

Centre Universitaire de Mila

Institut des Science et de la Technologie Année 2017-2018
Département de Mathématiques et Informatique Master 1 (MF+MA)

Systemes dynamiques en biologie

Serie de TD N°1

Exercice 1 *Considérons une population obéissant à une loi de croissance linéaire avec un taux $-\lambda$. soit x_0 le nombre d'individus à l'instant $t = 0$.*

1. *Trouver le nombre d'individus encore vivants à l'instant t , en déduire le nombre d'individus dx disparaissant entre t et $t + dt$ (ayant une durée de égale exactement t).*
2. *Calculer la durée de vie moyenne \bar{T} d'un individu au sein de cette population.*

Exercice 2 *Considérons l'équation de Gompertz :*

$$\frac{dx}{dt} = f(x)$$

avec $f(x) = rx \ln\left(\frac{k}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(x) = 0$ si $x = 0$

1. *Déterminer les points d'équilibre et étudier leur nature de stabilité.*
2. *Étudier la croissance de la population au voisinage de $x = 0$*
3. *Dessiner l'allure des solutions (portrait de phase).*
4. *Trouver le point d'inflexion de la solution $x(t)$ et comparer le résultats avec l'équation logistique.*

Exercice 3 *La croissance d'une population est donnée par l'équation :*

$$\frac{dx}{dt} = \alpha x^2 - mx$$

avec α le taux de natalité et m le taux de mortalité

1. *Déterminer les points d'équilibre et étudier leurs stabilités.*
2. *Dessiner l'allure des solutions(portrait de phase).*
3. *Calculer les solutions explicitement et tracer la chronique pour $\alpha = 0.1, m =$*

Exercice 4 *Considérons la loi de croissance d'une population donnée par :*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{N + x} - mx$$

1. *Rechercher les points d'équilibre et étudier leur propriétés de stabilité.*
2. *Tracer le portrait de phase.*

Exercice 5 *Les systèmes Hamiltoniens sont définis par les équations suivantes :*

$$(I) \begin{cases} \dot{x} &= \frac{\partial H(x,p)}{\partial p} \\ \dot{p} &= -\frac{\partial H(x,p)}{\partial x} \end{cases}$$

où x est la position d'une particule ponctuelle, p sa quantité de mouvement et $H(x,p)$ son énergie totale.

montrer que les systèmes Hamiltoniens sont conservatifs.

Exercice 6 *Rechercher si les systèmes suivants admet des intégrales premières :*

$$\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = x \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x} = x - xy \\ \dot{y} = -y + xy \end{cases}$$

Exercice 7 *Considérons le système de Lotka Voltera avec croissance logistique :*

$$\begin{cases} \dot{x} = rx(1 - \frac{x}{k}) - axy \\ \dot{y} = -my + bxy \end{cases}$$

1. *Déterminer les points fixes.*
2. *Étudier leur stabilité.*
3. *Tracer le portrait de phase.*