Chapitre 3 : Variables aléatoires

Résumé

Synthèse des éléments essentiels du chapitre

Variable aléatoire discrète

Définition : v.a. à valeurs discontinues dans un intervalle donné : **dénombrement**

Loi de probabilité : soit l'événement $\{X = x_i\}$, à x_i on associe $P(X=x_i)$ ou p_i alors $\sum_i p_i = 1$ $\sum_i p_i = 1$

Représentation : **diagramme en bâtons**

Espérance :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

1. $E(\alpha X) = \alpha E(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $|E(\alpha X + \beta) = \alpha E(X) + \beta, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$
3. $E(X + Y) = E(X) + E(Y).$
4. $E(\alpha X + \beta Y) = \alpha E(X) + \beta E(Y), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

Variance :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - E(X)^2$$

1. La variance d'une constante est nulle : $V(\alpha) = 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $V(X + \alpha) = V(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
3. $V(\alpha X) = \alpha^2 V(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
4. $V(\alpha X + \beta) = \alpha^2 V(X), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$

D'où

1. $\sigma(X + \alpha) = \sigma(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$
2. $\sigma(\alpha X) = |\alpha| \sigma(X), \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

Variable aléatoire continue

Définition : v.a. à valeurs continues dans un intervalle donné : **mesure**

Densité de probabilité : $x \to f(x)$ telle que $\int_{-\infty}^{+\infty}$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$ et

$P(a < X < b)$ $= \int_{a}^{b} f(x)dx$

$\int_{a}^{b} f(x)dx$

Fonction de répartition : $F_X(t) = P(X < t) = \int_{-\infty}^{t}$ $\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$

Représentation : **histogramme**

Espérance :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$$

$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)dx$

Variance :

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2$$

$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 f(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2$

Indépendance entre variables aléatoires

Loi d'un couple X,Y : $p_{ij} = P((X = x_i) \text{ et } (Y = y_j))$

Espérance : $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$ quelque soit les relations entre X et Y

d'où $E(X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i)$ $\sum_{i=1}^{n} E(X_i)$

Variance : $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2 \operatorname{cov}(X,Y)$

Indépendance : si X et Y sont deux variables aléatoires **indépendantes**

$E(XY) = E(X)E(Y)$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

d'où $V(X_1 + X_2 + \ldots + X_i + \ldots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} V(X_i)$ $\sum_{i=1}^{n} V(X_i)$

Remarque : les propriétés de l'espérance et la variance sont les même dans le cas des variables aléatoires continues.