

Chapitre III :

Equation d'énergie d'un fluide en mouvement

1. Introduction

Les deux principes précédents conservation de masse et de quantité de mouvement sont en de nombreux cas suffisants pour résoudre la partie d'écoulement en absence du transfert de chaleur. Il faut noter à ce stade la disponibilité de quatre équations pour déterminer quatre inconnues (les trois composantes de vitesse plus la pression). Cependant, la partie de transfert de chaleur nécessite une solution de la distribution de la température à travers l'écoulement. L'équation supplémentaire pour accomplir cet objectif est la première loi de la thermodynamique ou l'équation de l'énergie.

2. Principe de conservation d'énergie

Pour le volume de contrôle de taille finie $\Delta x \Delta y$ sur la figure en dessous, la première loi de la thermodynamique s'applique comme suit :

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{c} \text{Taux d'accumulation d'énergie} \\ \text{dans le volume de} \\ \text{contrôle} \end{array} \right)_1 \\ &= \left(\begin{array}{c} \text{Transfert d'énergie net par} \\ \text{écoulement de} \\ \text{fluide} \end{array} \right)_2 + \left(\begin{array}{c} \text{Transfert thermique net} \\ \text{par conduction} \end{array} \right)_3 \\ &+ \left(\begin{array}{c} \text{Taux de production de chaleur interne} \\ \text{(par exemple dissipation d'énergie} \\ \text{électrique)} \end{array} \right)_4 \\ &- \left(\begin{array}{c} \text{Transfert de travail net du} \\ \text{volume de contrôle à son} \\ \text{environnement} \end{array} \right)_5 \end{aligned} \quad (1)$$

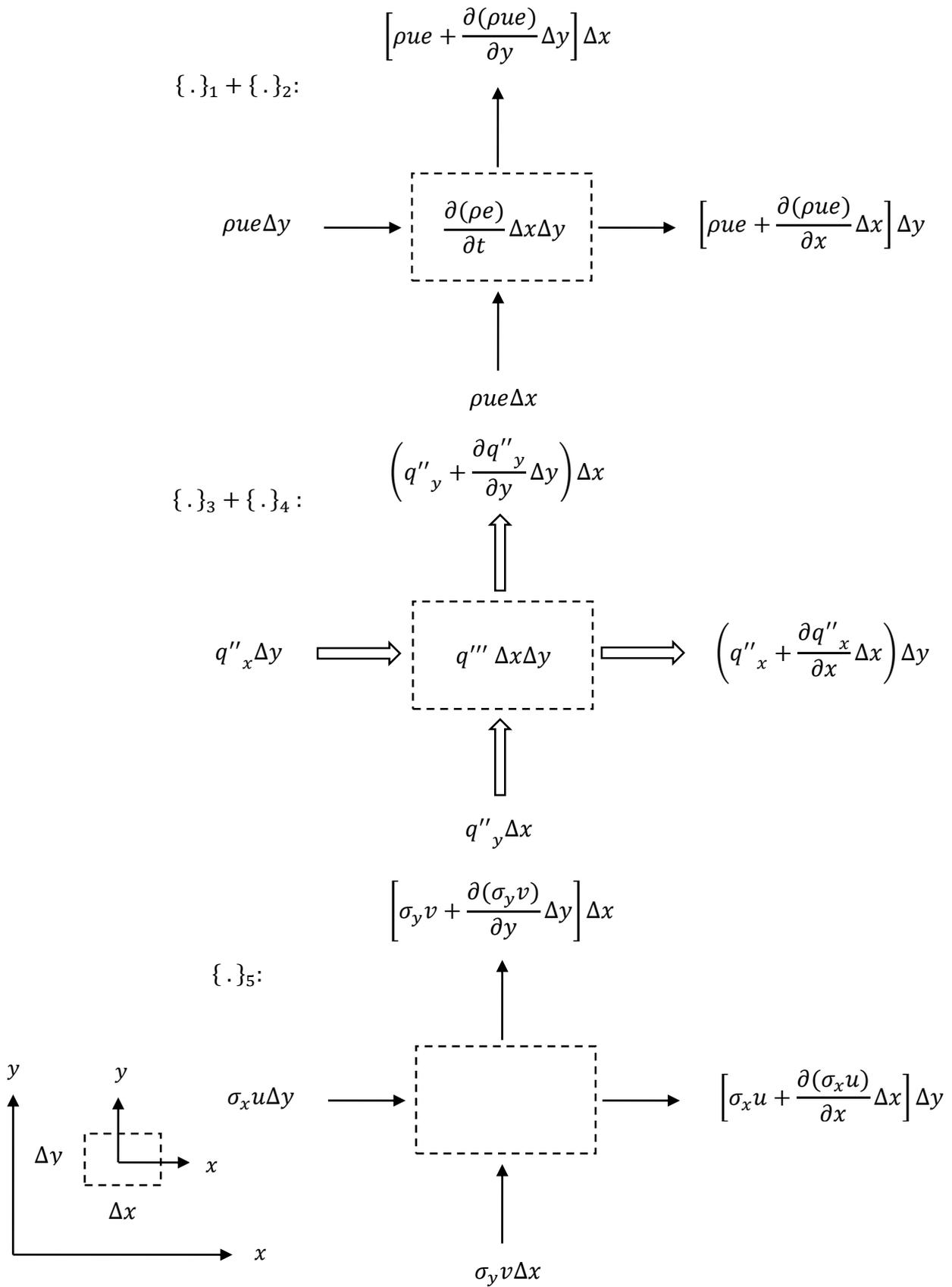


Figure 1 : Application de la première loi de thermodynamique à un volume de contrôle dans un écoulement bidimensionnel.

Selon les flux d'énergie indiqués à la figure (1), les groupes de termes sont :

$$\begin{aligned}
\{.\}_1 &= \Delta x \Delta y \frac{\partial}{\partial t} (\rho e) \\
\{.\}_2 &= -(\Delta x \Delta y) \left[\frac{\partial}{\partial x} (\rho u e) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v e) \right] \\
\{.\}_3 &= -(\Delta x \Delta y) \left(\frac{\partial q''_x}{\partial x} + \frac{\partial q''_y}{\partial y} \right) \\
\{.\}_4 &= (\Delta x \Delta y) q''' \\
\{.\}_5 &= (\Delta x \Delta y) \left(\sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} - \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\
&\quad + (\Delta x \Delta y) \left(u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - v \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right) \tag{2}
\end{aligned}$$

Où : e , q'' et q''' sont l'énergie interne spécifique, la densité du flux de chaleur et la quantité de génération de la chaleur interne.

L'origine du terme de quantité de dissipation $\{.\}_5$ réside dans le transfert de travail effectué par les contraintes normales et tangentiellles. Par exemple, le travail effectué par unité de temps par les contraintes normales σ_x sur la face gauche de l'élément $\Delta x \Delta y$ est négatif et égal à la force agissant sur la frontière ($\sigma_x \Delta y$) fois le déplacement de la limite par unité de temps (u) qui donne $(-u \sigma_x \Delta y)$. De même, la quantité de transfert de travail associé aux contraintes normales agissant sur la face droite de l'élément est positif et égale à $[\sigma_x + ((\partial \sigma_x) / \partial x) \Delta x][u + (\partial u / \partial x) \Delta x] \Delta y$.

La quantité de transfert de travail nette dû à ces deux contributions est $[\sigma_x (\partial u / \partial x) + u (\partial \sigma_x / \partial x)] (\Delta x \Delta y)$, comme indiqué dans le terme $\{.\}_5$ de l'équation (2).

Les trois autres travaux peuvent être calculés de la même manière en examinant l'effet des trois contraintes restantes τ_{xy} dans la direction x et σ_y et τ_{yx} dans la direction y . Dans l'expression $\{.\}_5$ ci-dessus, les huit termes ont été séparés en deux groupes. En rassemblant les expressions (2) dans l'équation de la conservation d'énergie, on obtient :

$$\rho \frac{De}{Dt} + e \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{V} \right) = -\nabla \cdot \mathbf{q}'' + q''' - p \nabla \cdot \mathbf{V} + \mu \Phi \tag{3}$$

Où q'' est le vecteur de densité de flux de chaleur et Φ est la fonction de dissipation visqueuse. Dans le cas particulier où l'écoulement peut être modélisé comme incompressible et bidimensionnelle, la fonction de dissipation visqueuse se réduit à :

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \tag{4}$$

Pour exprimer l'équation. (3) en termes d'enthalpie, nous utilisons la définition thermodynamique $h = e + (1/\rho)p$, donc :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{de}{dt} + \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dt} - \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt} \quad (5)$$

En plus, nous pouvons exprimer les densités de flux de chaleur q''_x et q''_y en termes de gradients des températures locaux, en utilisant la loi de Fourier de la conduction thermique :

$$q'' = -k\nabla T \quad (6)$$

Puis, en combinant des équations. (3), (5) et (6) nous obtenons :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + q''' + \frac{dp}{dt} + \mu\Phi - \frac{p}{\rho} \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} \right) \quad (7)$$

Enfin, l'équation de conservation de masse montre que les derniers termes entre parenthèses dans l'équation (7) égale à zéro, et la première loi de la thermodynamique se réduit à :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \nabla \cdot (k\nabla T) + q''' + \frac{dp}{dt} + \mu\Phi \quad (8)$$

Afin d'exprimer l'équation d'énergie (8) en termes de température, il faut remplacer l'enthalpie spécifique sur le côté gauche par le produit de chaleur spécifique * température. Cette action n'est correcte que dans les cas où le fluide se comporte comme un gaz idéal. En général, la variation de l'enthalpie spécifique pour une substance monophasique est exprimée par la relation canonique de l'enthalpie :

$$dh = Tds + \frac{1}{\rho} dp \quad (9)$$

Où : T est la température absolue et ds le différentiel d'entropie spécifique :

$$ds = \left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p dT + \left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T dp \quad (10)$$

De la dernière des relations de Maxwell, nous avons :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p} \right)_T = - \left[\frac{\partial (1/\rho)}{\partial T} \right]_p = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p = - \frac{\beta}{\rho} \quad (11)$$

Énergie interne	Enthalpie	Entropie
$dU = Tds - p d\mathfrak{v}$	$dh = Tds + \mathfrak{v} dp$	$ds = \frac{1}{T} du + \frac{p}{T} d\mathfrak{v}$
<i>Substance pure :</i>		
$dU = c_v dT$ $+ \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] d\mathfrak{v}$	$dh = c_p dT$ $+ \left[-T \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial T} \right)_p + \mathfrak{v} \right] dp$	$ds = \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial T} \right)_p dp$ $= \frac{c_v}{T} dT + \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v d\mathfrak{v}$
<i>Gaz idéal :</i>		
$dU = c_v dT$	$dh = c_p dT$	$ds = c_p \frac{dT}{T} - R \frac{dp}{p}$ $= c_v \frac{dT}{T} + R \frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}}$ $= c_v \frac{dp}{p} + c_p \frac{d\mathfrak{v}}{\mathfrak{v}}$
<i>Liquide incompressible :</i>		
$dU = c dT$	$dh = c dT + \mathfrak{v} dp$	$ds = c \frac{dT}{T}$

Tableau 1 : Résumé des relations thermodynamiques.

Où : \mathfrak{v} est le volume spécifique, $\mathfrak{v} = 1/\rho$, U est l'énergie interne et β est le coefficient de d'expansion thermique :

$$\beta = \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (12)$$

Le tableau (1) montre également que :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T} \right)_p = \frac{c_p}{T} \quad (13)$$

L'ensemble des équations (9) et (13) indiquent que :

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dp \quad (14)$$

En d'autres termes, le côté gauche de l'équation d'énergie (6) est :

$$\rho \frac{dh}{dt} = \rho c_p \frac{dT}{dt} + (1 - \beta T) \frac{dp}{dt} \quad (15)$$

Donc, la formulation «température» de la première loi de la thermodynamique est :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \beta T \frac{dp}{dt} + \mu \Phi \quad (16)$$

Avec les formes spéciales suivantes :

Gaz idéal ($\beta = 1/T$):

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \frac{dp}{dt} + \mu \Phi \quad (17)$$

Liquide incompressible ($\beta = 0$):

$$\rho c \frac{dT}{dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \mu \Phi \quad (18)$$

La plupart des problèmes de convection abordés obéissent à un modèle plus simple à savoir : une conductivité constante du fluide k , production de chaleur interne nulle q''' , $\mu \Phi$ dissipation visqueuse négligeable et effet de compressibilité négligeable $\beta T dp/dt$. L'équation d'énergie pour ce modèle est :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T \quad (19)$$

Ou, en termes de systèmes de coordonnées spécifiques :

Cartésien (x, y, z) :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (20a)$$

Cylindrique (r, θ, z) :

$$\rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (20b)$$

Sphérique (r, φ, θ) :

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_r \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{v_\varphi}{r} \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\ = k \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\sin \varphi \frac{\partial T}{\partial \varphi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \varphi} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right) \end{aligned} \quad (20c)$$

Si le fluide peut être modélisé comme un liquide incompressible, alors, dans l'équation (18), la chaleur spécifique à pression constante c_p est remplacée par la chaleur spécifique du liquide incompressible c (tableau 1).

Lorsqu'il s'agit d'un écoulement extrêmement visqueux du type rencontré dans les problèmes de lubrification ou la tuyauterie de pétrole brut, le modèle ci-dessus est amélioré par en tenant compte du chauffage interne dû à la dissipation visqueuse :

$$\rho c_P \frac{dT}{dt} = k \nabla^2 T + \mu \Phi \quad (21)$$

En trois dimensions, la fonction de dissipation visqueuse est exprimée comme suit :

Cartésien (x, y, z) :

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \\ & - \frac{2}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (22a)$$

Cylindrique (r, θ, z) :

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right)^2 \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right)^2 - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \end{aligned} \quad (22b)$$

Sphérique (r, φ, θ) :

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left\{ \left[\left(\frac{\partial v_r}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r} \right)^2 + \left(\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{v_\varphi \cot \varphi}{r} \right)^2 \right] + \frac{1}{2} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\varphi}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} \right]^2 \right. \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{\sin \varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{v_\theta}{r \sin \varphi} \right) + \frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right]^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{r \sin \varphi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v_\theta}{r} \right) \right]^2 \left. \right\} \\ & - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{V})^2 \end{aligned} \quad (22c)$$