x_{n+1} = f(x_n), \tag{1.4}$$

x_0 est une condition initiale donnée.

Définition 1.12.
Un point z est dit point limite de l'orbite $\mathcal{O}(x_0)$ s'il existe une sous suite $\{x_{n_k} : k = 0, 1, ...\}$ de $\mathcal{O}(x_0)$ tel que

$$\lim_{k \to +\infty} \|x_{n_k} - z\| = 0 \tag{1.5}$$

Remarque 1.13.

1. Une orbite stationnaire a un seul point limite (point fixe).
2. Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ p-périodique a exactement p points limites : $x_0, x_1, x_2, ..., x_{p-1}$.

Définition 1.14.
L'ensemble $L(x_0)$ de tous les points limites d'une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dit ensemble limite.

L'égalité fondamentale entre $L(x_0)$ et son image par l'application f est

$$f(L(x_0)) = L(x_0)$$

Définition 1.15.

1. Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite asymptotiquement stationnaire si son ensemble limite est un point stationnaire (point fixe), et elle est asymptotiquement périodique si son ensemble limite est une orbite périodique.
2. Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement périodique de période p s'il n'est pas périodique mais il existe un $m > 0$ tel que $f^{p+k}(x) = f^k(x)$ pour tous $k \geq m$ (i.e. $f^k(x)$ est un point périodique pour $k \geq m$). Si $p = 1$, $\mathcal{O}(x_0)$ est dite éventuellement stationnaire.

Par conséquent, toute orbite éventuellement stationnaire (resp éventuellement périodique) est asymptotiquement stationnaire (resp asymptotiquement périodique). L'inverse n'est pas toujours vrai comme le montre l'exemple suivant :

Exemple 1.3.
Pour le système dynamique $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, *l'orbite* $\mathcal{O}(\frac{1}{2})$ *est asymptotiquement stationnaire mais n'est pas éventuellement stationnaire.*

Définition 1.16.
Une orbite $\mathcal{O}(x_0)$ est dite **apériodique** si son ensemble limite $L(x_0)$ à un nombre infini d'éléments.

D'après ce qui précède, il est clair que soit $\mathcal{O}(x_0)$ est asymptotiquement périodique ($L(x_0)$ est fini), ou apériodique ($L(x_0)$ est infini). Il n'est pas facile d'établir théoriquement le caractère apériodique d'une orbite, car cela dépend de son comportement asymptotique. Le résultat suivant assure l'existence d'orbites apériodiques pour les systèmes dynamiques discrets dans $\mathbb{R}$.

Théorème 1.17. *(Théorème de Li-Yorke [35])*
Soit I un intervalle et $f : I \to I$ une application continu. Supposons que f a une orbite périodique de période 3. Alors f a des orbites périodiques de période p pour tout $p \geq 1$ et il y a un ensemble infini S contenu dans I telle que chaque orbite issu à partir d'un point de S est apériodique.

Le théorème 1.17 semble simple, mais son application à des cas spécifiques peut être difficile.

1.4 Équivalence topologique des systèmes

Nous allons aborder dans cette section la notion d'équivalence entre deux systèmes, cette notion est très importante pour l'étude des systèmes dynamiques, surtout pour les systèmes qui ont des comportements complexes.

Soient D et E deux espaces métriques et $f : D \to D$, $g : E \to E$ deux applications définissant sur D et G respectivement deux systèmes dynamiques.

Définition 1.18.
Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. On dit qu'ils sont topologiquement conjugués s'il existe un homéomorphisme (une application continue et bijective) $h : D \to E$ tel que $h \circ f = g \circ h$.

Le théorème suivant montre l'importance de cette définition.

Théorème 1.19.
Soient (D, f) et (E, g) deux systèmes dynamiques. Supposons qu'ils sont topologiquement conjugués par un homéomorphisme $h : D \to E$. Alors

1. *L'application $h^{-1} : E \to D$ vérifie aussi la définition et assure donc l'équivalence topologique entre les systèmes (D, f) et (E, g).*
2. *$h \circ f^n = g^n \circ h$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

3. *Si* $x^* \in D$ *est un point périodique de* f *de période fondamentale* p *alors* $h(x^*) \in E$ *est un point périodique de* g *de période fondamentale* p.

Remarque 1.20.

1. L'application $h : D \to E$ correspond tout simplement à un changement de variables qui transforme f en g.
2. Selon ce concept, et pour un point fixe hyperbolique, nous pouvons donner une description approximative du comportement local du système dynamique. Ceci est précisé par le théorème de Hartman-Grobman [12].