Exo 4 :

1) Les hypothèses simplificatrices sont :

- Ecoulement stationnaire $\left(\frac{\partial}{\partial t}=0\right)$
- fluide incompressible ($\rho = c^{te}$)
- Ecoulement 2D $\left(w = \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$
- Régime développé $\left(\frac{\partial}{\partial x}=0\right)$

x La composante de vitesse U suivant x est fonction de y seulement.

x Les autres composantes $V = W = 0$

Pour un fluide Newtonien incompressible, les équations N-S s'écrivent :

$$\frac{\partial(\rho U_i)}{\partial t} + \rho U_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 U_i}{\partial x_j^2} + \rho g_i$$

les éq^{ts} simplifiées sont :

- Eq^{t} de q^{té} de m^{vt} suivant x : $\mu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\rho g_x$ ---- (1)
- " " " " " " y : $\frac{\partial P}{\partial y} = \rho g_y$ ------ (2)

2) En intégrant l'éq^{t} (2) par rapport à y dans les liquides a et b, on obtient :

$$\frac{dP}{dy} = \rho g_y \rightarrow dP = \rho g_y dy = -\rho g \sin\theta \, dy$$

Liquide b : $\int_{P(y)}^{P_0} dP = -\rho_b g \sin\theta \int_y^{h_b} dy \rightarrow P\Big|_{P(y)}^{P_0} = -\rho_b g \sin\theta \, y\Big|_y^{h_b}$ avec $h_a \leq y \leq h_b$

$$P(y) - P_0 = -\rho_b g \sin\theta (y - h_b) \rightarrow P(y) = P_0 + \rho_b g \sin\theta (h_b - y)$$ si $h_a \leq y \leq h_b$

Liquide a : $\int_{P(y)}^{P(h_a)} dP = -\rho_a g \sin\theta \int_y^{h_a} dy \rightarrow P\Big|_{P(y)}^{P(h_a)} = -\rho_a g \sin\theta \, y\Big|_y^{h_a}$ avec $0 \leq y \leq h_a$

$$P(y) - P(h_a) = -\rho_a g \sin\theta (y - h_a) \rightarrow P(y) = P(h_a) + \rho_a g \sin\theta (h_a - y)$$ si $0 \leq y \leq h_a$

3/ En intégrant l'éq^{t} (1) 2 fois, on obtient : (A et B sont des c^{te})

$$\mu \frac{d^2 U}{dy^2} = -\rho g_x \rightarrow U(y) = \frac{-g}{2\nu} \cos\theta \, y^2 + Ay + B$$

Liquide a : $U_a(y) = \frac{-g}{2\nu_a} \cos\theta \, y^2 + C_1 y + C_2$ si $0 \leq y \leq h_a$

Liquide b : $U_b(y) = -\frac{g}{2 \cdot \nu_b} \cos\theta \, y^2 + C_3 y + C_4$ si $h_a \leq y \leq h_b$

Exo 6 :

1/a) Ecoulement stationnaire $\left(\frac{\partial()}{\partial t}=0\right)$

- " 2D $\left(w=0 \text{ et } \frac{\partial()}{\partial z}=0\right)$
- " symétrique $\left(\frac{\partial()}{\partial \theta}=0\right)$
- Effet de la gravité est négligé
- L'écoulement est circulaire $\rightarrow U_r=0$ (Eqt de continuité)

* Eqt de qté de mvt suivant z donne : $\frac{dP}{dz}=0$ --- (1)

* " " " " " " r " : $\frac{dP}{dr}=\rho\frac{U_\theta^2}{r}$ --- (2)

* " " " " " " θ " : $\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r.U_\theta)\right]=0$ --- (3)

En intégrant 2 fois l'eqt (3), on obtient.

$$* \; U_\theta = C_1\frac{r}{2}+\frac{C_2}{r}$$

En utilisant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \text{à } r=R_o, & U_\theta=0 \\ \text{à } r=R_i, & U_\theta=\omega_i R_i \end{cases}$$

Donc : $C_1=\frac{-2R_i^2\omega_i}{R_o^2-R_i^2}$; $C_2=\frac{R_o^2R_i^2\omega_i}{R_o^2-R_i^2}$

Finallement : $U_\theta=\frac{R_i^2\omega_i}{R_o^2-R_i^2}\left(\frac{R_o^2}{r}-r\right)$ ✓

$$* \; \tau_{r\theta}\Big|_{r=R_i}=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U_\theta}{r}\right)+\frac{1}{r}\frac{\partial U_r}{\partial \theta}\right]_{r=R_i}=\mu\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{U_\theta}{r}\right)\right]_{r=R_i}$$

$$\tau_{r\theta}\Big|_{r=R_i}=\mu\left(\frac{dU_\theta}{dr}-\frac{U_\theta}{r}\right)_{r=R_i}=-\mu\frac{2\omega_i R_o^2}{R_o^2-R_i^2}$$

b/ $U_\theta=\frac{R_i^2\omega_i}{R_o^2-R_i^2}\left(\frac{R_o^2}{r}-r\right)=\frac{R_i^2\omega_i}{(R_o-R_i)(R_o+R_i)}\left[\frac{(R_o-r)(R_o+r)}{r}\right]$

Lorsque l'espace entre les 2 cylindres est petit ;

$(R_o-R_i)\ll R_o$ et $R_o\approx R_i$

On remplace R_o+R_i par $2R_i$ $\quad (R_o+R_i\approx 2R_i)$

De la même façon $r\approx R_i$ et on remplace R_o+r par $2R_i$

$(R_o+r\approx 2R_i)$

On définit : $y=R_o-r$ et $h=R_o-R_i$

La Vitesse linéaire : $V = R_i \omega_i$

$$U_\theta \approx \frac{R_i^2 \omega_i^2}{h \cdot 2R_i}\left(\frac{y \cdot 2R_i}{R_i}\right) = \frac{y\, \omega_i R_i}{h} = V \frac{y}{h}$$

c/ Si le rayon du cylindre externe est infini ($R_i \ll R_o$) et le rayon R_i est négligé s'il ajoute ou soustré de R_o.

D'une façon similaire ($r \ll R_o$) et le rayon r est négligé s'il est ajouté ou soustré de R_o.

Donc : $$U_\theta \approx \frac{R_i^2 \omega_i}{(R_o)(R_o)}\left(\frac{(R_o)(R_o)}{r}\right) = \frac{R_i^2 \omega_i}{r}$$

$$U_\theta = \frac{C^{te}}{r}$$ → Ce qui nous donne un écoulement d'un vortex Libre.

2/ Dans le cas général où les 2 cylindres tournent à des vitesses différentes.

On sait que : $U_\theta = C_1 \frac{r}{2} + \frac{C_2}{r}$

On utilise les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \text{à } r = R_o,\ U_\theta = \omega_o R_o \\ \text{à } r = R_i,\ U_\theta = \omega_i R_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = \dfrac{2(R_o^2 \omega_o - R_i^2 \omega_i)}{R_o^2 - R_i^2} \\ C_2 = \dfrac{R_o^2 R_i^2 (\omega_i - \omega_o)}{R_o^2 - R_i^2} \end{cases}$$

$$U_\theta = \frac{1}{R_o^2 - R_i^2}\left[(R_o^2 \omega_o - R_i^2 \omega_i) r + \frac{R_o^2 R_i^2 (\omega_i - \omega_o)}{r}\right]$$

3/ Si $R_i = \omega_i = 0$

$$U_\theta = \frac{1}{R_o^2}\left[R_o^2 \omega_o r\right] = \omega_o r \quad (\text{vortex forcé})$$

Un champ d'écoulement comme un solide en rotation

EXO **9** :

A/ Les hypothèses simplificatrices sont :

⓪- $g_r = g_\theta = 0$ et $g_z = -g$

① - Ecoulement stationnaire $\left(\frac{\partial}{\partial t} = 0\right)$ et la vitesse angulaire du cylindre externe est constante.

② - Ecoulement incompressible (fluide incompressible) ($\rho = c^{te}$)

③ - Il n'y a ni écoulement, ni variation des propriétés suivant z $\left(V_z = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial z} = 0\right)$

④ L'écoulement est symétrique donc il n'y a pas une variation suivant θ $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} = 0\right)$

1/ L'équation de continuité s'écrit comme suit (en coordonnées cylindriques)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) + \frac{1}{r}\cancelto{4}{\frac{\partial(v_\theta)}{\partial \theta}} + \cancelto{3}{\frac{\partial(v_z)}{\partial z}} = 0$$

Donc l'eq^t se réduit à :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r V_r) = 0 \longrightarrow r.V_r = c^{te}$$

2/ à $r = R_1$ et $r = R_2$ $\longrightarrow V_r = 0$, donc: ⑤ - $v_r = 0$ dans tout le domaine 0,25

L'équation de q^{té} de m^{vt} suivant r :

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial v_r}{\partial t}} + \cancelto{5}{v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}} + \cancelto{4}{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} - \frac{v_\theta^2}{r} + \cancelto{3}{v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}}\right) = \cancelto{0}{\rho g_r} - \frac{\partial p}{\partial r} + \mu\left\{\cancelto{5}{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r)\right]} + \cancelto{4}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}} - \cancelto{4}{\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}}\right\} \text{ ...(i)}$$

L'équation de q^{té} de m^{vt} suivant θ :

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial v_\theta}{\partial t}} + \cancelto{5}{v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r}} + \cancelto{4}{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancelto{5}{\frac{v_r v_\theta}{r}} + \cancelto{3}{v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}}\right) = \cancelto{0}{\rho g_\theta} - \cancelto{4}{\frac{1}{r}\frac{\partial P}{\partial \theta}} + \mu\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta)\right] + \cancelto{4}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2}} + \cancelto{4}{\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2}}\right\} \text{ ----(ii)}$$

L'équation de q^{té} de m^{vt} suivant z :

$$\rho\left(\cancelto{1}{\frac{\partial v_z}{\partial t}} + \cancelto{5}{v_r \frac{\partial v_z}{\partial r}} + \cancelto{4}{\frac{v_\theta}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta}} + \cancelto{3}{v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}}\right) = \rho g_z - \cancelto{3}{\frac{\partial p}{\partial z}} + \mu\left\{\cancelto{3}{\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_z)\right]} + \cancelto{3}{\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2}} + \cancelto{3}{\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}}\right\} \text{ ----(iii)}$$

L'équation (i) se réduit à : $\rho \frac{v_\theta^2}{r} = + \frac{\partial P}{\partial r}$

L'équation (a) se réduit à :

$$0 = \mu \left\{ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) \right] \right\}$$

La vitesse v_θ est une fonction seulement de r $\left(\frac{\partial}{\partial \theta} = 0 \text{ et } \frac{\partial}{\partial z} = 0 \right)$

donc $\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r v_\theta)\right] = 0 \rightarrow \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r v_\theta) = C_1$

$$\text{(*)} \quad \frac{d}{dr}(r v_\theta) = C_1 . r$$

En integrant (*), on obtient : $r. v_\theta = C_1 \frac{r^2}{2} + C_2$

$$\rightarrow v_\theta = C_1 . \frac{r}{2} + C_2 . \frac{1}{r}$$

En utilisant les conditions aux limites, on peut déterminer

C_1 et C_2 :

$$\left.\begin{array}{l} \text{à } r = R_2 \rightarrow v_\theta = \omega R_2 \\ \text{à } r = R_1 \rightarrow v_\theta = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} \omega R_2 = C_1 \frac{R_2}{2} + C_2 \frac{1}{R_2} \\ 0 = C_1 \frac{R_1}{2} + C_2 \frac{1}{R_1} \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{2\omega}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \\ C_2 = \dfrac{-\omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \end{array}\right.$$

En substituant les constantes C_1 et C_2 dans l'expression de v_θ, on obtient :

$$v_\theta = \frac{\omega r}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} - \frac{\omega R_1^2 / r}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} = \frac{\omega R_1}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \left[\frac{r}{R_1} - \frac{R_1}{r} \right]$$

3/ $\tau_{r\theta} = \mu \left[r \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) + \cancel{\frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta}} \right]$

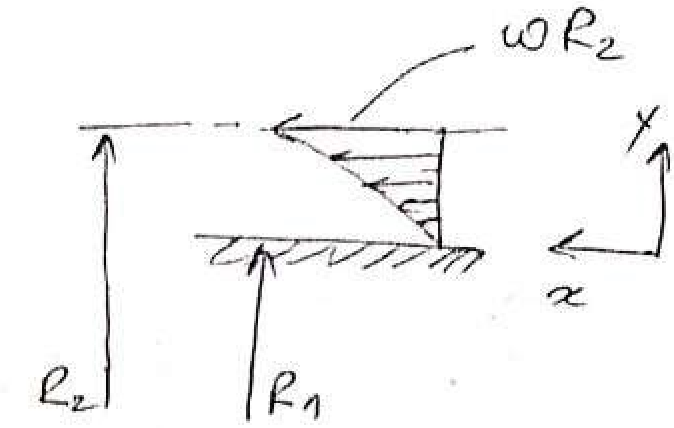
$$\tau_{r\theta} = \mu r \frac{d}{dr}\left(\frac{v_\theta}{r}\right) = \mu r \frac{\omega R_1}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} (-2)\left(-\frac{R_1}{r^3}\right)$$

$$\tau_{r\theta} = \mu \frac{2 \omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \frac{1}{r^2}$$

à la surface du cylindre externe tournant : $\tau_{r\theta}\Big|_{r=R_2} = \mu \dfrac{2\omega}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2$

4/ à la surface du cylindre interne $(r = R_1)$:

$$\tau_s = \mu \frac{2\omega}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2}$$



5/ pour le plan annulaire :

$$\tau_{PL} = \mu \frac{\Delta v}{\Delta y} = \mu \frac{\omega R_2}{R_2 - R_1}$$

Donc $\tau_{PL} = \mu \dfrac{\omega}{1-\left(\frac{R_1}{R_2}\right)}$

$$\tau_s = \mu \frac{2\omega}{\left(1-\frac{R_1}{R_2}\right)\left(1+\frac{R_1}{R_2}\right)} = \mu \frac{\omega}{1-\frac{R_1}{R_2}} \cdot \frac{2}{1+\frac{R_1}{R_2}}$$

Donc $\dfrac{\tau_s}{\tau_{PL}} = \dfrac{2}{1+\frac{R_1}{R_2}}$

6/ Pour 1% de correction :

$$1{,}01 = \frac{2}{1+\frac{R_1}{R_2}}$$

Donc $\dfrac{R_1}{R_2} = 0{,}98$

B/ Le profil de vitesse v_θ reste le même mais on détermine C_1 et C_2 selon les conditions aux limites suivantes :

$$\left.\begin{array}{l} \text{à } r = R_2 \longrightarrow v_\theta = 0 \\ \text{à } r = R_1 \longrightarrow v_\theta = \omega R_1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} 0 = C_1 \frac{R_2}{2} + C_2 \frac{1}{R_2} \\ \omega R_1 = C_1 \frac{R_1}{2} + C_2 \frac{1}{R_1} \end{array}\right.$$

$$\rightarrow \left\{\begin{array}{l} C_1 = \dfrac{2\omega}{1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2} \\ C_2 = \dfrac{-\omega R_2^2}{1-\left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2} \end{array}\right.$$

L'équation de l'énergie s'écrit comme suit :

$$\rho C_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial r}\right) = K\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \mu \Phi$$

Donc $K \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\left[r \frac{dT}{dr} \right] + \mu \Phi = 0$ ----- (J)

avec $\Phi = \left(\frac{dV_0}{dr} - \frac{V_0}{r} \right)^2$

donc $\Phi = \left[\frac{2\omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \right]^2 \frac{1}{r^4}$ ------- (JJ)

En combinant les 2 équations (J) et (JJ) :

$$\frac{d}{dr}\left[r \frac{dT}{dr} \right] = - \frac{\mu}{K} \left[\frac{2\omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \right]^2 \frac{1}{r^3}$$

En intégrant 2 fois, on obtient :

$$T(r) = - \frac{\mu}{4K} \left[\frac{2\omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \right]^2 \frac{1}{r^2} + C_3 \ln r + C_4$$

En utilisant les conditions aux limites :

$$\left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=R_1} = 0 \quad \text{et} \quad T(r=R_2) = T_0$$

on obtient :

$$C_3 = - \frac{\mu}{2K} \left[\frac{2\omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \right]^2 \frac{1}{R_1^2}$$

$$C_4 = T_0 + \frac{\mu}{4K} \left[\frac{2\omega R_1^2}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \right]^2 \left[\frac{1}{R_2^2} + \frac{2}{R_1^2} \ln R_1 \right]$$

Donc : $T(r) = T_0 + \frac{\mu}{4K} \left[\frac{2\omega R_1}{1 - \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2} \right]^2 \left[\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{R_1}{r}\right)^2 + 2 \ln \left(\frac{R_2}{R}\right) \right]$