Chapitre 1

Motivation

Soit f une fonction numérique

$$f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$$

définie sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Soit $x_0 = a, x_1, x_2, \ldots, x_n = b$ une subdivision Δ de l'intervalle $[a, b]$. On pose

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

et

$$\Delta x = max_i \Delta x_i$$

On choisit des points $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ et on forme la somme de Riemann

$$S(f, \Delta, \vec{c}) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

qui dépend de la subdivision Δ et du vecteur $\vec{c} = (c_1, \ldots, c_n)$.

Définition 1.1. *La fonction f est Riemann intégrable si $lim_{\Delta x \to 0} S(f, \Delta, \vec{c})$ existe et est indépendante de la subdivision Δ et du choix des c_i.*

On pose alors

$$\int_a^b f(x)dx = lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \Delta x_i$$

et on montre dans le cours d'analyse que cette intégrale vaut $F(b) - F(a)$ pour toute primitive F de f ($F^{'} = f$).

On peut citer plusieurs manquements à cette définition de l'intégrale. Les plus importants sont les suivants :

1. Il y a beaucoup de fonctions numériques importantes qui ne sont pas intégrables au sens de Riemann.

   Exercice 1.2. *Soit la fonction* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *donnée par* $f(x) = 1$ *si* $x \in \mathbb{Q}$ *et* $f(x) = 0$ *si* $x \notin \mathbb{Q}$. *Montrer que* f *n'est pas intégrable au sens de Riemann.*

2. Pour une suite de fonctions f_n convergeant simplement vers la fonction f, on aimerait avoir

$$lim_n \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b lim_n f_n(x)dx$$

   ce qui n'est pas le cas de l'intégrale de Riemann.

3. L'intégrale de Riemann n'est valable que pour des fonctions numériques $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour des fonctions ou applications entre des espaces plus généraux, la définition ne s'applique pas.

On a donc besoin d'une nouvelle théorie de l'intégration qui généralise l'intégrale de Riemann et qui résoud les problèmes précédents. L'objectif de ce cours est de présenter une telle théorie. C'est la théorie de l'intégration fondée par Lebesgue, Borel et d'autres aux alentours des années 1900.

Chapitre 2

Espaces Mesurables

2.1 Définition

Soit E un ensemble quelconque et soit $P(E)$ l'ensemble de ses parties. Soit M une partie de $P(E)$. Les éléments de M sont donc des parties de E.

Définition 2.1. *M est appelée tribu ou σ-algèbre si les propriétés suivantes sont verifiées :*

1. *$\emptyset \in M$*
2. *Si $A \in M$ alors $A^c \in M$ avec A^c le complémentaire de A dans E*
3. *Pour toute famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, si $A_n \in M$ pour tout n alors $\cup_n A_n$ est aussi dans M*

Un ensemble I est dit dénombrable s'il existe une bijection

$$\phi : I \longrightarrow \mathbb{N}$$

Ains chaque élément $i \in I$ a un numéro $\phi(i)$. Par exemple $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont dénombrables. Par contre $\mathbb{R}$ ne l'est pas. Une famille $(A_i)_{i\in I}$ est dénombrable si l'ensemble des indices I est dénombrable.

La troisième propriéte de la définition concerne les familles dénombrables, en particulier infinies. Elle reste valable pour des familles finies $A_1, A_2, \ldots, A_n$. En effet il suffit de transformer la famille finie en une famille infinie dénombrable en posant $A_i = \emptyset$ pour tout $i > n$. La reunion de la famille finie est alors égale à la reunion de la famille infinie.

Exemple 2.2. – *$M = \{\emptyset, E\}$ est une tribu sur E. C'est la plus petite (pour l'ordre d'inclusion) tribu sur E. On l'appelle la tribu grossière ou triviale sur E.*
– *$M = P(E)$ est une tribu sur E. C'est la plus grande tribu sur E. On l'appelle la tribu discrète sur E. Discrète car $\{x\} \in M$ pour tout $x \in E$.*

Exercice 2.3. *Soit $E = \{a, b, c\}$ Montrer que $M = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$ est une tribu sur E mais que $M = \{\emptyset, E, \{a, b\}, \{b, c\}\}$ ne l'est pas.*

Si M est une tribu sur E, alors par complémentarité on a $E \in M$ et l'intersection de toute famille finie ou dénombrable d'éléments de M est aussi dans M. De même si $A, B \in M$, alors $A - B = A \cap B^c$ est aussi dans M.

Définition 2.4. *Un espace mesurable est un couple (E, M) formé d'un ensemble E et d'une tribu M sur E. Les éléments de M sont les parties mesurables de E.*

2.2 Tribu engendrée

Sur un même ensemble E on peut définir plusieurs tribus. L'intersection de toute famille $(M_i)_{i \in I}$ (finie ou infinie) de tribus sur E est aussi une tribu sur E. En effet $\emptyset \in M_i$ pour tout i et donc $\emptyset \in \cap_i M_i$. De même si $A \in \cap_i M_i$ alors $A \in M_i$ pour tout i et donc $A^c \in M_i$ pour tout i ce qui donne $A^c \in \cap_i M_i$. Enfin si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dénombrable avec $A_n \in \cap_i M_i$, alors $A_n \in M_i$ pour tout i et donc $\cup_n A_n \in M_i$ pour tout i. Donc $\cup_n A_n \in \cap_i M_i$. En général la reunion de tribus sur E n'est pas une tribu sur E.

Exercice 2.5. *Soit $E = \{a, b, c\}$ et soient $M_1 = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$ et $M_2 = \{\emptyset, E, \{b\}, \{a, c\}\}$. Veifier que M_1 et M_2 sont des tribus sur E. Montrer que $M_1 \cap M_2$ est une tribu sur E mais que $M_1 \cup M_2$ ne l'est pas.*

Définition 2.6. *Soit $C \subset P(E)$ une partie de $P(E)$. La tribu engendrée par C est la plus petite (au sens de l'inclusion) tribu contenant C. De manière équivalente, c'est l'intersection de toutes les tribus contenant C. On la note $\sigma(C)$:*

$$\sigma(C) = \cap_{C \subset M} M$$

Un exemple trés important est celui où l'ensemble E est un espace topologique, c'est à dire un ensemble E muni d'une topologie $T \subset P(E)$. La tribu

$\sigma(T)$ engendrée par la topologie T est appelée la tribu borélienne de E. On la note $B(E)$. Les éléments de $\sigma(T)$ sont les boréliens de E. Par définition tout ouvert de E est un borélien de E et par complémentarité tout fermé l'est aussi.

Exemple 2.7. *Soit $E = \mathbb{R}$ muni de sa toplogie euclidienne. $O \subset \mathbb{R}$ est un ouvert si pour tout $x \in E$, il existe un $\epsilon > 0$ tel que $]x - \epsilon, x + \epsilon[\subset O$. Tout intervalle ouvet $]a, b[$ est un ouvert mais il exite beaucoup d'ouverts qui ne sont pas des intervalles ouverts, par exemple $O =]1, 2[\cup]3, 4[$. La tribu borélienne $B(\mathbb{R})$ est trés importante et va jouer un grand rôle dans notre cours. De la même manière on peut définir la tribu borélienne $B(\mathbb{R}^n)$ de $\mathbb{R}^n$ pour tout n.*

2.3 Applications Mesurables

Soient $(E, M), (F, N)$ deux espaces mesurables et soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

Définition 2.8. *L'application f est dite mesurable si$f^{-1}(B) \in M$ pour tout $b \in N$. ($f^{-1}(B) = \{x \in E/f(x) \in B\}$).*

Soit $f : E \longrightarrow (F, N)$. Posons $M = f^{-1}(N) = \{f^{-1}(B), B \in N\}$. On a alors

Proposition 2.9. *M est une tribu sur E. De plus c'est la plus petite tribu M qui rend l'application $f : (E, M) \longrightarrow (F, N)$ mesurable.*

Preuve. Montrons d'abord que M est une tribu. On a $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$. Donc $\emptyset \in M = f^{-1}(N)$. Soit $A \in M$. Alors il existe $B \in N$ tel que $A = f^{-1}(B)$. Donc $A^c = (f^{-1}(B))^c = f^{-1}(B^c) \in M$ (car $B^c \in N$). Soit (A_n) une famille dénombrable d'éléments de M. Pour tout n il existe $B_n \in N$ tel que $A_n = f^{-1}(B_n)$. Donc $\cup A_n = \cup f^{-1}(B_n) = f^{-1}(\cup B_n) \in M$ (car $\cup B_n \in N$). M est donc bien une tribu. La deuxième assertion veut dire que si $f : (E, L) \longrightarrow (F, N)$ est mesurable alors $M \subset L$. Ceci découle directement de la définition de M et d'une application mesurable. □

Définition 2.10. *$M = f^{-1}(N)$ est la tribu sur E engendrée par f ou encore la tribu image inverse de N par f.*

Proposition 2.11. *Soit $f : (E, M) \longrightarrow (F, N)$ avec $N = \sigma(C)$ et $C \subset P(F)$. Alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in M$ pour tout $B \in C$.*

Preuve. Si f est mesurable, alors $f^{-1}(B) \in M$ pour tout $B \in C$ car $C \subset N$. Inversement supposons que $f^{-1}(B) \in M$ pour tout $B \in C$. Posons $L = \{B \subset F / f^{-1}(B) \in M\}$. On verifie facilement que L est une tribu sur F et $C \subset L$. Donc $N = \sigma(C) \subset L$ et donc f est mesurable. □

Exercice 2.12. *Montrer que L dans la preuve de la proposition est une tribu sur F*

Cette proposition nous permet d'avoir deux résultats trés importants.

Corollaire 2.13. *Soit $f : E \longrightarrow (F, N)$ avec $N = \sigma(C)$. Alors on a $f^{-1}(\sigma(C)) = \sigma(f^{-1}(C))$.*

Preuve. On a $f^{-1}(C) \subset f^{-1}(\sigma(C))$, donc $\sigma(f^{-1}(C)) \subset f^{-1}(\sigma(C))$ par définition d'une tribu engendrée. Inversement d'aprés la proposition précédente on a

$$f : (E, \sigma(f^{-1}(C))) \longrightarrow (F, \sigma(C))$$

est mesurable car $f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(C))$ pour tout $B \in C$. Donc $f^{-1}(\sigma(C)) \subset \sigma(f^{-1}(C))$. □

Exercice 2.14.
1. *Soit E un ensemble et soit $A \subset E$. Determiner $\sigma(C)$ avec $C = \{A\}$.*
2. *Soient $E = \{-1, 0, 1\}$ et $F = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Soit $f : E \longrightarrow F$ donnée par $f(x) = x^2$. Determiner $f^{-1}(P(F))$. Verifier que $P(F) = \sigma(C)$ avec $C = \{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}\}$ et que $f^{-1}(\sigma(C)) = \sigma(f^{-1}(C))$.*

Exercice 2.15. *Soit (E, M) un espace mesurable et soit $E_0 \subset E$.*
1. *Montrer que $M_0 = \{A \cap E_0, A \in M\}$ est une tribu sur E_0.*
2. *Soit $i : E_0 \longrightarrow E$ l'injection canonique. Montrer que $i^{-1}(M) = M_0$.*
3. *En déduire que si $M = \sigma(C)$ avec $C \subset P(E)$, alors $M_0 = \sigma(C_0)$ avec $C_0 = \{A \cap E_0, A \in C\}$.*

Exercice 2.16.
1. *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application avec (E, M) un espace mesurable. Montrer que $f_*(M) = \{B \subset F / f^{-1}(B) \in M\}$ est une tribu sur F.*
2. *Monter que $f_*(M)$ est la plus grande tribu sur F qui rend f mesurable.*

Corollaire 2.17. *Soient E et F deux espaces toplogiques munis de leurs tribus boréliennes $B(E)$ et $B(F)$. Alors toute application continue $f : E \longrightarrow F$ est une application mesurable $f : (E, B(E)) \longrightarrow (F, B(F))$.*

Preuve. On a $B(F) = \sigma$(ouvets de F). Comme f est continue, on a f^{-1}(ouvert de F)= ouvert de E et donc appartient à $B(E)$. Il suffit alors d'appliquer la proposition. $\square$

Chapitre 3

Espaces Mesurés

3.1 Définition

Soit (E, M) un espace mesurable.

Définition 3.1. *Une mesure (positive) sur M est une fonction*

$$\mu : M \longrightarrow [0, +\infty]$$

qui vérifie les deux propriétés suivantes :

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. $\mu(\cup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ *pour toute suite (A_n) de parties mesurables deux à deux disjointes.*

Si $\mu(E) < \infty$, la mesure est dite finie. Si $\mu(E) = 1$, c'est une mesure de probabilités. La condition $\mu(\emptyset) = 0$ est là pour éviter le cas particulier d'une mesure partuout infinie comme le montre l'exercice suivant :

Exercice 3.2. *Montrer que $\mu(\emptyset) = 0$ si et seulement si il existe $A \in M$ tel que $\mu(A) < \infty$.*

Définition 3.3. *On appelle espace mesuré tout triplet (E, M, μ) formé d'un espace mesurable (E, M) et d'une mesure μ sur M. Si $\mu(E) = 1$, l'espace mesuré est un espace de probabilités.*

3.2 Propriétés

Soit (E, M, μ) un espace mesuré. Nous établissons ici quelques propriétés concernant la mesure μ. La première propriété exprime la croissance de la mesure. Soient $A, B \in M$ avec $B \subset A$. On a alors

$$\mu(B) \leq \mu(A)$$

. En effet on a $A = (A - B) \cup B$ et la reunion est disjointe. Donc $\mu(A) = \mu(B) + \mu(A - B)$. Comme la mesure μ est positive on en déduit que $\mu(B) \leq \mu(A)$. Remarquer que l'égalité est possible.

Exercice 3.4. *Si $\mu(A) < \infty$, montrer que $\mu(A - B) = \mu(A) - \mu(B)$*

La seconde propriété exprime la sous-additivité de la mesure. Soient $A_0, A_1, \ldots$ des parties mesurables (pas forcément disjointes deux à deux). Alors on a

$$\mu(\cup_n A_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$$

En effet posons $B_k = A_k - \cup_{0 \leq i \leq k-1} A_i$ (avec $B_0 = A_0$). Les parties $B_0, B_1, \ldots$ sont mesurables et deux à deux disjointes. Remarquer que la reunion des B_n est égale à la reunin des A_n. On a donc $\mu(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n) \leq \sum_n \mu(A_n)$ puisque $\mu(B_n) \leq \mu(A_n)$ $(B_n \subset A_n)$.

La troisième propriété concerne la mesure d'une reunion croissante de parties mesurables. Soient $A_0, A_1, \ldots$ des parties mesurables avec $A_0 \subset A_1 \subset \ldots$. La reunion des A_n est donc $lim_n A_n$. On a alors

$$\mu(\cup_n A_n) = \mu(lim_n A_n) = lim_n \mu(A_n)$$

En effet posons $B_k = A_k - A_{k-1}$ pour $k \geq 1$ $(B_0 = A_0)$. Les B_n sont deux à deux disjoints et ont même reunion que les A_n. Donc $\mu(\cup_n A_n) = \mu(\cup_n B_n) = \sum_n \mu(B_n) = lim_n \sum_{k=0}^n \mu(B_k) = lim_n \mu(A_n)$ (Remarquer que $A_n = \cup_{k=0}^n B_k$ et donc $\mu(A_n) = \sum_{k=0}^n \mu(B_k)$)

La dernière propriété concerne la mesure d'une intersection décroissante de parties mesurables. Soient $A_0, A_1, \ldots$ des parties mesurables avec $\ldots \subset A_1 \subset A_0$. L'intersection des A_n est donc leur limite $lim_n A_n$. Alors on a

$$\mu(\cap_n A_n) = \mu(lim_n A_n) = lim_n \mu(A_n)$$

En effet posons $B_k = A_k - A_{k+1}$. Les B_k sont des parties mesurables deux à deux disjointes et on a $\cap_k A_k = A_0 - \cup_k B_k$. Donc $\mu(\cap_n A_n) = \mu(A_0) - \mu(\cup_n B_n) = \mu(A_0) - \sum_n \mu(B_n) = \mu(A_0) - lim_n \sum_{k=0}^n (B_k) = lim_n(\mu(A_0) - \sum_{k=0}^n \mu(B_k)) = lim_n \mu(A_{n+1}) = lim_n \mu(A_n)$.

3.3 Exemples

1. Soit E un ensemble quelconque. Prenons $M = P(E)$ et pour toute partie A de E, on pose $\mu(A) = Card(A)$ si A est fini et $\mu(A) = \infty$ sinon. C'est une mesure positive sur $P(E)$ (La mesure de dénombrement).

   Exercice 3.5. *Le vérifier.*

2. Soit E un ensemble quelconque et soit $a \in E$. On prend $M = P(E)$ et pour toute partie A de E, on définit $\mu = \delta_a$ en posant $\delta_a(A) = 1$ si $a \in A$ et $\delta_a(A) = 0$ sinon. Vérifions que c'est une mesure sur $P(E)$. On a $\delta_a(\emptyset) = 0$ car $a \notin \emptyset$. Soit (A_n) une famille de parties de E disjointes deux à deux. On a soit $a \in \cup_n A_n$, soit $a \notin \cup_n A_n$. Dans le premier cas il existe un seul m tel que $a \in A_m$ (car les parties A_n sont disjointes). On a alors $\delta_a(\cup_n A_n) = 1 = \sum_n \delta_a(A_n)$. Dans le second cas $a \notin A_n$ pour tout n et donc $\delta_a(\cup_n A_n) = 0 = \sum_n \delta_n(A_n)$. La mesure δ_a est appelée la mesure de DIrac au point a.

3. Soit E un ensemble fini. Sur $M = P(E)$ définissons $\mu(A) = \frac{Card(A)}{Card(E)}$. C'est une mesure de probabilités sur $P(E)$.

4. Soit (E, M, μ) un espace mesuré et soit $A \in M$ une partie mesurable. Posons $M_A = \{Z \in M/Z \subset A\}$. C'est une tribu sur A. La mesure μ induit une mesure μ_A sur M_A donnée par $\mu_A(Z) = \mu(Z)$ pour tout $Z \in M_A$. μ_A est la mesure induite par μ.

5. **Mesure de Lebesgue**. On munit $\mathbb{R}$ de sa topologie euclidienne. Dans cette topologie, un ouvert est une partie $O \subset \mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in O$ il existe $\epsilon_x > 0$ avec $]x-\epsilon_x, x+\epsilon_x[\subset O$. Par exemple tout intervalle ouvert $]a, b[$ est un ouvert, mais il existe beaucoup d'ouverts qui ne sont pas des intervalles ouverts (par exemple $]1, 2[\cup]3, 4[$). Rappelons que la tribu borélienne $B(\mathbb{R})$ de $\mathbb{R}$ est la tribu engendrée par la topologie de $\mathbb{R}$.

   Exercice 3.6. *Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,on a $\{x\} \in B(\mathbb{R})$. En déduire que $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est-il un borélien de $\mathbb{R}$?*

   Par définition tout ouvert est reunion (quelconque) d'intervalles ouverts. En effet on peut écrire

   $$O = \cup_{x \in O}]x - \epsilon_x, x + \epsilon_x[$$

   Mais on a plus comme le montre l'exercice suivant.

Exercice 3.7. *Montrer que tout ouvert est reunion* ***dénombrable*** *d'intervalles ouverts. En déduire que la tribu borélienne de* $\mathbb{R}$ *est engendrée par les intervalles ouverts.*

Donc si on pose $C = \{]a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}$, on a

$$B(\mathbb{R}) = \sigma(C)$$

En fait pour tout ce qui concerne la tribu borélienne $B(\mathbb{R})$, que les intervalles soient ouverts ou fermés n'est pas trés important. En effet on a :

Exercice 3.8. *Posons* $C_1 = \{[a, b], a < b \in \mathbb{R}\}$*,* $C_2 = \{[a, b[, a < b \in \mathbb{R}\}$*,*$C_3 = \{] - \infty, a[, a \in \mathbb{R}\}$*. Montrer que* $B(\mathbb{R}) = \sigma(C_1) = \sigma(C_2) = \sigma(C_3)$*.*

Pour connaitre une mesure sur $B(\mathbb{R})$, il suffit donc de la connaitre sur les intervalles ouverts (ou fermés, ce n'est pas trés important). La mesure de Lebesgue λ sur $\mathbb{R}$ est alors définie par

$$\lambda(]a, b[) = \lambda([a, b]) = b - a$$

Connaissant λ sur les intervalles, il est possible de la connaitre pour tout autre borélien en utilisant les propriétés d'une mesure.

Exercice 3.9. *Calculer* $\lambda(\{x\}), \lambda(\mathbb{Q})$ *et* $\lambda(\mathbb{R})$*.*

3.4 Completion d'une mesure

Soit (E, M, μ) un espace mesuré.

Définition 3.10. *Une partie* N *de* E *est dite negligeable (par rapport à la mesure* μ*) s'il existe une partie* A *mesurable telle que* $N \subset A$ *et* $\mu(A) = 0$*.*

Exercice 3.11. *Montrer qu'une partie* N *mesurable est negligeable si et seulement si* $\mu(N) = 0$*.*

Une partie est donc negligeable si elle est mesurable de mesure nulle ou contenue dans une partie mesurable de mesure nulle. Par exemple l'ensemble vide $\emptyset$ est negligeable puisque $\mu(\emptyset) = 0$.

Exercice 3.12. *Montrer que toute reunion dénombrable de parties negligeables est negligeable.*

Définition 3.13. *Une partie B de E est dite μ-mesurable si on peut l'écrire*

$$B = A \cup N$$

avec A une partie mesurable et B une partie negligeable. M_μ est l'ensemble des parties μ-mesurables.

Remarquer que $M \subset M_\mu$ puisque toute partie mesurable A s'écrit $A = A \cup \emptyset$ et $\emptyset$ est une partie negligeable.

Proposition 3.14. *M_μ est une tribu sur E.*

Preuve. Il est clair que $\emptyset \in M_\mu$. Soit $B \in M_\mu$. B s'écrit donc $B = A \cup N$ avec A une partie mesurable et N une partie negligeable. Donc $B^c = (A \cup N)^c = A^c \cap N^c = A^c \cap (Z^c \cup (Z - N)) = (A^c \cap Z^c) \cup (A^c \cap (Z - N)) = (A \cup Z)^c \cup (A^c \cap (Z - N))$ avec Z la partie mesurable telle que $N \subset Z$ et $\mu(Z) = 0$. Or $(A \cup Z)^c \in M$ car $A \cup Z \in M$ et on a $A^c \cap (Z - N) \subset Z$ et $\mu(Z) = 0$. Autrement dit $A^c \cap (Z - N)$ est negligeable. Donc $B^c \in M_\mu$. Soit (B_n) une famille de parties μ-mesurables. Chaque B_n s'écrit $B_n = A_n \cup N_n$. Donc $\cup_n B_n = \cup_n (A_n \cup N_n) = \cup_n A_n \cup \cup_n N_n$. $\cup_n A_n$ est mesurable et $\cup_n N_n$ est negligeable. Donc $\cup_n B_n$ est μ-mesurable. $\square$

La mesure μ sur M permet de définir une mesure $\overline{\mu}$ sur M_μ en posant

$$\overline{\mu}(B) = \mu(A)$$

si $B = A \cup N$.

Exercice 3.15. *Verifier que $\overline{\mu}$ est bien définie (elle ne dépend pas de l'écriture de B).*

Exercice 3.16. *Montrer que $\overline{\mu}$ est une mesure sur M_μ.*

Remarquer que sur M, on a $\overline{\mu} = \mu$.

Définition 3.17. *$\overline{\mu}$ est la completée de la mesure μ. Une mesure est dite complète si $M_\mu = M$ (et donc $\overline{\mu} = \mu$).*

L'exercice suivant montre qu'un espace mesuré est complet si et seulement si toute partie negligeable est mesurable. Il est donc beaucoup plus agréable de travailler dans un espace mesuré complet puisque dans ce genre d'espaces les parties negligeables sont facilement identifiables : ce sont les parties mesurables de mesure nulle.

Exercice 3.18. *Soit (E, M, μ) un espace mesuré et soit $(E, M_\mu, \overline{\mu})$ son complété.*

1. *Montrer que l'ensemble des parties μ-negligeables est égal à l'ensemble des parties $\overline{\mu}$-negligeables.*
2. *Montrer que $M_\mu = \sigma(M \cup L)$ avec L l'ensemble des parties μ-negligeables.*
3. *montre que μ est complète si et seulement si toute partie negligeable est mesurable.*
4. *Montrer que $\overline{\mu}$ est complète.*

Chapitre 4

Fonctions Mesurables

4.1 Caractérisation

Si (E, M) et (F, N) sont deux espaces mesurables, une application $f : E \longrightarrow F$ est mesurable (par rapport aux tribus M et N) si $f^{-1}(B) \in M$ pour tout $B \in N$. Si N est une tribu engendrée on peut encore être plus précis :

Proposition 4.1. *Si $N = \sigma(C)$, alors f est mesurable si et seulement si $f^{-1}(B) \in M$ pour tout $B \in C$.*

Preuve. Si f est mesurable alors $f^{-1}(B) \in M$ pour tout $B \in C$ car $C \subset N$. Inversement supposons que $f^{-1}(B) \in M$ pour tout $B \in C$. Posons $L = \{B \subset F / f^{-1}(B) \in M\}$. L est une tribu qui contient C et donc contient N. Ceci montre que f est mesurable. $\square$

Exercice 4.2. *Montrer que L dans la preuve est une tribu sur F qui contient C.*

La proposition précédente est trés pratique pour montrer qu'une application est mesurable. On l'utilise le plus souvent dans le cas de fonctions $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ avec $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $B(\mathbb{R})$. On sait par exemple que $B(\mathbb{R}) = \sigma(C_3)$ avec $C_3 = \{]-\infty, a[, a \in \mathbb{R}\}$. Pour montrer que f est mesurable il suffit donc de montrer que $f^{-1}(]-\infty, a[) \in M$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

Exemple 4.3. *Soit (E, M) un espace mesurable et soit A une partie quelconque de E. On définit la fonction caractéristique de A comme etant la fonction $\chi_A : E \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $\chi_A(x) = 1$ si $x \in A$ et $\chi_A(x) = 0$ si $x \notin A$.*

On veut savoir si χ_A *est mesurable (* $\mathbb{R}$ *etant muni de sa tribu borélienne* $B(\mathbb{R})$*). Il nous faut donc determiner* $\chi_A^{-1}(]-\infty, a[) = \{x \in E / \chi_A(x) < a\}$ *pour* $a \in \mathbb{R}$*. Si* $a \leq 0$*, on a* $\chi_A^{-1}(]-\infty, a[) = \emptyset$*. Si* $0 < a \leq 1$*, on a* $\chi_A^{-1}(]-\infty, a[) = A^c$*. Si* $a > 1$*, on a* $\chi_A^{-1}(]-\infty, a[) = E$*. L'ensemble vide* $\emptyset$ *et* E *sont toujours dans* M*. Donc* χ_A *est mesurable si et seulement* $A^c \in M$*, ce qui équivaut à* $A \in M$ *puisque* M *est une tribu.*

Exercice 4.4. *Faire la même chose en utilisant* $B(\mathbb{R}) = \sigma(C)$ *et* $B(\mathbb{R}) = \sigma(C_1)$*.*

Exercice 4.5. *Montrer que l'application constante* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *avec* $f(x) = 3$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *est mesurable.*

4.2 Composition

Soient $f : (E, M) \longrightarrow (F, N)$ et $g : (F, N) \longrightarrow (G, L)$ deux applications entre espaces mesurables. Si f et g sont mesurables alors $g \circ f$ est aussi mesurable. En effet soit C dans L. On a $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$. Comme g est mesurable, $g^{-1}(C) \in N$ et comme f est mesurable on a $f^{-1}(g^{-1}(C)) \in M$. Par exemple soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Comme la fonction valeur absolue $\mid . \mid : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue, elle est mesurable quand on munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne. La composée $\mid . \mid \circ f$ est la valeur absolue $\mid f \mid$ de f. Donc si f est mesurable, $\mid f \mid$ est aussi mesurable.

Pour toute fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, posons $f^+ = sup(f, 0)$ et $f^- = sup(-f, 0)$. De même définissons $\alpha_+(x) = sup(x, 0)$ et $\alpha_-(x) = sup(-x, 0)$ pour $x \in \mathbb{R}$. On a

$$\alpha_+(x) - \alpha_-(x) = x$$

$$\alpha_+(x) + \alpha_-(x) = \mid x \mid$$

$$f^+ = \alpha_+ \circ f$$

$$f^- = \alpha_- \circ f$$

Ce qui nous donne

$$f = f^+ - f^-$$

et

$$\mid f \mid = f^+ + f^-$$

Remarquer que f^+ et f^- sont des fonctions positives. Elles sont mesurables si f l'est (α_+ et α_- sont continues donc mesurables comme fonctions sur $\mathbb{R}$).

Toute fonction f s'écrit donc comme différence de deux fonctions positives f^+ et f^-. C'est la décomposition canonique de f. Remarquer aussi que $f^+ \leq\mid f \mid$ et $f^- \leq\mid f \mid$.

4.3 Opérations

Dans cette section nous allons montrer que la somme et le produit de deux fonctions mesurables sont mesurables et que la limite d'une suite de fonctions mesurables est mesurable.

Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions sur un espace mesuré E. On peut les combiner en une fonction $h : E \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $h(x) = (f(x), g(x))$. On munit $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ de leurs tribus boréliennes respectives.

Exercice 4.6. *Montrer que h est mesurable si et seulement si f et g sont mesurables.*

Comme conséquence de cet exercice on obtient le resultat suivant :

Proposition 4.7. *Si f et g sont mesurables, alors $f + g$ et $f.g$ sont aussi mesurables.*

Preuve. $f + g$ est la composée de h et de la fonction $+ : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $+((x, y)) = x + y$ qui est mesurable car continue. De même $f.g$ est la composée de h avec la multiplication $. : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ qui est aussi mesurable car continue. Donc $f + g$ et $f.g$ sont mesurables comme composées de deux fonctions mesurables. □

Soit maintenant (f_n) une suite de fonctions $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Une fonction f est dite limite (simple) de la suite (f_n) si pour tout $x \in E$, la suite numérique $(f_n(x))$ converge vers $f(x)$. A partir de la suite (f_n) on peut définir les fonctions $sup_n f_n$, $inf_n f_n$, $limsup_n f_n$ et $liminf_n f_n$. Rappelons que si u_n est une suite quelconque, on a $limsup_n u_n = lim_n v_n = inf_n v_n$ et $liminf_n u_n = lim_n w_n = sup_n w_n$ avec v_n et w_n les suites définies par $v_n = sup\{u_k, k \geq n\}$ et $w_n = inf\{u_k, k \geq n\}$. Remarquer que v_n est décroissante et w_n est croissante (et donc $lim v_n = inf v_n$ et $lim w_n = sup w_n$). Si la suite u_n est convergente on a $lim u_n = limsup u_n = liminf u_n$.

Exercice 4.8. *Si les fonctions f_n sont mesurables, montrer que $sup f_n$, $inf f_n$, $limsup f_n$ et $liminf f_n$ sont aussi mesurables.*

Cet exercice montre que si la suite (f_n) de fonctions mesurables converge simplement vers la fonction f, alors f est aussi mesurable. En effet on a dans ce cas $f = limsup f_n = liminf f_n$.

Exercice 4.9. *Soit (f_n) une suite de fonctions mesurables $f_n : E \longrightarrow \mathbb{R}$. Montrer que $g = \sum_n \mid f_n \mid$ est mesurable.*

Chapitre 5

Fonctions Intégrables

5.1 Intégrale d'une fonction simple positive

Soit (E, M, μ) un espace mesuré. La définition de l'intégrale d'une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par rapport à la mesure μ se fera en plusieurs étapes. Nous commencons ici avec les fonctions simples.

Définition 5.1. *Une fonction $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite étagée si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs (toutes finies).*

Si $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sont les valeurs de f, posons $A_i = \{x \in E / f(x) = a_i\}$ pour $i = 1, \ldots, n$. Les A_i sont disjoints deux à deux et leur reunion est E tout entier. Ils forment donc une partitition de E. Remarquer que f est constante sur chacun des A_i. Si on ordonne les a_i par ordre croissant, le graphe de f ressemble donc à un escalier et c'est pour cela que f est appelée fonction étagée. En utilisant les fonctions caractéristiques χ_{A_i}, f s'écrit :

$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$$

On sait que la fonction caractéristique χ_A d'une partie A de E est mesurable si et seulement si A est mesurable ($\mathbb{R}$ étant toujours muni de sa tribu borélienne $B(\mathbb{R})$). Donc f sera mesurable si et seulement si chacun des A_i est une partie mesurable de E.

Définition 5.2. *La fonction f est dite simple si elle est étagée et mesurable.*

Exercice 5.3. *Une fonction constante $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ est-elle simple ?*

Exemple 5.4. *Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(x) = 2$ si $x \in]-\infty, 1]$, $f(x) = 3$ si $x \in]1, 2]$ et $f(x) = 4$ si $x \in)2, +\infty[$ ($\mathbb{R}$ étant muni de sa tribu borélienne $B(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ). f a trois valeurs finies et est donc étagée. Elle est mesurable car $A_1 =]-\infty, 1]$, $A_2 =]1, 2]$ et $A_3 =]2, +\infty[$ sont des boréliens de $\mathbb{R}$. f est donc une fonction simple. Elle s'écrit*

$$f = 2\chi_{]-\infty,1]} + 3\chi_{]1,2]} + 4\chi_{]2,+\infty[}$$

Soit $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ une fonction simple. Elle sera positive si chacun des a_i est positif. On a alors la

Définition 5.5. *L'intégrale sur E d'une fonction simple positive $f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{A_i}$ par rapport à la mesure μ est le nombre (qui peut être infini)*

$$\int_E f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i)$$

La condition de positivité de f dans cette définition est nécessaire. Elle est là pour éviter l'indetermination $\infty - \infty$. Par convention, on adoptera l'égalité $0x\infty = 0$. On peut aussi définir l'intégrale de f sur une partie mesurable A de E :

Définition 5.6. *L'intégrale de f sur la partie mesurable A est le nombre*

$$\int_A f d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A \cap A_i)$$

Là aussi la condition de mesurabilité de A est nécessaire. En effet dans ce cas $A \cap A_i$ est mesurable pour tout i et on peut donc parler de $\mu(A \cap A_i)$.

Exercice 5.7. *Montrer que l'intégrale de f sur A est égale à l'intégrale de g sur E avec g la fonction définie par $g(x) = f(x)$ si $x \in A$ et $g(x) = 0$ si $x \notin A$.*

Exemple 5.8. *Soit f la fonction de l'exemple précédent. C'est une fonction simple positive et on peut donc calculer son intégrale sur $\mathbb{R}$. On a par définition*

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 2\lambda(]-\infty, 1]) + 3\lambda(]1, 2]) + 4\lambda(]2, +\infty[) = 2.\infty + 3.1 + 4.\infty = \infty$$

Exercice 5.9. *Calculer l'intégrale de f sur $A = [0, 5]$.*

Exercice 5.10. *Montrer que $\int_{\mathbb{R}} 0 d\lambda = 0$.*

Pour le moment cette intégrale a les propriétés que l'on attend d'elle. Par exemple il est possible de montrer de manière générale que

$$\int_E (f+g)d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$$

et que

$$\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$$

pour des fonctions simples positives f et g et pour tout nombre réel $\alpha \geq 0$. Mais il est plus facile de le voir sur un exemple :

Exercice 5.11. *Soit f la fonction précédente sur $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue λ. Soit aussi g la fonction sur $\mathbb{R}$ défine par $g(x) = 5$ si $x \in]-\infty, 0]$ et $g(x) = 6$ si $x \in]0, +\infty[$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}}(f+g)d\lambda = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda + \int_{\mathbb{R}} g d\lambda$ et que $\int_{\mathbb{R}} 2f d\lambda = 2 \int_{\mathbb{R}} f d\lambda$.*

5.2 Intégrale d'une fonction positive

Soit (E, M, μ) un espace mesuré et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction positive mesurable ($\mathbb{R}$ étant toujours muni de sa tribu borélienne). On a alors la

Définition 5.12. *L'intégrale de f sur E par rapport à la mesure μ est le nombre (qui peut-ètre infini)*

$$\int_E f d\mu = sup\{\int_E h d\mu\}$$

le sup étant pris sur l'ensemble H des fonctions simples positives h telles que $0 \leq h \leq f$. Si A est une partie mesurable de E,l'intégrale de f sur A est le nombre

$$\int_A f d\mu = \int_E f \chi_A d\mu$$

Cette définition de l'intégrale d'une fonction positive appelle deux remarques trés importantes. La première est que on ne sait pas si l'ensemble H est vide ou non. Si l'ensemble H est vide, notre définition n'a pas de sens. La seconde est que cette définition n'est pas trés pratique pour calculer l'intégrale. Dans ce qui suit on va essayer de résoudre ces deux problèmes. Remarquer aussi que cette définition utilise la définition de l'intégrale d'une fonction simple positive.

Proposition 5.13. *L'ensemble H est non vide. Autrement il existe des fonctions simples positives h qui vérifient $0 \leq h \leq f$.*

Preuve. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive (qui peut même prendre des valeurs infinies). Nous allons montrer qu'il existe une suite croissante de fonctions simples positives h_n qui converge vers f. En effet posons pour tout $n \geq 1$

$$E_{n,+\infty} = \{x \in E / f(x) \geq n\}$$

et

$$E_{n,i} = \{x \in E / \frac{i-1}{2^n} \leq f(x) \leq \frac{i}{2^n}\}$$

pour $1 \leq i \leq n2^n$. On remarque que les $E_{n,i}$ (qui sont en nombre fini) forment une partition de E : ils sont disjoints deux à deux et leur reunion est E tout entier. Posons

$$h_n = \sum_{i=1}^{n2^n} \frac{i-1}{2^n} \chi_{E_{n,i}} + n\chi_{E_{n,+\infty}}$$

Les h_n sont des fonctions simples positives et leur limite est f. De plus on $h_n \leq h_{n+1}$ pour tout n, ce qui montre que la suite h_n est croissante. Comme $f = lim_n h_n = sup_n h_n$, on a $0 \leq h_n \leq f$ pour tout n. L'ensemble H est don non vide. □

Exercice 5.14. *Montrer que la suite h_n est croissante et qu'elle converge vers f.*

Pour résoudre le second problème, on utilise l'un des premiers résultat de la théorie : le théorème de convergence monotone appelé aussi théorème de Beppo-Levi. Soit (f_n) une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement vers la fonction f. On sait d'aprés le chapitre précedent que f est aussi mesurable. Comme la suite est croissante, on a

$$f = lim_n f_n = sup_n f_n$$

et donc f est aussi positive. Le théorème de convergence monotone exploite la situation ou l'on sait calculer facilement $\int_E f_n d\mu$, le problème étant de calculer $\int_E f d\mu$.

Théorème 5.15. *Sous ces hypothèses, on a*

$$\int_E f d\mu = \int_E lim_n f_n d\mu = lim_n \int_E f_n d\mu$$

La condition de croissance de la suite (f_n) dans ce théorème est nécessaire. Remarquer aussi que toutes les fonctions en jeu sont mesurables positives et on peut donc parler de leurs intégrales. IL est clair que ce théorème permet de calculer $\int_E f d\mu$ plus facilement qu'en utilisant la définition.

Exemple 5.16. *Soit $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $B(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. On considère les fonctions $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ données par $f_n = \chi_{[0,n]}$ (f_n est la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,n]$). Les fonctions f_n sont positives (elles ne prennent que les valeurs 0 et 1) et sont mesurables (car $[0,n] \in B(\mathbb{R})$). La suite (f_n) est une suite croissante. En effet f_n et f_{n+1} sont égales partout sauf sur l'intervalle $]n, n+1]$ dans lequel f vaut 0 et f_{n+1} vaut 1. Donc $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n. On a $lim_n f_n = f$ avec $f = \chi_{[0,\infty[}$. Vérifions que le théorème de convergence monotone est bien valide. On a $f_n = 0.\chi_{]-\infty,0[} + 1.\chi_{[0,n]} + 0.\chi_{]n,\infty[}$ et donc*

$$\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = 0.\lambda(]-\infty,0[) + 1.\lambda([0,n]) + 0.\lambda(]n,\infty[) = 0.\infty + 1.n + 0.\infty = n$$

De même on a $f = 0.\chi_{]-\infty,0[} + 1.\chi_{[0,\infty[}$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}} f d\lambda = 0.\infty + 1.\infty = \infty$$

On a bien

$$\infty = \int_{\mathbb{R}} f d\lambda = \lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda = lim_n n = \infty$$

Remarquer que toutes les fonctions dans cet exemple sont simples positives.

Exercice 5.17. *Pour les suites de fonctions suivantes peut-on appliquer le théorème de convergence monotone*

1. $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,\infty[}$.

2. $f_n = \frac{1}{n}\chi_{[0,n]}$.

Avant de démontrer le théorème de convergence monotone donnons-en une application importante : la linéarité de l'intégrale pour les fonctions positives.

Proposition 5.18. *Soient f et g deux fonctions mesurables positives et soit $\alpha \geq 0$. Alors on a*

1. $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$.
2. $\int_E (f+g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$.

Preuve. La première affirmation découle directement de la définition et du fait qu'elle est vraie pour les fonctions simples positives. Pour la seconde on va utiliser le théorème de convergence monotone. On sait qu'il existe des suites croissantes (h_n) et $(h_n^{'})$ de fonctions simples positives convergeant simplement vers f et g avec $\int_E f d\mu = lim_n \int_E h_n d\mu$ et $\int_E g d\mu = lim_n \int_E h_n^{'} d\mu$. Donc $\int_E f d\mu + \int_E g d\mu = lim_n \int_E h_n d\mu + +lim_n \int_E h_n^{'} d\mu = lim_n \int_E (h_n + h_n^{'}) d\mu = \int_E lim_n (h_n + h_n^{'}) d\mu = \int_E (f+g) d\mu$ (l'intégrale est linéaire sur les fonctions simples positives et $lim_n(h_n + h_n^{'}) = f + g$). $\square$

Passons maintenat à la démonstration du théorème de convergence monotone. Soit $f = lim_n h_n = sup_n h_n$ pour (h_n) une suite croissante de fonctions simples positives. Comme $h_n \leq f$ pour tout n, on a $\int_E h_n d\mu \leq \int_E f d\mu$ pour tout n. La suite $(\int_E h_n)$ est croissante ($h_n \leq h_{n+1}$ entraine $\int_E h_n d\mu \leq \int_E h_{n+1} d\mu$). Elle est aussi majorée par $\int_E f d\mu$. Donc cette suite admet une limite $lim_n \int_n h_n d\mu$ qui vérifie donc

$$lim_n \int_E h_n d\mu \leq \int_E f d\mu$$

Il nous rest donc à montrer l'inégalité inverse. Soit $h \leq f$ une fonction simple et pour $0 < \epsilon < 1$, posons $E_n = \{x \in E / h_n(x) \geq (1-\epsilon)h(x)\}$. Comme $h_n \leq h_{n+1}$, on a $E_n \subset E_{n+1}$. Donc la suite (E_n) d'ensembles est une suite croissante. De plus on a $E = \cup_n E_n$ (en effet comme $lim_n h_n = f$ et $h \leq f$, pour tout $x \in E$, il existe un n tel que $h(x) \leq h_n(x) \leq f(x)$ et donc $(1-\epsilon)h(x) \leq h_n(x)$). Posons $h = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{F_i}$. On a donc $\int_{E_n} h d\mu = \sum_{i=1}^m a_i \mu(E_n \cap F_i)$. Les $E_n \cap F_i$ forment aussi une suite croissante d'ensembles et donc $lim_n(E_n \cap F_i) = \cup_n (E_n \cap F_i) = (\cup_n E_n) \cap F_i = E \cap F_i = F_i$ et donc $\mu(F_i) = \mu(lim_n(E_n \cap F_i)) = lim_n \mu(E_n \cap F_i)$ et $lim_n \int_{E_n} h d\mu = lim_n \sum a_i \mu(E_n \cap F_i) = \sum a_i lim_n \mu(E_n \cap$

$F_i) = \sum_i \mu(F_i) = \int_E h d\mu$. D'autre part on a $\int_E h_n d\mu \geq \int_{E_n} f_n d\mu \geq (1 - \epsilon) \int_{E_n} h d\mu$. Donc $lim_n \int_E f_n d\mu \geq (1-\epsilon) lim_n \int_{E_n} h d\mu = (1-\epsilon) \int_E h d\mu$. Faisant tendre ϵ vers 0, on obtient $\lim_n \int_E h_n d\mu \geq \int_E h d\mu$ et donc $\lim_n \int_E h_n d\mu \geq sup \int_E h d\mu = \int_E f d\mu$, le sup étant pris sur les fonctions simples positives $h \leq f$.

Exercice 5.19. *Soit E un ensemble muni de la tribu $P(E)$ et de la mesure de Dirac δ_a en le point $a \in E$.*

1. *Montrer que pour une fonction simple positive h sur E, on a $\int_E h d\delta_a = h(a)$.*
2. *Calculer $\int_E f d\delta_a$ pour une fonction positive mesurable f sur E.*

5.3 Intégrale d'une fonction quelconque

Soit (E, M, μ) un espace mesuré et soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction numérique.

Définition 5.20. *f est dite intégrable si elle est mesurable et si $\int_E \mid f \mid d\mu < +\infty$. Une partie A de E est intégrable si sa fonction caractéristique χ_A est intégrable.*

Exercice 5.21. *Montrer qu'une partie A de E est intégrable si et seulement si A est mesurable et $\mu(A) < +\infty$.*

On notera $l^1(E, \mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables sur E.

Exemple 5.22. *Soit $\mathbb{R}$ muni de sa tribu borélienne $B(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue nulle en dehors de l'intervalle $[a, b]$. En tant que fonction continue, f est bornée sur l'intervalle $[a, b]$. Il existe donc $M > 0$ tel que $\mid f(x) \mid \leq M$ pour tout $x \in [a, b]$. Ce que l'on peut réécrire*

$$\mid f \mid \leq M\chi_{[a,b]}$$

On a alors

$$\int_{\mathbb{R}} \mid f \mid d\lambda \leq \int_{\mathbb{R}} M\chi_{[a,b]} d\lambda = M(b-a) < +\infty$$

Donc f est intégrable (elle est mesurable car continue). Ainsi toutes les fonctions connues du cours d'analyse (cosinus ,sinus, logarithme, ...) sont des fonctions intégrables dans notre sens.

Soit f une fonction intégrable sur E. On sait que

$$f = f^+ - f^-$$

avec $f^+ = sup(f, 0)$ et $f^- = sup(-f, 0)$ des fonctions positives. Si f est intégrable, f^+ et f^- sont aussi intégrables. En effet on sait qu'elles sont mesurables et que $f^+ \leq\mid f \mid$ et $f^- \leq\mid f \mid$. Donc

$$\int_E f^+ d\mu \leq \int_E \mid f \mid d\mu < +\infty$$

et

$$\int_E f^- d\mu \leq \int_E \mid f \mid d\mu < +\infty$$

f^+ et f^- sont positives et on peut donc calculer leurs intégrales.

Définition 5.23. *Soit f une fonction intégrable sur E. L'intégrale de f sur E est le nombre (qui peut-être infini)*

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu$$

De même l-intégrale de f sur une partie mesurable A de E est

$$\int_A f d\mu = \int_A f^+ d\mu - \int_A f^- d\mu$$

La condition d'intégrabilité de f est nécessaire dans cette définition. Elle est là pour éviter l'indetermination $\infty - \infty$ qui peut intervenir si $\int_E f^+ d\mu = \infty$ et $\int_E f^- d\mu = \infty$.

Exercice 5.24. *Soit f une fonction intégrable. Montrer que $\mid \int_E f d\mu \mid \leq \int_E \mid f \mid d\mu$.*

Pour le moment et contrairement à l'intégrale d'une fonction positive, l'intégrale d'une fonction quelconque n'est pas lináire. Elle est presque linéaire dans le sens que $\int_E \alpha f d\mu = \alpha \int_E f d\mu$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ mais légalité $\int_E (f + g) d\mu = \int_E f d\mu + \int_E g d\mu$ n'a pas de sens car $f + g$ peut ne pas être définie (si $f = +\infty$ et $g = -\infty$. Rappelons que les fonctions f et g peuvent prendre des valeurs infinies).

5.4 L'espace $L^1(E,\mu)$

Soient f et g deux fonctions sur l'espace mesuré (E, M, μ). On dit que $f = g$ μ-presque partout si l'ensemble $N = \{x \in E / f(x) \neq g(x)\}$ est une partie μ-négligeable de E. On a alors

Proposition 5.25. *Soient $f, g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions (pouvant prendre des valeurs infinies) intégrables. Si $f = g$ μ-presque partout, alors $\int_E f d\mu = \int_E g d\mu$.*

Preuve. Il suffit de montrer ce résultat pour des fonctions positives. Soit N μ-négligeable tel que $N = \{x \in E / f(x) \neq g(x)\}$. On a donc $f = g$ sur N^c le complémentaire de N dans E. On va montrer que $\int_E f d\mu = \int_{N^c} f d\mu$ et $\int_E g d\mu = \int_{N^c} g d\mu$. On a $f\chi_{N^c} \leq f$ et donc $\int_{N^c} f d\mu \leq \int_E f d\mu$. Soit $0 \leq h \leq f$ avec $h = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$ simple positive. On a $\int_{N^c} h d\mu = \sum_i a_i \mu(A_i \cap N^c) = \sum_i a_i \mu(A_i) = \int_E h d\mu$ (car $A_i = A_i \cap E = A_i \cap (N \cup N^c) = (A_i \cap N) \cup (A_i \cup N^c)$ et $\mu(A_i \cap N) \leq \mu(N) = 0$). D'autre part on a $0 \leq h\chi_N \leq f\chi_N$ et donc $\int_E h d\mu = \int_{N^c} h d\mu = \int_E h\chi_{N^c} d\mu \leq \int_E f\chi_{N^c} d\mu = \int_{N^c} f d\mu$. En passant au sup sur les $h \leq f$, on obtient $\int_E f d\mu \leq \int_{N^c} f d\mu$ et donc $\int_E f d\mu = \int_{N^c} f d\mu$. En faisant la même chose pour g, on obtient le résultat. $\square$

Exercice 5.26. *Soit f une fonction intégrable. Montrer que $N = \{x \in E / \mid f(x) \mid = +\infty\}$ est une partie μ-négligeable de E.*

Soit sur l'ensemble des fonctions intégrables $l^1(E,\mu)$ la relation $f \sim g$ si et seulemnt si $f = g$ presque partout. Elle est réflexive, symétrique et transitive et c'est donc une relation d'équivalence. La classe d'équivalence de f est

$$\overline{f} = \{g \in l^1(E,\mu) / f \sim g\}$$

Ces classes déquivalence forment l'ensemble quotient $\frac{l^1(E,\mu)}{\sim}$.

Définition 5.27. *On pose*

$$L^1(E,\mu) = \frac{l^1(E,\mu)}{\sim}$$

D'aprés l'exercice précédent dans chaque classe $\overline{f}$, il y a une fonction g équivalente à f et qui ne prend que des valeurs finies. Ceci va nous permettre de résoudre le problème de la linéarité de l'intégrale d'une fonction quelconque. Sur $L^1(E,\mu)$ on peut définir une addition et une multiplication externe en posant

$$\overline{f}+\overline{g}=\overline{f+g}$$

et

$$\alpha\overline{f}=\overline{\alpha f}$$

pour $\alpha\in\mathbb{R}$

Exercice 5.28. *Montrer que ces opérations sont bien définies.*

Ces deux opérations font de $L^1(E,\mu)$ un espace vectoriel réel.

Définition 5.29. *Pour $\overline{f}\in L^1(E,\mu)$, on pose*

$$\int_E \overline{f}d\mu=\int_E fd\mu$$

Cette définition ne dépend pas du representant f dans la classe $\overline{f}$. En effet si g est un autre repésentant de $\overline{f}$, on par définition $f=g$ presque partout et donc $\int_E fd\mu=\int_E gd\mu$.

Proposition 5.30. *Sur $L^1(E,\mu)$, l'intégrale est linéaire :*

$$\int_E(\overline{f}+\overline{g})d\mu=\int_E\overline{f}d\mu+\int_E\overline{g}d\mu$$

et

$$\int_E\alpha\overline{f}d\mu=\alpha\int_E\overline{f}d\mu$$

pour tout $\alpha\in\mathbb{R}$.

Preuve. Dans les classes $\overline{f}$ et $\overline{g}$ choisissons des représentants $f^{'}$ et $g^{'}$ ne prenat que des valeurs finies. $f^{'}+g^{'}$ ne présente donc aucune indetermination. La linéarité découle alors de celle des fonctions positives. □

On peut définir sur $L^1(E,\mu)$ une norme en posant

$$\|\ \overline{f}\ \|=\int_E\mid f\mid d\mu$$

On vérifie facilement que c'est bien une norme c'est-à-dire que $\|\ \overline{f}\ \|\leq 0$, $\|\ \alpha\overline{f}\ \|=\mid\alpha\mid\|\ \overline{f}\ \|$ et que $\|\ \overline{f+g}\ \|=\|\ \overline{f}\ \|+\|\ \overline{g}\ \|$. On a alors

Proposition 5.31. *L'application*

$$\int_E : L^1(E, \mu) \longrightarrow \mathbb{R}$$

est linéaire continue de norme ≤ 1.

Preuve. On sait que l'intégrale est linéaire. De plus on a $| \int_E f d\mu | \leq \int_E | f | d\mu = || \overline{f} ||$ et donc l'intégrale est continue de norme ≤ 1. □

On peut montrer aussi (mais nous ne le ferons pas ici) que $L^1(E, \mu)$ est complet pour cette norme et il devient donc un espace de Banach. Citons aussi sans démonstration l'autre plus important résultat de toute la théorie qui est le théorème de convergence dominée de Lebesgue

Théorème 5.32. *Soit (f_n) une suite de fonctions intégrables convergeant simplement vers la fonction f et soit g une fonction intégrable telle que $| f_n | \leq g$ pour tout n. Alors f est intégrable et $\int_E f d\mu = lim_n \int_E f_n d\mu$.*

Finissons par le début. Toute fonction intégrable au sens de Riemann va être intégrable au sens de lebesgue (en munissant $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne et de la mesure de lebesgue λ) et les deux intégrales vont être égales. Plus exactement si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann alors elle est Lebesgue intégrale sur l'intervalle $[a, b]$ (muni de sa tribu borélienne qui est la tribu induite de celle de $\mathbb{R}$ et de la mesure induite de la mesure de lebesgue sur $\mathbb{R}$) et on a

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x) dx$$

On a même plus : les fonctions qui n'etaient pas intégrables au sens de Riemann vont êtres intégrables au sens de Lebesgue. Par exemple on a vu (exercice 1.2) que la fonction

$$f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$$

donnée par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{Q}$ et 0 sinon, n'est pas intégrable au sens de Riemann. Mais on a

Exercice 5.33. *Montrer que f est intégrable au sens de Lebesgue et calculer son intégrale.*