COURBES ALGEBRIQUES
(Bernard Le Stum)

CHAPITRE 1 - CORRIGES

1.1.4. On a

$$V(Y^2 - X^2 + X^4) \cap V(Y - tX) = V(Y^2 - X^2 + X^4, Y - tX)$$
$$V(Y^2 - X^2 + X^4) \cap V(Y - tX) = V((tX)^2 - X^2 + X^4, Y - tX)$$
$$V(Y^2 - X^2 + X^4) \cap V(Y - tX) = V(X^2(X^2 + t^2 - 1), Y - tX)$$
$$V(Y^2 - X^2 + X^4) \cap V(Y - tX) = V(X^2, Y - tX) \cup V(X^2 + t^2 - 1, Y - tX)$$

$$= \begin{cases} \{O, (\sqrt{1-t^2}, t\sqrt{1-t^2}), (-\sqrt{1-t^2}, -t\sqrt{1-t^2})\} \text{si } |t| \leq 1 \\ \{O\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

On vérifie aussi que $V(Y^2 - X^2 + X^4) \cap V(X) = \{O\}$. On voit donc que la courbe affine plane d'équation $Y^2 = X^2 - X^4$ s'obtient par symétrie centrale de centre O à partir de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2} \\ y = t\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

Celle ci est définie pour $|t| \leq 1$. Comme x est paire et y impaire, on peut limiter l'intervalle d'étude à $[0, 1]$ et faire une symétrie d'axe (OX). Les fonctions x et y sont dérivables pour $t \neq 1$avec $x' = -t/\sqrt{1-t^2}$ et $y' = (1 - 2t^2)/\sqrt{1-t^2}$ si bien que la pente de la courbe est donnée par $m := y'/x' = (2t^2 - 1)/t$. En particulier, celle ci s'annule pour $t = \sqrt{2}/2$, c'est à dire au point de coordonnées $(\sqrt{2}/2 , 1/2)$. On trace donc l'arc qui part du point $(1, 0)$ avec une pente verticale, passe par le point $(\sqrt{2}/2 , 1/2)$ avec une pente horizontale et arrive en O avec la pente -1. Il ne reste plus alors qu'a effectuer les symétries d'axe (OX) et de centre O.

1.2.1. Il est clair que $(a, b, c) \in C$ si et seulement si $b = a^2$ et $c = a^3$. On a donc $C = V(Y - X^2, Z - X^3)$.

1.2.2. On vérifie que $C = V(Y - X^2, XZ - 1)$.

1.2.4. Montrons que $C = V(X^3 - YZ, Y^2 - XZ, Z^2 - X^2Y)$: L'inclusion directe est immédiate. Réciproquement, soit $(a, b, c) \in \mathbb{A}^3$ tel que $a^3 = bc$, $b^2 = ac$ et $c^2 = a^2b$. Si $a = 0$, alors $b = c = 0$ et $P \in C$. Sinon on pose $t = b/a$ et on remplace b par at. On obtient $a^3 = atc$, $a^2t^2 = ac$ et $c^2 = a^3t$. On voit donc que $a^2 = ct$, $at^2 = c$ et $c^2 = a^3t$. Il en résulte que $at^3 = at^2t = ct = a^2$ si bien que $a = t^3$ et finalement $b = at = t^4$, $c = at^2 = t^5$.

1.2.7. On a $C = V(\{X_i^{d_j} - X_j^{d_i}\}_{i,j=1,\ldots,n})$: L'inclusion directe est claire. D'autre part, puisque les d_i sont premiers entre eux, il existe des entiers $c_1, \ldots, c_n$ tels que $\Sigma_{i=1}^n c_i d_i = 1$. Soit $P := (a_1, \ldots, a_n) \in V(\{X_i^{d_j} - X_j^{d_i}\}_{i,j=1,\ldots,n})$. Si l'un des a_i est nul, on pose $t = 0$ et sinon, on pose $t = \prod_{i=1}^n a_i^{c_i}$. On vérifie facilement que $P = (t^{d_1}, \ldots, t^{d_n})$.

1.2.10. Soit P un point du plan affine réel de coordonnées polaires r et θ. Si $P \in C$, alors $r = sin\ 2\theta = 2sin\theta cos\theta$. En multipliant par r^2 et en élevant au carré, on trouve que P est sur la courbe d'équation $(X^2 + Y^2)^3 = 4X^2Y^2$. Réciproquement, si P est sur cette courbe, alors $\pm r = sin\ 2\theta$. On a donc, soit $r = sin\ 2\theta$, soit $-r = sin2\theta = sin2(\theta + \pi)$. Puisque le point P et le point de coordonnées polaires $-r$ et $\theta + \pi$ sont identiques, on voit que $P \in C$.

1.2.11. On a

$$sin\ n\theta = \prod_{k=0}^{n-1} (sin\ \theta + tan\frac{k\pi}{n}.cos\ \theta)\ .$$

On en déduit facilement que C est la courbe algébrique d'équation

$$(X^2 + Y^2)^{(n+1)/2} = \prod_{k=0}^{n-1} (Y + tan\frac{k\pi}{n}X)$$

1.3.1. L'intersection de la droite d'équation $X = a$ avec C est donnée par $X = a$ et $X^2Y^2 + X^2 + Y^2 = 2XY(X + Y + 1)$, soit encore $X = a$ et $(a-1)^2Y^2 - 2a(a+1)Y + a^2 = 0$. Si $a = 1$, on voit que C et la droite se rencontrent au point $(1, 1/4)$. Sinon, on calcule le discriminant et on trouve $\Delta = 4a^3$. On voit donc que si $a = 0$, la droite coupe C a l'origine, si a est un carré non nul, la droite coupe C au point $(a, a/(1\pm\sqrt{a})^2)$ et que si a n'est pas un carré, la droite ne coupe pas C. L'intersection de C avec Δ est donnée par $X^2Y^2 + X^2 + Y^2 = 2XY(X + Y + 1)$ et $Y = X$, ou encore $X^4 = 4X^3$ et $Y = X$. On voit donc que $C \cap \Delta$ est composé de O et de $(4, 4)$. L'intersection de C avec Δ' est donné par $X^2Y^2 + X^2 + Y^2 = 2XY(X + Y + 1)$ et

$Y = -X$, ou encore $X^4 = -4X^2$ et $Y = -X$. On voit donc que $C \cap \Delta'$ est réduite à O si -1 n'est pas un carré et composé des trois points O, $(2i, -2i)$ et $(-2i, 2i)$ sinon.

1.3.2. Supposons qu'il existe un plan $P = V(\alpha X + \beta Y + \gamma Z + \delta)$ tel que $C \subset P$. Alors pour tout $t \in k$, on aurait $\alpha t + \beta t^2 + \gamma t^3 + \delta = 0$. Puisque k est infini, on aurait donc $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$. Contradiction.

1.3.3. Si $D := \{(a + \alpha t, b + \beta t, c + \gamma t), t \in k\}$ est une droite contenue dans S, on a pour tout $t \in k$, $(a + \alpha t)^3 = (b + \beta t)(c + \gamma t)$. Puisque k est infini, on a nécessairement $\alpha = 0$ et donc pour tout $t \in k$, $a^3 = (b + \beta t)(c + \gamma t)$. On en déduit que $\beta\gamma = 0$. Si $\beta = 0$, alors $\gamma \neq 0$ et pour tout $t \in k$, $a^3 = b(c + \gamma t)$. On voit donc que $b = 0$ et il en résulte que $a = 0$. On obtient donc $D = \{(0, 0, c + \gamma t), t \in k\} = (OZ)$. De même, si $\gamma = 0$ on trouve $D = (OY)$. Puisque ces deux axes sont bien contenus dans S, ce sont les seules droites contenues dans S.

1.3.4. C'est l'axe des Z : si D est une droite contenue dans V, alors D est contenue dans la surface S d'équation $X^3 = YZ$. On sait alors que $D = (OY)$ ou $D = (OZ)$ et on vérifie que $(OZ) \subset V$ mais que $(OY) \not\subset V$.

1.3.6. L'intersection $C \cap \Delta$ est donné par $Y = c(X - a) + b$ et $F(X, Y) = 0$, soit encore $Y = c(X - a) + b$ et $G(X) = 0$. On voit donc que la première projection induit bien une bijection de $C \cap \Delta$ sur les racines de G.

1.3.7. L'application qui a un point du plan associe son abscisse induit une bijection de $C \cap \Delta$ sur l'ensemble des racines de $(c(X - a) + b)^2 - (X^3 - X) = -X^3 + c^2X^2 + \ldots$ L'égalité annoncée provient donc de la formule donnant la somme des racines d'un polynôme.

1.4.4. Si $a, b, c, d \in k$, on a $(ac)(bd) = (ad)(bc)$, ce qui montre que S est contenu dans la surface d'équation $XT = YZ$. Réciproquement, soit $P := (\alpha; \beta; \gamma; \delta) \in \mathbb{P}^4$ tel que $\alpha\delta = \beta\gamma$. Si $\gamma \neq 0$, on pose $a = \alpha$, $b = \gamma$, $c = 1$ et $d = \delta/\gamma$, si bien que $(ac; ad; bc; bd) = (\alpha; \alpha\delta/\gamma; \gamma; \delta) = P$ avec $b, c \neq 0$. Si $\gamma = 0$ et $\alpha \neq 0$, on pose $a = 1$, $b = 0$, $c = \alpha$ et $d = \beta$ si bien que $(ac; ad; bc; bd) = (\alpha; \beta; 0; 0) = P$ avec $a, c \neq 0$. Enfin, si $\gamma = \alpha = 0$, on pose $a = \beta$, $b = \delta$, $c = 0$ et $d = 1$ si bien que $(ac; ad; bc; bd) = (0; \beta; 0; \delta) = P$ avec $d \neq 0$ et a ou $b \neq 0$ car $(0, \beta, 0, \delta) \neq 0$.

1.5.5. Dire que $(a, b) \in C$ et que $\Phi(a, b) = (a, c)$ signifie que $a^2b^2 + a^2 + b^2 = 2ab(a + b + 1)$ et que $c = a + b - ab$, ou encore que $4ab = (a + b - ab)^2$ et que $c =$

$a + b - ab$, ce qui s'écrit encore $4ab = c^2$ et $b = c - a - c^2/4$. On obtient finalement $4a^2 - (c^2 + 4c)a + c^2 = 4a^2 - 4(a + b)a + ab = 0$ et $b = c - a - c^2/4$. On voit donc que Φ est une bijection de C sur C' et que la réciproque est induite par l'application polynomiale $(a, c) \longmapsto (a, c - a - c^2/4)$. Cela signifie bien que Φ induit un isomorphisme de C sur C'.

1.5.6. On peut toujours trouver une application affine bijective Φ du plan dans lui même qui transforme D_1 et D_2 en les axes des coordonnées. C'est un isomorphisme de $D_1 \cup D_2$ sur C.

1.6.1. Puisque k est infini, A est infini et contenu dans la droite d'équation $X = 1$. Puisque les fermés propres d'une droite sont finis, on voit que V est la droite d'équation $X = 1$.

1.6.3. Comme A est infini, V est un sous-ensemble algébrique infini de $\mathbb{A}^1$, donc $V = \mathbb{A}^1$.

1.6.4. Puisque k est infini, A est infini et $A \subset V(Y - X^2)$ avec $Y - X^2$ irréductible. Il suit que V est la parabole d'équation $Y = X^2$.

6.6. Pour tout $b \in [-1, +1]$, l'intersection de A avec la droite d'équation $Y = b$ est infinie. Donc si $A \subset V(S)$ et $F \in S$, $Y - b$ divise F. Comme ceci vaut pour une infinité de valeurs de b, on en déduit $F = 0$. On a donc $F = 0$ et $V(S) = \mathbb{A}^2$.

1.7.1. Si $\Phi(t) =: P =: (a, b, c)$, on a $b = a(a - 1)$ et $c^2 = a^3$ d'où

$$\Phi(\mathbb{A}^1) \subset C := V(Y - X(X - 1), Z^2 - X^3).$$

Inversement, si $P =: (a, b, c) \in C$, on pose $t = 0$ si $a = 0$ et $t = c/a$ sinon. On vérifie facilement que $P \longmapsto t$ est un inverse pour Φ. Il en résulte que Φ est une bijection de $\mathbb{A}^1$ sur $C = V(Y - X(X - 1), Z^2 - X^3)$. Puisque Φ est polynomiale, elle est continue. Enfin, l'image d'un fermé de $\mathbb{A}^1$ par Φ est soit fini soit égale à C, et donc fermée. Cela montre que Φ est une application continue bijective fermée, et donc un homéomorphisme.

1.7.3. Si $t \in \mathbb{R}$ et $P := (a, b) := \Phi(t)$, on a $a = bt$. On en déduit que $a^3 = b^3t^3$ et il suit que $b^4 = b^3(1 - t^3) = b^3 - b^3t^3 = b^3 - a^3$. On voit donc que P est sur la courbe C d'équation $Y^4 = Y^3 - X^3$. Réciproquement, soit $P =: (a, b) \in C$. Si $P = O$, on pose $t = 1$. Sinon, on a $b \neq 0$ et on pose $t := a/b$. Dans les deux cas, on vérifie aisément que $P = \Phi(t)$. Puisque Φ est clairement injective, cette application induit une bijection de $\mathbb{A}^1$ sur C. Puisque Φ est une application polynomiale, elle est continue. C'est un homéomorphisme car elle est fermée.

1.7.4. Puisque la première projection $x : C \longrightarrow \mathbb{A}^1$ est injective, la courbe C ne peut pas être le produit d'une partie de $\mathbb{A}^1$ et de l'axe des Y. On sait qu'alors, $x(C)$ contient un ouvert non vide. En passant aux complémentaires, on voit que le complémentaire Z de $x(C)$ dans $\mathbb{A}^1$ est contenu dans un fermé propre. Puisque les fermés propres de $\mathbb{A}^1$ sont les ensembles finis, on voit que Z est fini (ou vide) et donc fermé. Il suit que $x(C)$ est ouvert.

1.8.6. Le polynôme $X(X-1)(X-\lambda)$ étant de degré impair ne peux pas être un carré dans $k[X]$. Il suit que le polynôme $Y^2 - X(X-1)(X-\lambda)$ est unitaire de degré 2 en Y et sans racine dans $k[X]$. Il est donc est irréductible. Puisque k est algébriquement clos, C est une courbe irréductible.

1.8.7. Les facteurs irréductibles du polynôme $(X^2 + XY + Y^2)(X^2 + Y^2)$ sont $X - jY, X - j^2Y, X + iY$ et $X - iY$. Ceux de $X^3 + Y^3$ sont $X + Y, X + jY$ et $X + j^2Y$. On voit donc que le polynôme qui définit C est somme de deux polynômes homogènes sans facteurs communs de degrés 4 et 3. Un tel polynôme est toujours irréductible. Puisque $\mathbb{C}$ est algébriquement clos, C est irréductible.

En caractéristique 2, on a

$$(X^2 + XY + Y^2)(X^2 + Y^2) + X^3 + Y^3 = (X + jY)(X + j^2Y)(X + Y)(X + Y + 1)$$

et C est donc composée des droites d'équation $X = jY, X = j^2Y, X = Y$ et $X = Y + 1$.

En caractéristique 3, les facteurs irréductibles du polynôme $(X^2 + XY + Y^2)(X^2 + Y^2)$ sont $X - Y, X + iY$ et $X - iY$ et celui de $X^3 + Y^3$ est $X + Y$. On voit donc comme sur $\mathbb{C}$ que C est irréductible.

1.8.8. Si C n'était pas irréductible, on pourrait écrire $X^2Y^2 - 2XY(X + Y) + (X - Y)^2 = (F + X - Y)(G + X - Y)$ avec F et G homogènes de degré 2. On aurait alors $(Y - X)(F + G) = 2XY(X + Y)$, ce qui est clairement impossible.

1.8.9. On sait que C est la courbe algébrique d'équation

$$(X^2 + Y^2)^{(n+1)/2} = \prod_{k=0}^{n-1} (Y + tan\frac{k\pi}{n}X) .$$

Puisque $(X^2+Y^2)^{(n+1)/2}$ et $\prod_{k=0}^{n-1}(Y+tan\frac{k\pi}{n}X)$ sont homogènes de degrés respectifs $n+1$ et n, et n'ont pas de facteurs communs (les racines du premier polynôme sont imaginaires et celles du second sont réelles), l'équation de C est irréductible. D'autre part, il est clair que C est infinie et il en résulte que C est irréductible.

1.8.10. On sait que C est la courbe d'équation $(X^2+Y^2)^3 = 4X^2Y^2$. Il suffit alors puisque C est infinie, de montrer que le polynôme $(X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2$ est irréductible. En considérant les composantes homogènes des facteurs éventuels, on voit que si ce polynôme était réductible, on pourrait écrire $(X^2+Y^2)^3 - 4X^2Y^2 = ((X^2+Y^2)^2+F)(X^2+Y^2+G)$ avec F et G homogènes de degrés respectifs 3 et 1. On aurait alors $0 = (X^2+Y^2)^2G + F(X^2+Y^2)$ et $-4X^2Y^2 = FG$ si bien que $F = -(X^2+Y^2)G$ et $4X^2Y^2 = (X^2+Y^2)G^2$. Contradiction.

1.9.1. La courbe C est irréductible comme image de $\mathbb{A}^1$ qui est irréductible par l'application $\Phi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^n$, $t \longmapsto (t^{d_1}, \ldots, t^{d_n})$ qui est continue car polynomiale.

1.9.2. On sait que l'application $\Phi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3$, $t \longmapsto (t^2, t^2(t^2-1), t^3)$ qui paramètre C est un homéomorphisme de $\mathbb{A}^1$ sur C et que $\mathbb{A}^1$ est irréductible.

1.9.4. Puisque $\mathbb{A}^1$ est irréductible, il en va de même de son image C par Φ.