Exercice 1.2 Sur l'intervalle $[0,1]$, choisissons la subdivision $x_i = \frac{i}{n}$ pour $0 \leq i \leq n$. On a $\Delta x_i = \frac{1}{n}$ et donc $\Delta x = \frac{1}{n}$. On va maintenant jouer sur le choix des c_i. Dans chaque intervalle $[x_{i-1}, x_i]$, choisissons d'abord un $c_i \in \mathbb{Q}$. On a alors $f(c_i) = 1$ et $\sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1.\frac{1}{n} = 1$. Si on choisit maintenant chaque $c_i \notin \mathbb{Q}$, on a $f(c_i) = 0$ et $\sum_{i=1} nf(c_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0.\frac{1}{n} = 0$. Dans le premier cas on a $limS(f, \Delta, \vec{c}) = 1$ et dans le second cas on a $limS(f, \Delta, \vec{c}) = 0$. La limite n'étant pas la même, elle n'existe pas et donc f n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Exercice 2.3 $M = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$ est une tribu car $\emptyset$ et $E \in M$. Le complémentaire de tout élément de M est dans M et toute reunion (finie ici puisque E est un ensemble fini) d'éléments de M est aussi dans M. $M = \{\emptyset, E, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ n'est pas une tribu car par exemple $\{a, b\} \in M$ mais son complémentaire qui est $\{c\}$ n'est pas dans M.

Exercice 2.5 M_1 et M_2 sont clairement des tribus sur E. On a $M_1 \cap M_2 = \{\emptyset, E\}$ qui est une tribu sur E. Par contre $M_1 \cup M_2 = \{\emptyset, E, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}\}$ qui n'est pas une tribu car par exemple $\{a\}$ et $\{b\}$ sont dans $M_1 \cup M_2$ mais leur reunion $\{a, b\}$ ne l'est pas.

Exercice 2.12 Soit $L = \{B \subset F / f^{-1}(B) \in M\}$. Montrons que L est une tribu sur F. On a $f^{-1}(\emptyset_F) = \emptyset_E \in M$. Donc $\emptyset_F \in L$. Soit $B \in L$ et donc $f^{-1}(B) \in M$. On a $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c \in M$ (M est une tribu). Donc $B^c \in L$. Soit $B_n \in L$ pour tout n. On a $f^{-1}(\cup B_n) = \cup f^{-1}(B_n) \in M$. Donc $\cup B_n \in L$. Ceci montre que L est une tribu sur F.

Exercice 2.14

1. Si $C = \{A\}$, on a $\sigma(C) = \{\emptyset, E, A, A^c\}$.
2. On a $P(F) = \{\emptyset, F, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \ldots\}$ et donc $f^{-}(P(F)) = \{\emptyset, E, \{0\}, \{-1, 1\}\}$. Ici on a utilisé le fait que $f^{-1}(\{0\}) = \{0\}$, $f^{-1}(\{1\}) = \{-1, 1\}$ et $f^{-1}(\{2, 3, 4\}) = \emptyset$. Si $C = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$, on vérifie facilement que $P(F) = \sigma(C)$. Donc $f^{-1}(P(F)) = f^{-1}(\sigma(C))$. On a $f^{-1}(C) = \{\emptyset, \{0\}, \{-1, 1\}\}$ et $\sigma(f^{-1}(C)) = \{\emptyset, E, \{0\}, \{1, -1\}\} = f^{-1}(\sigma(C))$.

Exercice 2.15

1. Soit $M_0 = \{A \cap E_0, A \in M\}$. On a $\emptyset = \emptyset \cap E_0$. Donc $\emptyset \in M_0$. Soit $B \in M_0$. Soit B^{c0} le complementaire de B dans E_0. On a $B = A \cap E_0$ avec $A \in M$ et donc $B^{c0} = A^c \cap E_c$ avec A^c le complémentaire de A dans E qui appartient à M puisque M est une tribu. Donc $B^{c0} \in M_0$. Soit (B_n) une famille dénombrable d'éléments de M_0. On a $B_n = A_n \cap E_0$

et donc $\cup B_n = \cup(A_n \cap E_0) = (\cup A_n) \cap E_0 \in M_0$ car $\cup A_n \in M$. Donc M_0 est une tribu sur E_0.

2. On $i^{-1}(M) = \{i^{-1}(A), A \in M\}$. Mais $i^{-1}(A) = \{x \in E_0/i(x) = x \in A\} = A \cap E_0$. Donc $i^{-1}(M) = M_0$.
3. Si $M = \sigma(C)$, alors $M_0 = i^{-1}(M) = i^{-1}(\sigma(C)) = \sigma(i^{-1}(C)) = \sigma(C_0)$ car $i^{-1}(C) = C_0$.

Exercice 2.16

1. C'est l'exercice 2.12.
2. Soit L une tribu sur F telle que $f : (E, M) \longrightarrow (F, L)$ soit mesurable. Donc $f^{-1}(B) \in M$ pour tout $B \in L$ et donc $L \subset f_*(M)$ par définition de cette dernière.

Exercice 3.2 Si $\mu(\emptyset) = 0$ alors $\mu(\emptyset) < +\infty$. Inversement supposons qu'il existe $A \in M$ tel que $\mu(A) < \infty$. Comme $A = A \cup \emptyset$, on a $\mu(A) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$ et donc $\mu(\emptyset) = \mu(A) - \mu(A) = 0$.

Exercice 3.4 Si $\mu(A) < +\infty$, on a $\mu(B) < +\infty$ puisque $B \subset A$. On a $A = B \cup (A - B)$ et la reunion est disjointe. Donc $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A - B)$. Ce qui donne $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$ ($\mu(A)$ et $\mu(B)$ sont finis et la différence a donc un sens).

Exercice 3.5 Soit μ la mesure de dénombrement sur $P(E)$. On a $\mu(\emptyset) = Card(\emptyset) = 0$. Soit (A_n) une famille dénombrable de parties de E disjointes deux à deux qu'on peut supposer non vides. La famille étant dénombrable (infinie), on a $\cup_n A_n$ infini et donc $Card(\cup_n A_n) = \infty = \sum_n Card(A_n)$.

Exercice 3.6 Montrons que $\{x\} \in B(\mathbb{R})$ de deux manières différentes. La plus simple est d'écrire $\{x\} = [x, x]$. L'intervalle $[x, x]$ appartient à $B(\mathbb{R})$ en tant que fermé de $\mathbb{R}$. La seconde méthode consiste à écrire $\{x\} = \cap_n]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}$. L'intersection étant dénombrable, c'est un élément de $B(\mathbb{R})$. Pour $\mathbb{N}$,on a

$$\mathbb{N} = \cup_{n \in \mathbb{N}} \{n\}$$

chaque $\{n\}$ est dans $B(\mathbb{R})$ et la reunion étant dénombrale on a bien $\mathbb{N} \in B(\mathbb{R})$. On fait la même chose pour $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Z}$. Enfin $\mathbb{R} \in B(\mathbb{R})$ par définition d'une tribu.

Exercice 3.7 Par définition on a $O = \cup_{x \in O}]x - \epsilon_x, x + \epsilon_x[$ pour tout ouvert O de $\mathbb{R}$. Tout ouvert est donc reunion d'intervalles ouverts. Le problèmle est de rendre cette reunion dénombrable. Pour cela utilisons la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Pour tout $a_i \in \mathbb{R}$ il existe une suite décroissante de nombres rationnels

$r_{n,i}$ qui converge vers a_i. De même pour tout b_i il existe une suite croissante de nombres rationnels $s_{n,i}$ qui converge vers b_i. On peut donc écrire

$$O = \cup_i]a_i, b_i[= \cup_{n,i}]r_{n,i}, s_{n,i}[$$

Posons

$$J = \{(r_{n,i}, s_{n,i}), i \in I, n \in \mathbb{N}\}$$

J est dénombrable car contenu dans $\mathbb{Q}^2$ qui est dénombrable. Donc

$$O = \cup_{(r,s)\in J}]r, s[$$

est la reunion est devenue dénombrable. Soit $C = \{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des intervalles ouverts dans $\mathbb{R}$. Comme $C \subset B(\mathbb{R})$, on $\sigma(C) \subset B(\mathbb{R})$. Inversement on a $B(\mathbb{R}) = \sigma(\text{Ouverts de } \mathbb{R})$. Or tout ouvert est reunion dénombrable d'intervalles ouverts et donc tout ouvert appartient à $\sigma(C)$ et donc $B(\mathbb{R}) \subset \sigma(C)$.

Exercice 3.8 Soit $C_1 = \{[a, b], a < b \in \mathbb{R}\}$. Tout intervalle fermé $[a, b]$ s'écrit

$$[a, b] = \{a\} \cup]a, b[\cup \{b\}$$

Chaque membre de cette réunion étant un élément de $B(\mathbb{R})$, on en déduit que $C_1 \subset B(\mathbb{R})$ et donc $\sigma(C_1) \subset B(\mathbb{R})$. Inversement comme $B(\mathbb{R}) = \sigma(C)$, il suffit d'exprimer un intervalle ouvert en termes d'intervalles fermés. Or on a :

$$]a, b[= \cup_n [a + \frac{1}{n}, b - \frac{1}{n}]$$

et donc $C \subset \sigma(C_1)$ et donc $B(\mathbb{R}) = \sigma(C) \subset \sigma(C_1)$. On procède de la même manière pour C_2

$$[a, b[= \{a\} \cup]a, b[$$

et

$$]a, b[= \cup_n [a + \frac{1}{n}, b[$$

Il est clair que $C_3 = \{] - \infty, a[, a \in \mathbb{R}\} \subset B(\mathbb{R})$ et donc $\sigma(C_3) \subset B(\mathbb{R})$. Inversement on peut écrire

$$[a, b[=] - \infty, b[\cup] - \infty, a[^c$$

et donc $C_2 \subset \sigma(C_3)$. Comme $B(\mathbb{R}) = \sigma(C_2)$, on en déduit que $B(\mathbb{R}) \subset \sigma(C_3)$.

Exercice 3.9 On a $\{x\} = [x, x]$, donc $\lambda(\{x\}) = x - x = 0$. Une autre manière de le voir est de remarquer que $\{x\} = \cap_n]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[= lim_n]x -$

$\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[$ (les intervalles ouverts sont décroissants et donc leur intersection est leur limite). En utilisant la propriété $\mu(lim_n A_n) = lim_n \mu(A_n)$, on a pour $\mu = \lambda$

$$\lambda(\{x\}) = lim_n \lambda(]x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n}[) = lim_n \frac{2}{n} = 0$$

On a $\mathbb{Q} = \cup_{q\in\mathbb{Q}}\{q\}$ La reunion étant disjointe on a

$$\lambda(\mathbb{Q}) = \sum_q \lambda(\{q\}) = \sum_q 0 = 0$$

Enfin on a $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$ et donc

$$\lambda(\mathbb{R}) = \infty - (-\infty) = \infty$$

Exercice 3.11 Si N est mesurable et $\mu(N) = 0$, alors elle est négligeable. En effet il suffit de prendre $A = N$. Inversement si N est mesurable négligeable alors il existe A mesurable tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Comme $N \subset A$ on a aussi $\mu(N) = 0$.

Exercice 3.12 Soit (N_n) une famille dénombrable de parties négligeables. Pour tout n il existe une partie mesurable A telle que $N_n \subset A_n$ et $\mu(A_n) = 0$. Donc $\cup_n N_n \subset \cup_n A_n = A$. A est une partie mesurable en tant que reunion dénombrable de parties mesurables. De plus on a $0 \leq \mu(A) \leq \sum_n \mu(A_n) = 0$ et donc $\mu(A) = 0$. Ceci montre que $\cup_n N_n$ est négligeable.

Exercice 3.15 Soient $B = A \cup N$ et $B = A^{'} \cup N^{'}$ deux écritures de B. Il faut montrer que $\mu(A) = \mu(A^{'})$. Soit A_1 une partie mesurable telle que $N \subset A_1$ et $\mu(A_1) = 0$. Donc $A^{'} \subset B \subset A \cup A_1$ et donc $\mu(A^{'}) \leq \mu(A \cup A_1) \leq \mu(A) + \mu(A_1) = \mu(A)$. En faisant le même raisonnement pour A, on obtient $\mu(A) \leq \mu(A^{'})$ et donc $\mu(A) = \mu(A^{'})$.

Exercice 3.16 On a $\emptyset = \emptyset + \emptyset$ et donc $\overline{\mu}(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$. Pour la deuxième propriété on utilise l'exercice 3.12 : la reunion dénombrable de parties négligeables est négligeable.

Exercice 3.18 Si N est μ-négligeable alors il existe $A \in M$ tel que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Il existe donc $B \in M_\mu$ tel que $N \subset B$ et $\overline{\mu}(B) = 0$. Il suffit de prendre $B = A$. Inversement soit $N^{'}$ une partie $\overline{\mu}$-négligeable. Il existe donc $B \in M_\mu$ tel que $N^{'} \subset B$ et $\overline{\mu}(B) = 0$. Ecrivons $B = A \cup N$ et soit $A^{'} \in M$ tel que $N \subset A^{'}$ et $\mu(A^{'}) = 0$. Donc $N^{'} \subset B \subset A \cup A^{'}$. Posons $A^{''} = A \cup A^{'}$. On a $N^{'} \subset A^{''}$ et $\mu(A^{''}) = 0$. Donc $N^{'}$ est μ-négligeable. On a $M \subset M_\mu$ et $L \subset M_\mu$. Donc $M \cup L \subset M_\mu$ et $\sigma(M \cup L) \subset M_\mu$. Inversement Soit $B = A \cup N$ un élément de M_μ. On a $A \in M$, donc $A \in M \cup L$ et donc

$A \in \sigma(M \cup L)$. De la même manière $N \in \sigma(M \cup L)$ et donc $B \in \sigma(M \cup L)$. Ceci montre que $M_\mu \subset \sigma(M \cup L)$. Si μ est complète alors par définition on a $M_\mu = M$ et donc $L \subset M_\mu = M$. Inversement si $L \subset M$, alors $M \cup L = M$ et $M_\mu = \sigma(M \cup L) = \sigma(M) = M$. Enfin on sait que $L \subset M_\mu$. Si $\overline{L}$ est l'ensemble des parties $\overline{\mu}$-négligeables, on sait que $L = \overline{L}$. Donc $\overline{L} \subset M_\mu$.

Exercice 4.2 C'est l'exercice 2.12.

Exercice 4.4 Utilisons $C = \{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}$. On a $\chi_A^{-1}(]a, b[) = \emptyset$ si $b \leq 0$, $\chi_A^{-1}(]a, b[) = A^c$ si $a < 0 < b \leq 1$, $\chi_A^{-1}(]a, b[) = A$ si $0 \leq a < 1 < b$, $\chi_A^{-1}(]a, b[) = E$ si $a > 1$ et $\chi_A^{-1}(]a, b[) = \emptyset$ si $1 \leq a$. Comme $\emptyset$ et $E \in M$ toujours, on en déduit que χ_A est mesurable si et seulement si A et $A^c \in M$, ce qui équivaut à $A \in M$. Faire C_1 à titre d'exercice 'dans l'exercice).

Exercice 4.5 Soit la fonction constante $f = 3$. On a $f^{-1}] - \infty, a[) = \emptyset$ si $a \leq 3$ et $f^{-1}(] - \infty, a[) = \mathbb{R}$ si $a > 3$. f est donc mesurable.

Exercice 4.6 Soient les applications (projections) $p : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ et $q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ données respectivement par $p((x, y)) = x$ et $q((x, y)) = y$. On a $p \circ h = f$ et $q \circ h = g$. Comme p et q sont continues et donc mesurables, on en déduit que f et g sont mesurables si h l'est. Montrons l'inverse. On a $B(\mathbb{R}^2) = \sigma(D)$ avec $D = \{[a, b]x[c, d], a < b, c < d\}$. Il suffit donc de montrer que $A = h^{-1}([a, b]x[c, d]) = \{x \in E/h(x) \in [a, b]x[c, d]\}$ est mesurable. Mais on a $A = \{x \in E/f(x) \in [a, b], g(x) \in [c, d]\} = f^{-1}([a, b]) \cap g^{-1}([c, d])$ et donc A est mesurable comme intersection de deux parties mesurables.

Exercice 4.8 Posons $f = supf_n$ et $g = inff_n$. On a $f^{-1}(] - \infty, a]) = \cap_n f_n^{-1}(] - \infty, a])$ et $g^{-1}(] - \infty, a[) = \cup_n f_n^{-1}(] - \infty, a[)$. Donc f et g sont mesurables si les f_n le sont. On conclut en remarquant que la limite sup est un inf et que la limite iinf est un sup.

Exercice 4.9 Posons $g_n = \sum_{i=1}^n \mid f_i \mid$. g_n est mesurable comme somme de fonctions mesurables et on a $g = lim_n g_n$. Donc g est mesurable.

Exercice 5.3 Une fonction constante a une seule valeur. Elle est donc étagée. D'aprés l'exercice 4.5, toute fonction constante est mesurable. Une fonction constante est donc simple.

Exercice 5.7 Soit f une fonction simple et soit A une partie mesurable. Si $f = \sum a_i \chi_{A_i}$, on a $\int_A f d\mu = \sum a_i \mu(A \cap A_i)$. Soit $g = f\chi_A$ définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = 0$ si $x \notin A$. Comme f, g ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Elle est donc étagée. Elle est mesurable et c'est donc une fonction simple. g s'écrit

$$g = \sum_i a_i \chi_{A \cap A_i} + 0\chi_{A^c}$$

et donc
$$\int_E g d\mu = \sum_i a_i \mu(A \cap A_i) = \int_A f d\mu$$

Exercice 5.9 On a $\int_A f d\lambda = 2\lambda(]-\infty,1]\cap A)+3\lambda(]1,2]\cap A)+4\lambda(]2,+\infty[\cap A) = 2.1+3.1+4.3 = 17$.

Exercice 5.10 On a $0 = 0.\chi_{\mathbb{R}}$ et donc $\int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = 0.\lambda(\mathbb{R}) = 0.\infty = 0$.

Exercice 5.11 $2f$ s'écrit $4\chi_{]-\infty,1]} + 6\chi_{]1,2]} + 8\chi_{]2,+\infty[}$ et donc $\int_{\mathbb{R}} 2f d\lambda = \infty = 2\infty = 2\int_{\mathbb{R}} f d\lambda$. g s'écrit $g = 5\chi_{]-\infty,0]} + 6\chi_{]0,+\infty[}$. Pour exprimer $f+g$ comme fonction étagée il faut trouver une partition commune dans laquelle on écrit f et g. Ce sera l'intersection des partitions de f et g.Posons

$$C_1 =]-\infty,1]\cap]-\infty,0] =]-\infty,0]$$

$$C_2 =]-\infty,1]\cap]0,+\infty[=]0,1]$$

$$C_3 =]1,2]\cap]-\infty,0] = \emptyset$$

$$C_4 =]1,2]\cap]0,+\infty[=]1,2]$$

$$C_5 =]2,+\infty[\cap]-\infty,0] = \emptyset$$

$$C_6 =]2,+\infty[\cap]0,+\infty[=]2,+\infty[$$

Dans cette nouvelle partition on a

$$f = 2\chi_{C_1} + 2\chi_{C_2} + 0\chi_{C_3} + 3\chi_{C_4} + 0\chi_{C_5} + 4\chi_{C_6}$$

$$g = 5\chi_{C_1} + 6\chi_{C_2} + 0\chi_{C_3} + 6\chi_{C_4} + 0\chi_{C_5} + 6\chi_{C_6}$$

et donc
$$f+g = 7\chi_{C_1} + 8\chi_{C_2} + 0\chi_{C_3} + 9\chi_{C_4} + 0\chi_{C_5} + 10\chi_{C_6}$$

et on vérifie facilement en utilisant la définition que

$$\int_{\mathbb{R}} (f+g) d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$$

Exercice 5.14 Il est clair que la suite h_n est croissante. Montrons qu'elle converge vers f. Si $f(x) = +\infty$, alors $h_n(x) = n$ pour tout $n \geq 1$ et donc $lim_n h_n(x) = +\infty = f(x)$. Si $f(x) \in \mathbb{R}$, alors il existe un i tel que $x \in E_{n,i}$ et $h_n(x) = \frac{i-1}{2^n}$. Donc $f(x) - h_n(x) < \frac{i}{2^n} - \frac{i-1}{2^n} = \frac{1}{2^n}$ qui tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc $lim_n h_n = f$.

Exercice 5.17 La première suite est positive décroissante. On ne peut donc pas lui appliquer le théorème de convergence monotone. Sa limite est 0. L'intégrale de la limite est donc 0 et la limite de l'intégrale est $+\infty$. Il n y a pas égalité. La seconde suite n'est pas monotone (elle n'est ni croissante ni décroissante). On ne peut pas lui appliquer non plus le théorème de convergence monotone. Sa limite est 0. L'intégrale de la limite est donc 0, mais la limite de l'intégrale est 1.

Exercice 5.19 Soit $h = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$. Il existe un j tel que $a \in A_j$ et $a \notin A_i$ pour tout $i \neq j$ et donc $h(a) = a_j$. On a donc $\int_E f d\delta_a = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta_a(A_i) = a_j \delta_a A_j = a_j = h(a)$. Si f est une fonction positive mesurable, on sait qu'il existe une suite croissante de fonctions simples positives h_n avec $lim_n h_n = f$ et donc $f(a) = lim_n h_n(a)$. Par le théorème de convergence monotone, on a $\int_E f d\delta_a = lim_n \int_E h_n d\delta_a = lim_n h_n(a) = f(a)$.

Exercice 5.21 Par définition A est intégrable si et seulement si A est mesurable et $\int E \chi_A d\mu < +\infty$ (remarquer que la foncrion caractéristique χ_A est positive). Mais $\chi_A = 1.\chi_A + 0.\chi_{A^c}$ et donc $\int_E \chi_A d\mu = 1.\mu(A) + 0.\mu(A^c) = \mu(A)$. Donc A est intégrable si et seulement si A est mesurable et $\mu(A) < \infty$.

Exercice 5.24 On a $\mid \int_E f d\mu \mid = \mid \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \mid \leq \int_E f^+ d\mu + \int_E f^- d\mu = \int_E (f^+ + f^-) d\mu = \int_E \mid f \mid d\mu$.

Exercice 5.26 Posons $N = \{x \in E / \mid f(x) \mid = +\infty\}$ et $N_n = \{x \in E / \mid f(x) \mid \geq n\}$. N et N_n sont des parties mesurables et $N = \cap_n N_n = lim_n N_n$ (remarquer que les N_n sont décroissants). Par définition des N_n, on a $n\chi_{N_n} \leq \mid f \mid$. Donc $n\mu(N_n) = \int_E n\chi_{N_n} d\mu \leq \int_E \mid f \mid d\mu = c < +\infty$ (f intégrable). Donc $\mu(N_n) \leq \frac{c}{n}$ et $\mu(N) = lim_n \mu(N_n) = 0$. N est donc bien une partie négligeable.

Exercice 5.28 Le problème se pose au niveau de l'addition. Dans la classe de f, il ya une fonction f' qui ne prend que des valeurs finies et dans la classe de g li y a une fonction g' qui ne prend aussi que des valeurs finies et donc $f' + g'$ est bien définie. On l'utilise pour la somme

$$\overline{f} + \overline{g} = \overline{f' + g'}$$

Exercice 5.33 Munissons $[0,1]$ de la tribu induite de celle de $\mathbb{R}$ et de la mesure de Lebesgue induite. Les parties mesurables de $[0,1]$ sont donc les $A \cap [0,1]$ avec A une partie mesurable de $\mathbb{R}$. f s'écrit $f = 1.\chi_{\mathbb{Q}\cap[0,1]} + 0.\chi_{\mathbb{Q}^c\cap[0,1]}$. C'est donc une fonction simple positive sur $E = [0,1]$. Son intégrale est

$$\int_{[0,1]} f d\lambda = 1.\lambda(\mathbb{Q} \cap [0,1]) + 0.\lambda(\mathbb{Q}^c \cap [0,1]) = 1.0 + 0.\infty = 0$$