الفصل الخامس: العمل و الطاقة: *Travail et Energie*

1. مقدمة:

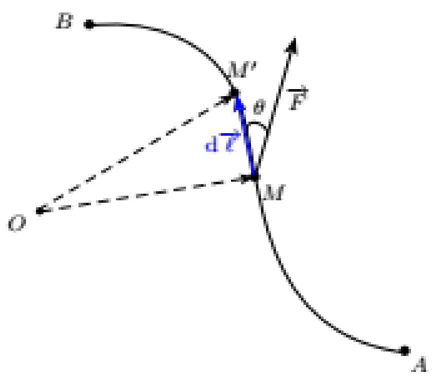
تسمح قوانين نيوتن بحل مختلف مسائل الديناميك، حيث بمعرفة الوضعية و السرعة الابتدائيتان لجملة و كل القوى المؤثرة عليها يمكن التنبؤ بتطور الجملة عبر الزمن. لكن عمليا، لا يمكن دوما معرفة كل القوى المؤثرة على الجملة، بالإضافة لذلك فإنه في بعض الأحيان نحصل على عدد كبير من المعادلات أو تكون معقدة (صعبة الحل). يمكن الحصول، في كثير من الحالات، على معلومات قيمة تتعلق بالجملة باستعمال مفاهيم العمل و الطاقة. من أجل جملة معزولة فإن الطاقة تمتلك خاصية المصونية كما بالنسبة لكمية الحركة و العزم الحركي.

تستغل مصونية الطاقة لحل مسائل الديناميك.

2. العمل: *Le Travail*

العمل العنصري:

نفرض أن جسما يتحرك تحت تأثير قوة $\vec{F}$ على مسار ما. خلال فترة زمنية قصيرة جدا ***dt*** ينتقل الجسم من النقطة ***M*** إلى ***M'*** تحت تأثير القوة $\vec{F}$ إنتقالا عنصريا $\vec{dl} = \overrightarrow{MM'}$.



يعرف العمل العنصري للقوة $\vec{F}$ بالمقدار السلمي :

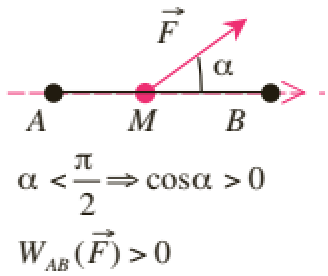
$$dW = \vec{F}\cdot\vec{dl} = F.dl.\cos\theta \qquad / \qquad \theta = \left(\vec{F},\vec{dl}\right)$$

يتعلق العمل العنصري بالزاوية بين القوة و الانتقال :

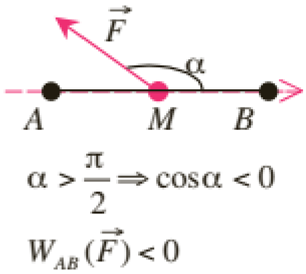
- $0 \leq \theta \leq 90°$ فإن $dW > 0$ و نقول أن **العمل محرك**: يدفع الجسم للحركة
- $90 \leq \theta \leq 180°$ فإن $dW < 0$ و نقول أن **العمل مقاوم**: يعيق الحركة الجسم
- $\theta = 90°$ فإن $dW = 0$ في هذه الحالة $\vec{F} \perp d\vec{l}$ و منه نستنتج أن:

<u>عمل القوة العمودية على المسار معدوم</u>

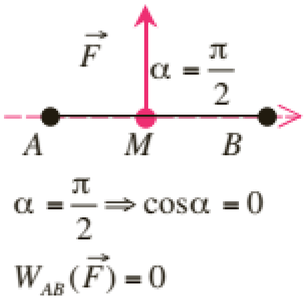
نذكر مثلا عمل قوة رد الفعل الناظمي $W(\vec{N}) = 0$



العمل محرك



العمل مقاوم



<u>عمل القوة العمودية على المسار معدوم</u>

- ❖ **<u>العبارة التحليلة للعمل العنصرى:</u>**

أ- **<u>الإحداثيات الديكارتية:</u>**

$$\begin{cases} d\vec{l} = dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k} \\ d\vec{F} = F_x.\vec{i} + F_y.\vec{j} + F_z.\vec{k} \end{cases} \Rightarrow dW = F_x.dx + F_y.dy + F_z.dz$$

ب- **<u>الإحداثيات القطبية:</u>**

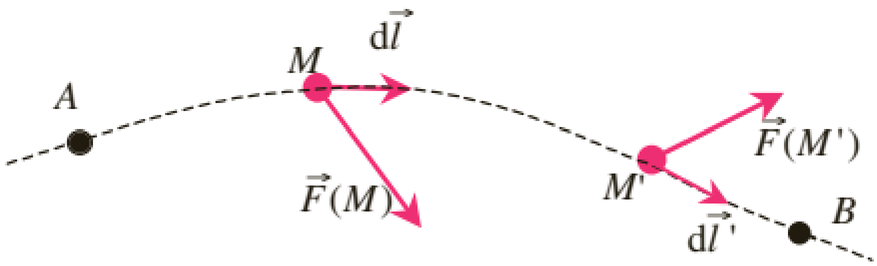
$$\begin{cases} d\vec{l} = d\rho.\vec{u}_\rho + \rho.d\theta.\vec{u}_\theta \\ d\vec{F} = F_\rho.\vec{u}_\rho + F_\theta.\vec{u}_\theta \end{cases} \Rightarrow dW = F_\rho.d\rho + \rho.F_\theta.d\theta$$

ت- **<u>الإحداثيات الذاتية:</u>**

$$\begin{cases} d\vec{l} = dr.\vec{u}_T \\ d\vec{F} = F_N.\vec{u}_N + F_T.\vec{u}_T \end{cases} \Rightarrow dW = F_T.dr$$

عمل قوة على طول مسار معلوم:

ترسم النقطة المادية M الخاضعة لقوة $\vec{F}$ مسارا منحنيا AB، عندما تنتقل من النقطة A إلى النقطة B ، فعمل القوة $\vec{F}$ على طول المسار هو مجموع كل الأعمال العنصرية المنجزة خلال الانتقالات العنصرية بين A و B:



$$W_{AB}(\vec{F}) = \sum_{P_i=A}^{P_f=B} dW_i$$

حيث قسمنا المسار إلى عدد لا نهائي من المسارات العنصرية فإن الجمع يتحول إلى تكامل:

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B dW_i = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l}$$

في الحالة العامة:

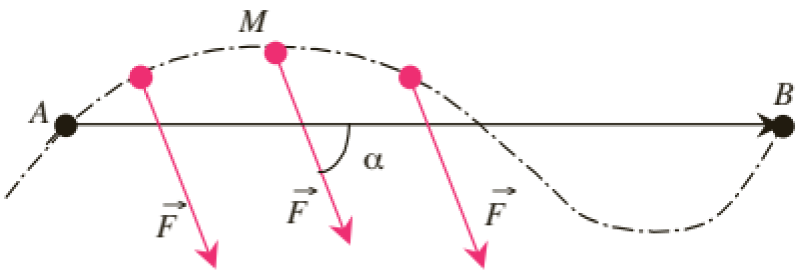
$$W_{i\to f} = \int_i^f \vec{F}\cdot d\vec{l}$$

<u>الوحدة:</u> عندما تقاس القوة بالنيوتن N و الإنتقال بالمتر m يقاس العمل **<u>بالجول</u>** (*Joule*) يرمز لها بالرمز J.

<u>حالات خاصة:</u>

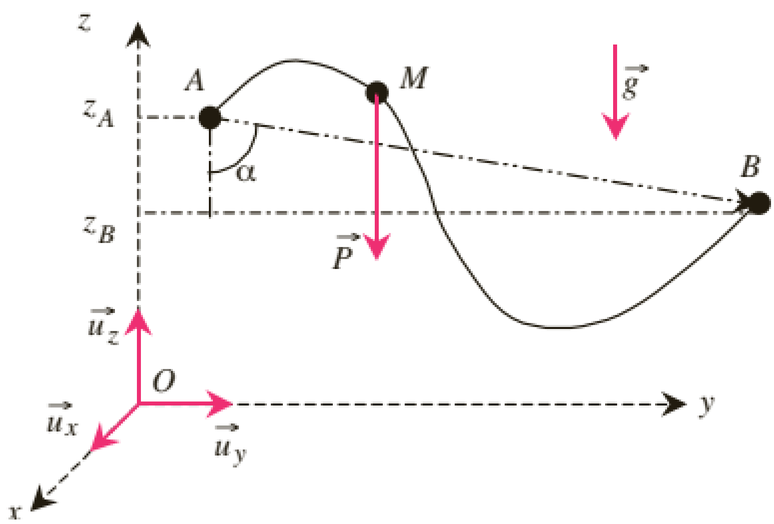
الحالة 1: إذا كانت **القوة ثابتة في القيمة و الاتجاه** فإن عملها يعطى بالعلاقة:

$$W_{A\to B} = \int_A^B \vec{F}.d\vec{l} = \vec{F}\int_A^B d\vec{l}. = \vec{F}.(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = \vec{F}.(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$$



<u>عمل القوة الثابتة لا يتعلق بالمسار المتبع و لكن يتعلق بالمسافة بين A و B و الزاوية بين القوى و المستقيم AB</u>

<u>مثال:</u> عمل قوة الثقل:



حسب العلاقة الأخيرة فإنه يمكن كتابة:

$$W(\vec{P}) = \vec{P}.\overrightarrow{AB}$$

يمكن اجراء الحساب بطريقتين:

باستعمال الزاوية α بين $\vec{P}$ و $\overrightarrow{AB}$:

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg \bullet AB \bullet \cos\alpha$$

أو باستعمال مركبات الأشعة $\vec{P}$ و $\overrightarrow{AB}$ في جملة الاحداثيات الديكارتية حيث :

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} \qquad \vec{P} = m\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \bullet \overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A)$$

النتيجتين متطابقتين حيث من الشكل فإن:

$$z_B - z_A = AB\cos\alpha$$

يمكن وضع فرق الارتفاع بين نقطتي البداية و النهاية بالشكل:

$$z_B - z_A = \Delta h$$

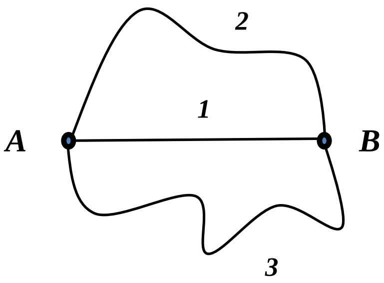
$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \bullet \overrightarrow{AB} = -mg(z_B - z_A) = -mg\Delta h$$

فعمل قوة الثقل لا يتعلق بالمسار المتبع و إنما يتعلق بالمسافة بين نقطتي البداية و النهاية.

ملاحظة:

إذا كان عمل القوة لا يتعلق بالمسار المتبع وإنما يتعلق بالوضعية الابتدائية والنهائية فقط فنقول إن القوة محافظة

$$W_{AB} = W_1 = W_2 = W_3$$



من جهة أخرى نقول أن:

قوة أنها محافظة إذا كان عمل هذه القوة، عندما ينتقل الجسم من موضع و يرجع إلى نفس الموضع ، معدوم

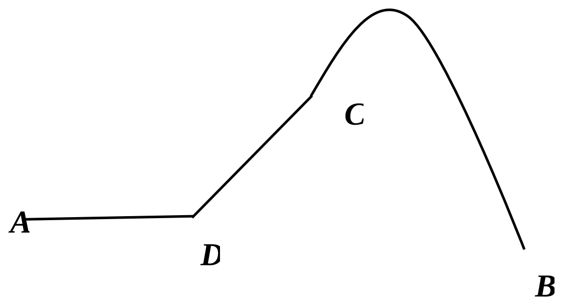
عمل القوة المحافظة على المسار المغلق معدوم

$$W_{A\to A} = \oint_A \vec{F} \bullet d\vec{r} = 0$$

الحالة 2: إذا كانت النقطة المادية خاضعة **لعدة قوى:**

$$W = W(\vec{F}_1) + W(\vec{F}_2) + ... + W(\vec{F}_n)$$

الحالة 3: إذا كان المسار يتكون من عدة مسارات فإن عمل هذه المسارات يعطى بالعلاقة :



$$W_{AB}=W_{AC}+W_{CD}+W_{DB}$$

3. الاستطاعة: *La Puissance*

تعرف الإستطاعة للقوة المؤثرة على النقطة المادية التي تتحرك بسرعة تحت تأثير هذه القوة كما يلي:

" تعرف الإستطاعة بأنها العمل المبذول خلال وحدة الزمن"

$$P=\lim_{dt\to 0}\frac{dW}{dt}=\lim_{dt\to 0}\vec{F}\bullet\frac{d\vec{l}}{dt}=\vec{F}\bullet\lim_{dt\to 0}\vec{F}\bullet\frac{d\vec{l}}{dt}=\vec{F}\bullet\vec{v}$$

$\vec{v}$: سرعة النقطة المادية. فالاستطاعة مقدار لحظي.

وحدة الإستطاعة هي الواط يرمز لها بالرمز: ***Watt***

$$[P]=[F]\bullet[v]\Rightarrow U_P=Watt=N.m/s=J/s$$

4. الطاقة الميكانيكية: *L'Energie Mécanique*

سنتطرق لنوعين من الطاقة: الطاقة الحركية E_c المرتبطة بحركة الجسم و الطاقة الكامنة E_p المرتبطة بوضعيته

1.4 الطاقة الحركية

نفرض أن الكتلة m تتحرك تأثير القوة $\vec{F}$ خلال فترة زمنية صغيرة جدا dt وتنتقل انتقالا صغيرا dr.

عمل هذه القوة يكتب :

$$dW=\vec{F}\bullet d\vec{r} \text{ و } \vec{F}=m\vec{\gamma}=m\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$dW=m.\frac{d\vec{v}}{dt}\bullet d\vec{r}=m\bullet d\vec{v}\,\frac{d\vec{r}}{dt}=m.d\vec{v}\bullet\vec{v}$$

$$dW = m.\vec{v} \bullet d\vec{v} = \frac{m}{2} d(\vec{v} \bullet \vec{v}) = \frac{m}{2} d(v^2) = d(\frac{m \bullet v^2}{2})$$

يسمى المقدار $\frac{m \bullet v^2}{2}$ بالطاقة الحركية و يرمز لها بالرمز E_c و تقاس ب**<u>الجول</u>**

$$E_C = \frac{m \bullet v^2}{2}$$

$$dW = dE_c \Rightarrow \int_i^f dW = \int_i^f dE_c \Rightarrow W_{i \to f} = E_{c_f} - E_{c_i}$$

$$\Rightarrow W_{i \to f} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

نص نظرية تغير الطاقة الحركية:

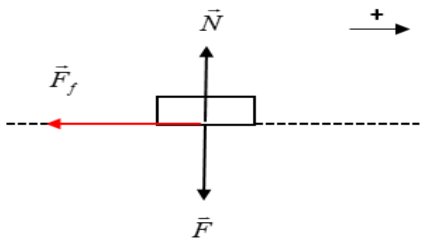
" إن تغير الطاقة الحركية لجسم بين لحظتين زمنيتين يساوي عمل محصلة القوى المؤثرة على الجسم خلال الانتقال بين الوضعيتين"

$$W_{i \to f}(\vec{F}_{ext}) = \Delta E_c = E_{cf} - E_{ci}$$

$$W_{i \to f} = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

<u>مثال</u>: يتحرك جسم كتلته m حركة مستقيمة على مستوى أفقي خشن معامل احتكاكه الحركي هو μ_c. يبدأ الجسم الحركة بسرعة ابتدائية v_0 ثم يتوقف بعد قطع مسافة d . بتطبيق نظرية الطاقة الحركية أوجد عبارة معامل الاحتكاك بدلالة d, g, v_0

الحل:



$\Delta E_c = W(F_{ext})$

$$\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2=W(\vec{P})+W(\vec{N})+W(\vec{F}_f)$$

$$-\frac{1}{2}mv_i^2=0+0+\int_A^B \vec{F}_f\bullet d\vec{r}$$

$N=P=mg$ فإن $\vec{F}_f=-\mu_c.N.\vec{i}=-\mu_c.mg.\vec{i}$

$$d\vec{r}=dx.\vec{i}\ \Rightarrow -\frac{1}{2}mv_0^2=-\mu_c.mg.\int_0^d dx \quad\Rightarrow\quad -\frac{1}{2}mv_0^2=-\mu_c.mg.d\ \Rightarrow \mu_c=\frac{v_0^2}{2g.d}$$

2.4 الطاقة الكامنة *l'Energie Potentielle*

رأينا أن عمل القوة المحافظة لا يتعلق بالمسار المتبع و إنما يتعلق بالوضعية الابتدائية و النهائية. من أمثلة هذه القوى عمل قوة الثقل و عمل قوة الارجاع و عمل القوة الثابتة (طويلة و اتجاها). أما القوى غير المحافظة فيتعلق عملها بالمسار المتبع نذكر مثلا قوة الاحتكاك، حيث عمل هذه القوى يكون دوما مقاوما (عمل سالب W<0).

تعريف الطاقة الكامنة:

عمل القوة المحافظة لا يتعلق بالمسار المتبع و إنما يتعلق بالوضعية الابتدائية و النهائية، يمكن التعبير عن هذا العمل بدالة للحالة نسميها الطاقة الكامنة E_p حيثّ:

$$W_{AB}(\vec{F}_{ext})=E_p(A)-E_p(B)=-\Delta E_p$$

التغير في الطاقة الكامنة بين وضعيتين A و B يساوي عكس عمل القوة المحافظة بين الوضعيتين :

$$W_{AB}(\vec{F}_{ext})=\int_A^B \vec{F}_{ext}\bullet d\vec{l}=E_p(A)-E_p(B)=-\Delta E_p$$

من أجل عمل عنصري:

$$dW_{AB}(\vec{F}_{ext})=\vec{F}_{ext}\bullet d\vec{l}=-dE_p \qquad *$$

التفاضل الكلي لـ $E_p=E_p(x,y,z)$ في الاحداثيات الديكارتية :

$$dE_p=-\frac{\partial E_p}{\partial x}dx+\frac{\partial E_p}{\partial y}dy+\frac{\partial E_p}{\partial z}dz$$

يمكن وضعه بالشكل:

$$dE_p = \left(\frac{\partial E_p}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}.\vec{k} \right) \bullet \left(dx.\vec{i} + dy.\vec{j} + dz.\vec{k} \right)$$

و علما أن مؤثر تدرج لدالة سلمية ***f (x,y,z)*** يعطى :

$$\overrightarrow{grad} f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}.\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}.\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}.\vec{k} \right)$$

فإنه:

$$dE_p = \overrightarrow{grad} E_p \bullet d\vec{r}$$

$$* \quad \Rightarrow \qquad dE_p = \overrightarrow{grad} E_p \bullet d\vec{r} = -\vec{F} \bullet d\vec{r}$$

$$\vec{F} = -\overrightarrow{grad} E_p = -\frac{\partial E_p}{\partial x}.\vec{i} - \frac{\partial E_p}{\partial y}.\vec{j} - \frac{\partial E_p}{\partial z}.\vec{k}$$

نقول أن القوة مشتقة من طاقة كامنة (من كمون)

$$* \quad \Rightarrow \qquad dE_p = \overrightarrow{grad} E_p \bullet d\vec{r} = -\vec{F} \bullet d\vec{r} = -dW$$

$$dW = -dE_p \Rightarrow \quad W_{A\to B} = -\int_A^B dE_p = E_{PA} - E_{PB}$$

$$W_{A\to B} = E_{pA} - E_{pB}$$

تمثل **هذه العلاقة نظرية الطاقة الكامنة و هي صحيحة لما تكون القوة** $\vec{F}$ **محافظة فقط.**

3.4 الطاقة الميكانيكية (الكلية) *L'Energie Mécanique*

يرمز لها بالرمز E_T أو E_M و تمثل مجموع الطاقة الحركية و الكامنة و تكتب:

$$E_T = E_c + E_p$$

إذا كانت **القوة المطبقة على الجسم محافظة تكون الطاقة الميكانيكية محفوظة أو ثابتة** أي :

$$E_{T_1} = E_{T_2} = E_{T_3} .....$$

ومنه نكتب:

$$\Delta E_T = 0$$

البرهان:

$$E_{T_2} = E_{c_2} + E_{p_2} \qquad E_{T_1} = E_{c_1} + E_{p_1}$$

$$W_{1\to2} = E_{c_2} + E_{c_1} = E_{p_1} + E_{p_2}$$

$$E_{c_1} + E_{p1} = E_{c_2} + E_{p_2} \Rightarrow E_{T_1} = E_{T_2} \quad \Rightarrow \quad \Delta E_T = E_{T_2} - E_{T_1} = 0$$

<u>عمل القوة غير المحافظة (المبددة للطاقة):</u>

الطاقة الكلية لجسم خاضع لقوى مشتقة من كمون محفوظة بمعنى تتحول الطاقة من طاقة كامنة إلى طاقة حركية و العكس: لا يوجد ضياع. مثلا نترك كتلة تسقط من ارتقاع معين: بسقوط الكتلة (تناقص الارتقاع) تزداد السرعة. الكتلة كانت تمتلك طاقة كامنة و التي تحولت إلى طاقة حركية خلال السقوط.

في بعض الحركات لا تتحقق هذه الظاهرة فمثلا تتناقص الطاقة الحركية لا بتبعها زيادة في الطاقة الكامنة. و هو ما يحدث لنقطة مادية تتحرك على مستوى خشن حيث يكون الضياع على شكل حرارة، في هذه الحالة نقول أن الجملة مضيعة للطاقة نتيجة لخضوعها إلى قوى غير مشتقة من كمون. هذه القوة تكون عادة معاكسة للحركة و منتجة لعمل مقاوم (سالب) مثل قوة الاحتكاك.

$$E_{T_1} \neq E_{T_2} \Rightarrow \Delta E_T \neq 0$$

فإن: W^{NC} (عمل القوة المبددة *travail des forces **N**on **C**onservatrices*) : $\quad \Delta E_T = W^{NC}$

<u>البرهان:</u> لتكن $\vec{F}$ قوة محافظة و $\vec{F}_f$ غير محافظة

$$W_{1\to2} = \int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{r} + \int_1^2 \vec{F}_f \bullet d\vec{r} = E_{c_2} - E_{c_1}$$

$$\int_1^2 \vec{F} \bullet d\vec{r} = E_{p_1} - E_{p_2}$$

$$W_{1\to2} = E_{c_2} - E_{c_1} = E_{p_1} - E_{p_2} + W_{1\to2}\left(\vec{F}_f\right)$$

$$\left(E_{c_2} + E_{p_2}\right) - \left(E_{c_1} + E_{p_1}\right) = W_{1\to2}\left(\vec{F}_f\right)$$

$$E_{T_2} - E_{T_1} = W_{1\to2}\left(\vec{F}_f\right) \quad \Rightarrow \quad \Delta E_T = W_{1\to2}\left(\vec{F}_f\right)$$

التغير في الطاقة الكلية = عمل القوة الغير محافظة: $\quad \Delta E_T = W_{1\to2}\left(\vec{F}_f\right)$

و هذا المقدار يمثل فقدان الطاقة على شكل حرارة أو مفعول جول