Chapitre II :

Quelques solutions exactes des équations Navier-Stokes

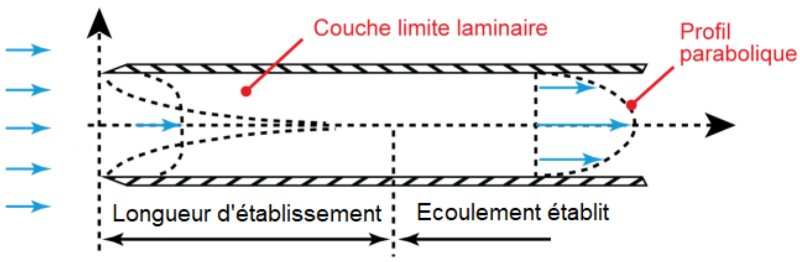
1. Introduction :

Les équations de la mécanique des fluides fournissent quelques solutions particulières d'intérêt physique. Ces solutions exactes sont associées à des hypothèses et approximations restrictives liées par exemple à des propriétés physiques constantes ou des domaines restreints à la dimension un ou deux d'espace.

Les écoulements laminaires sont des écoulements caractérisés par un mouvement organisé des particules fluide qui sont disposées en couche où des lames. L'effet de la viscosité étant dominant étouffe où supprime toute évolution vers la turbulence. L'équation de continuité et les équations Navier-Stokes représentent le point de départ pour l'étude des différents écoulements considérés ci-dessous.

2. Ecoulement de Couette :

C'est l'écoulement laminaire en régime développé entre deux plaques planes parallèles d'un fluide incompressible.



Ecoulement laminaire

Les équations N-S dans les coordonnées cartésiennes (x, y, z) s'écrivent comme suit :

Suivant x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} + w\frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial x} + \vartheta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \qquad (i)$$

Suivant y :

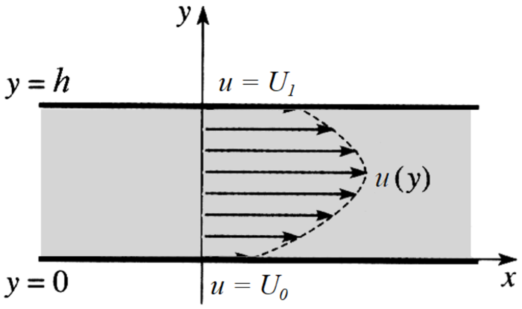
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} + w\frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial y} + \vartheta\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}\right) \qquad (ii)$$

Suivant z :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial x} + v\frac{\partial w}{\partial y} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p^*}{\partial z} + \vartheta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) \qquad (iii)$$

L'équation de continuité est :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad (iv)$$



Hypothèses simplificatrices :

- Ecoulement stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t}=0$
- Régime établit : $\frac{\partial u}{\partial x}=0$
- Ecoulement bidimensionnel 2D : $w=\frac{\partial}{\partial z}=0$

L'équation (iv) devient : $\frac{\partial v}{\partial y}=0 \quad \rightarrow \quad v=C^{te}$ suivant y or $v=0$ lorsque $y=0$

Donc, la constante $C^{te}=0$ et $v=0$ dans tout le champ d'écoulement.

De l'équation (ii) : $\frac{\partial p^*}{\partial y}=0$

Remarque :

- La pression p^* est une fonction de x seulement.
- La vitesse suivant la direction x (u) est une fonction de y seulement car l'écoulement est 2D $\left(\frac{\partial u}{\partial z}=0\right)$et en régime développé $\left(\frac{\partial u}{\partial x}=0\right)$.

De l'équation (i) :

$$\frac{\partial p^*}{\partial x}=\frac{dp^*}{dx}=\mu\frac{d^2u}{dy^2}=C^{te}=c_1 \qquad (\mu=\rho\vartheta)$$

En intégrant 2 fois par rapport à y, on obtient :

$$u(y)=Ay^2+By+C$$

En introduisant les conditions aux limites suivantes :

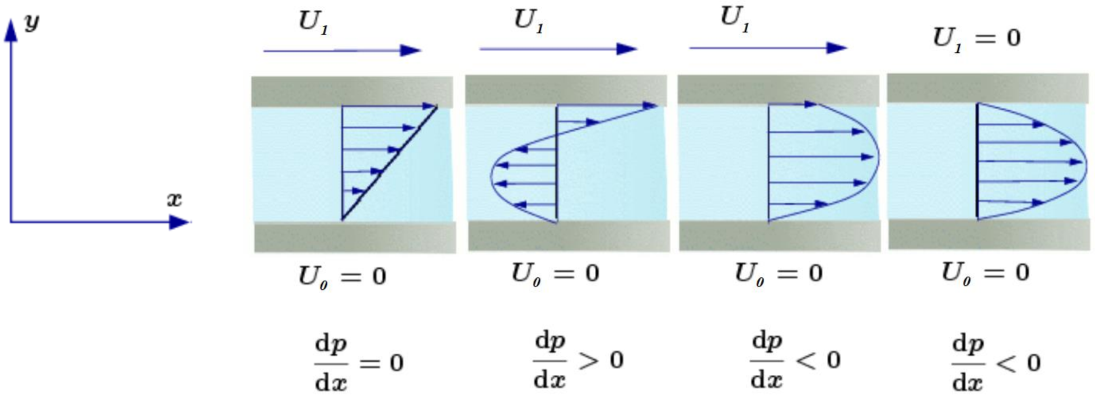
$$\begin{cases} y=0 & \rightarrow \quad u=U_0 \\ y=h & \rightarrow \quad u=U_1 \end{cases}$$

La distribution de la vitesse devient :

$$u(y)=U_0+\left(\frac{U_1-U_0}{h}\right)y-\frac{1}{2\mu}\frac{dp^*}{dx}(ty-y^2)$$

Le débit volumique par unité de largeur est :

$$Q = \int_A u\, dA = \int_0^h u\, dy \times 1 = \left(\frac{U_1 + U_0}{2}\right) h - \frac{h^3}{12\mu}\frac{dp^*}{dx}$$

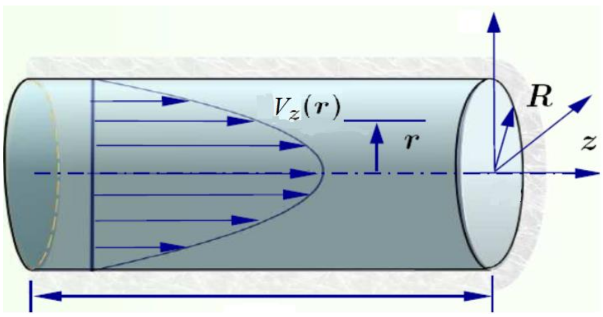


Remarque :

Quand $\frac{dp^*}{dx} < 0$ et $U_p \ = \ 0$, cet écoulement est appelé écoulement de Poiseuille plan.

3. Ecoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique :

Considérons l'écoulement parallèle d'un fluide visqueux dans une conduite à section circulaire de rayon R et supposons que l'écoulement soit axisymétrique et en régime développé.



Les équations N-S dans les coordonnées cylindriques (r, θ, z) sont :

Suivant r :

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{{V_\theta}^2}{r} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial r} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right] \qquad (i)$$

Suivant θ :

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p^*}{\partial \theta} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right] \qquad (ii)$$

Suivant z :

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p^*}{\partial z} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right] \qquad (iii)$$

L'équation de continuité est :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rV_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0 \qquad (iv)$$

Hypothèses simplificatrices :

- Ecoulement stationnaire : $\frac{\partial}{\partial t} = 0$
- Régime établit : $\frac{\partial V_z}{\partial z} = 0$
- Ecoulement axisymétrique : $\frac{\partial}{\partial \theta} = 0$ et pas de Swirl : $V_\theta = 0$

L'équation (iv) devient:

$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\,V_r) = 0 \quad \rightarrow \quad r\,V_r = C^{te}$ suivant r or $V_r = 0$ lorsque $r = R$ (sur la paroi)

Donc, la constante $C^{te} = 0$ et $V_r = 0$ dans tout le champ d'écoulement.

De l'équation (i) : $\frac{\partial p^*}{\partial r} = 0$

Remarque :

La pression est une fonction de z seulement et la vitesse V_z est une fonction de r seulement.

De l'équation (iii) :

$$\frac{\mu}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_z}{dr}\right) = \frac{dp^*}{dz}$$

En intégrant 2 fois par rapport à r, on obtient :

$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu}\,\frac{dp^*}{dz}r^2 + A\,lnr + B$$

En introduisant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} r = 0 & \rightarrow \quad \frac{dV_z}{dr} = 0 \\ r = R & \rightarrow \quad V_z = 0 \end{cases}$$

La distribution de la vitesse devient :

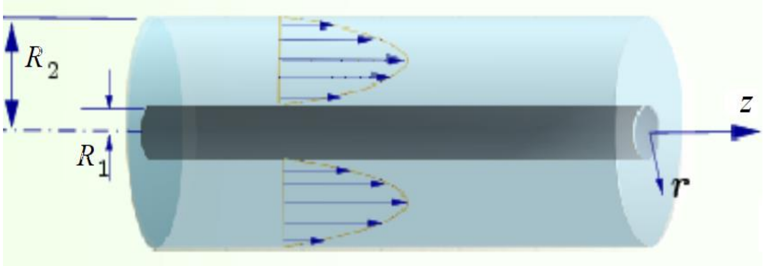
$$V_z(r) = \frac{1}{4\mu}\,\frac{dp^*}{dz}(r^2 - R^2)$$

Le débit volumique est :

$$Q = \int_0^R V_z(r)\,2\pi r.\,dr = -\frac{\pi R^4}{8\mu}\,\frac{dp^*}{dz} = -\frac{\pi D^4}{128\mu}\,\frac{dp^*}{dz}$$

4. Ecoulement dans un tube annulaire :

C'est le cas d'un écoulement entre deux conduites droites coaxiales que l'on rencontre dans certains échangeurs de chaleur.



La solution générale reste valable (écoulement de Poiseuille dans une conduite cylindrique) mais dans ce cas les conditions aux limites sont données comme suit :

$$\begin{cases} r = R_1 & \rightarrow \quad V_z = 0 \\ r = R_2 & \rightarrow \quad V_z = 0 \end{cases}$$

La distribution de la vitesse devient :

$$V_z(r) = -\frac{1}{4\mu}\frac{dp^*}{dz}\left[{R_2}^2 - r^2 + \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{ln(R_2/R_1)} ln\left(\frac{r}{R_2}\right)\right]$$

Le débit volumique est donné par :

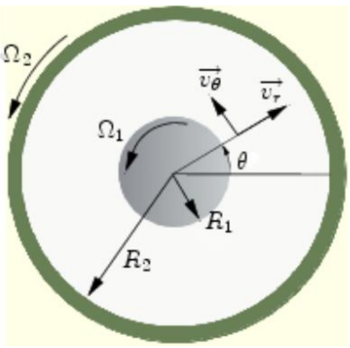
$$Q = \int_{R_1}^{R_2} V_z(r)\, 2\pi r.dr = -\frac{\pi}{8\mu}\frac{dp^*}{dz}\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)\left[{R_2}^2 + {R_1}^2 - \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{ln(R_2/R_1)}\right]$$

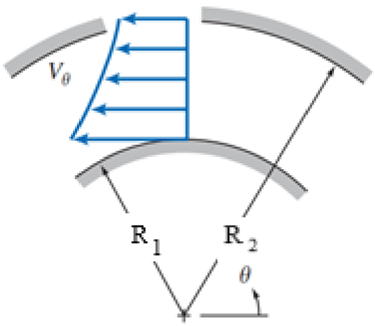
La vitesse moyenne est définit comme suit :

$$V = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{\pi\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)} = -\frac{1}{8\mu}\frac{dp^*}{dz}\left[{R_2}^2 + {R_1}^2 - \frac{{R_2}^2 - {R_1}^2}{ln(R_2/R_1)}\right]$$

5. Ecoulement entre deux cylindres coaxiaux en rotation :

L'écoulement bidimensionnel (2D) entre deux cylindres circulaires coaxiaux de rayon R_1 et R_2 tournants autour de leur axe respectivement avec les vitesses angulaires V_{θ_1}et V_{θ_2}.





De l'équation de continuité : $V_r = 0$

De l'équation de quantité de mouvement suivant z : $\frac{\partial p^*}{\partial z} = 0$

De l'équation de quantité de mouvement suivant r :

$$\rho\frac{{V_\theta}^2}{r} = \frac{dp^*}{dr}$$

C'est l'équation de l'équilibre radial.

L'équation de quantité de mouvement suivant θ devient :

$$\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dV_\theta}{dr}\right)-\frac{V_\theta}{r^2}\right]=0 \qquad \rightarrow \qquad \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV_\theta)\right]=0$$

Après intégration on obtient :

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(rV_\theta)=c_1$$

Intégrons une deuxième fois :

$$V_\theta=\frac{c_1}{2}r+\frac{c_2}{r}$$

Introduisons les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} r=R_1 & \rightarrow \quad V_\theta = V_{\theta_1} \\ r=R_2 & \rightarrow \quad V_\theta = V_{\theta_2} \end{cases}$$

La distribution de la vitesse devient :

$$V_\theta(r)=\left[\frac{R_1V_{\theta_1}-R_2V_{\theta_2}}{{R_1}^2-{R_2}^2}\right]r+\left[\frac{R_2V_{\theta_1}-R_1V_{\theta_2}}{(R_2/R_1)-(R_1/R_2)}\right]\frac{1}{r}$$