COURBES ALGEBRIQUES

(Bernard Le Stum)

CHAPITRE 1 - EXERCICES

1.1. Courbes algébriques réelles planes ($k = \mathbb{R}$)

1.1.1. Tracer la courbe affine plane d'équation $Y^2 = X^3$ en considérant son intersection avec les droites vectorielles.

1.1.2. Idem avec $Y^2 = X^3 + X^2$.

1.1.3. Idem avec $Y^2 + X^3 + X^2 = 0$.

1.1.4. Idem avec $Y^2 = X^2 - X^4$.

1.1.5. Idem avec $Y^2 = X^4 - X^6$.

1.1.6. Idem avec $(X^2 + Y^2)^3 = 4X^2Y^2$.

1.2. Courbes paramétrées

1.2.1. La courbe paramétrée $C = \{(t, t^2, t^3),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^3$ est elle algébrique?

1.2.2. Idem avec $C = \{(t, t^2, 1/t),\ t \in k^*\} \subset \mathbb{A}^3$.

1.2.3. Idem avec $C = \{(t^2, t^3),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^2$.

1.2.4. Idem avec $C = \{(t^3, t^4, t^5),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^3$.

1.2.5. ($k = \mathbb{R}$) Idem avec $C = \{(t^2, t^4),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^2$.

1.2.6. ($k = \mathbb{R}$) Idem avec $C = \{(t, \sin t),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^2$.

1.2.7. Idem avec $C := \{(t^{d_1}, \ldots, t^{d_n}),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^n$, $d_1, \ldots, d_n$ strictement positifs premiers entre eux.

1.2.8. La courbe réelle plane C d'équation polaire $r = 1$ est elle algébrique?

1.2.9. Idem avec $r = \theta$.

1.2.10. Idem avec $r = sin\ 2\theta$.

1.2.11. Idem avec $r = sin\ n\theta$, n impair.

1.3. Ensembles algébriques affines et variétés linéaires

1.3.1. ($Car\ k \neq 2$) Déterminer les intersections de la courbe affine plane C d'équation $X^2Y^2 + X^2 + Y^2 = 2XY(X + Y + 1)$ avec les droites d'équation $X = a$ ainsi qu'avec les diagonales Δ et Δ' d'équations respectives $Y = X$ et $Y = -X$.

1.3.2. Montrer que $C = \{(t, t^2, t^3),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^3$ n'est contenu dans aucun plan de $\mathbb{A}^3$.

1.3.3. Déterminer toutes les droites contenues dans la surface S d'équation $X^3 = YZ$ dans $\mathbb{A}^3$.

1.3.4. Montrer que le sous-ensemble algébrique V de $\mathbb{A}^3$ défini par $X^3 = YZ$ et $Y^2 = XZ$ contient une unique droite.

1.3.5. Soient S_1 et $S_2 \subset \mathbb{A}^3$ les cylindres d'équations respectives $X^2 + Y^2 = 1$ et $X^2 + Z^2 = 1$. Montrer que $C := S_1 \cap S_2$ est contenu dans la réunion de deux plans.

1.3.6. Soit C une courbe plane d'équation $F = 0$ et Δ la droite de pente (finie) c du plan affine passant par le point (a, b) de C. Montrer que la première projection induit une bijection de $C \cap \Delta$ sur les racines du polynôme $G := F(X, c(X - a) + b) \in k[X]$.

1.3.7. Montrer que si la droite Δ de pente finie c coupe la courbe C d'équation $Y^2 = X^3 - X$ en trois points distincts P, P' et P'' d'abscisses respectifs a, a' et a'', alors $a + a' + a'' = c^2$.

1.4. Ensembles algébriques projectifs

1.4.1. Montrer que $C := \{(a^2; ab; b^2),\ a,\ b \in k,\ (a,\ b) \neq 0\}$ est une courbe projective plane.

1.4.2. Montrer que $C := \{(a^3; a^2b; ab^2; b^3)),\ a,\ b \in k,\ (a,\ b) \neq 0\}$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^3$.

1.4.3. Montrer que $S := \{(a^2; ab; ac; b^2; bc; c^2),\ a,\ b,\ c \in k,\ (a,\ b,\ c) \neq 0\}$ est un sous-ensemble algébrique de $\mathbb{P}^5$. C'est la *surface de Veronese.*

1.4.4. Montrer que $S := \{(ac; ad; bc; bd),\ a,\ b,\ c,\ d \in k,\ (a,\ b) \neq 0,\ (c,\ d) \neq 0\}$ est une surface projective.

1.5. Applications polynomiales

1.5.1. Soit C la courbe affine plane d'équation $XY = 1$. Montrer que toute application polynomiale de $\mathbb{A}^n$ dans C est constante.

1.5.2. Montrer que la courbe affine plane d'équation $Y = X^2$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1$.

1.5.3. Montrer que la courbe paramétrée $C := \{(t,\ t^2,\ t^3),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^3$ est isomorphe à $\mathbb{A}^1$.

1.5.4. (*k algébriquement clos et car* $k \neq 2$) Montrer que toute courbe d'équation $aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0$, avec a, b, c, d et e non tous nuls, est isomorphe à une courbe d'équation $Y = 0$, $XY = 1$, $X^2 = X$ ou $XY = 0$.

1.5.5. (*Car* $k \neq 2$) Soient C et C' les courbes affines planes d'équations respectives $X^2Y^2 + X^2 + Y^2 = 2XY(X + Y + 1)$ et $4X^2 = (Y^2 + 4Y)X - Y^2$. Montrer que $\Phi : \mathbb{A}^2 \longrightarrow \mathbb{A}^2$, $(a, b) \longmapsto (a, a + b - ab)$ induit un isomorphisme sur de C sur C'.

1.5.6. Montrer que si D_1 et D_2 sont deux droites distinctes sécantes du plan affine, alors $D_1 \cup D_2$ est isomorphe à la courbe plane C d'équation $XY = 0$.

1.5.7. Montrer que si D_1, D_2 et D_3 sont trois droites distinctes concourantes du plan affine, alors $D_1 \cup D_2 \cup D_3$ est isomorphe à la courbe plane C d'équation $XY(X-Y)=0$.

1.6. Fermeture algébrique

1.6.1. Déterminer la fermeture algébrique V de $A = \{(1, 1/t), t \in k^*\} \subset \mathbb{A}^2$.

1.6.2. $(k = \mathbb{R})$ Idem pour $A = \{(m, 0), m \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{A}^2$.

1.6.3. $(k = \mathbb{C})$ Idem pour $A = \{z, |z| = 1\} \subset \mathbb{A}^1$.

1.6.4. Idem pour $A = \{(t^2, t^4), t \in k\} \subset \mathbb{A}^2$.

1.6.5. Idem pour $A = \{(t^2, t + 1/t), t \in k^*\} \subset \mathbb{A}^2$.

1.6.6. $(k = \mathbb{R})$ Idem pour $A = \{(t, \sin t), t \in \mathbb{R}\}$.

1.6.7. $(k = \mathbb{C})$ Idem pour $A = \{(z, \bar{z}), z \in \mathbb{C}\}$.

1.7. Topologie et applications polynomiales

1.7.1. Montrer que l'application $\Phi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3,\ t \longmapsto (t^2, t^2(t^2-1), t^3)$ est un homéomorphisme de $\mathbb{A}^1$ sur un ensemble algébrique $C \subset \mathbb{A}^3$.

1.7.2. Idem avec $\Phi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^3,\ t \longmapsto (t^2, t^3 - t^2, t^5)$.

1.7.3. $(k = \mathbb{R})$ Idem avec $\Phi : \mathbb{A}^1 \longrightarrow \mathbb{A}^2,\ t \longmapsto (t - t^4, 1 - t^3)$.

1.7.4. Soit C une courbe affine plane sur $\mathbb{C}$ telle que la première projection $x : C \longrightarrow \mathbb{A}^1$ soit injective. Montrer que $x(C)$ est ouvert dans $\mathbb{A}^1$.

1.8. Irréductibilité des courbes planes

1.8.1. ($k = \mathbb{R}$) Montrer que le polynôme $Y^2 + X^2(X-1)^2$ est irréductible mais que la courbe affine d'équation $Y^2 + X^2(X-1)^2 = 0$ est réductible.

1.8.2. ($k = \mathbb{R}$) Montrer que le polynôme $X^3 + X - X^2Y - Y$ est réductible mais que la courbe affine d'équation $X^3 + X - X^2Y - Y = 0$ est irréductible.

1.8.3. Montrer que la droite affine et les courbes affines planes d'équations $XY = 1$, $X^2 = X$ et $XY = 0$ sont deux à deux non isomorphes.

1.8.4. ($k = \mathbb{C}$) Montrer que deux coniques projectives irréductibles sont projectivement équivalentes.

1.8.5. ($k = \mathbb{C}$) Déterminer les valeurs de a, b, c, d, e et $f \in k$ pour lesquelles la conique C d'équation $aX^2 + bXY + cY^2 + dX + eY + f = 0$ (a, b, et c non tous nuls) est irréductible.

1.8.6. *(k algébriquement clos)* Si $\lambda \in k$, montrer que la cubique d'équation $Y^2 = X(X-1)(X-\lambda)$ est irréductible.

1.8.7. Montrer que la courbe C d'équation $(X^2 + XY + Y^2)(X^2 + Y^2) + X^3 + Y^3 = 0$ est irréductible sur $\mathbb{C}$. En va-t-il de même sur un corps algébriquement clos de caractéristique 2?, de caractéristique 3?

1.8.8. *(k algébriquement clos)* Montrer que la courbe affine plane C d'équation $X^2Y^2 + X^2 + Y^2 = 2XY(X + Y + 1)$ est irréductible.

1.8.9. Montrer que la courbe réelle plane C d'équation polaire $r = sin\ n\theta$, n impair est irréductible.

1.8.10. Montrer que la courbe réelle plane C d'équation polaire $r = sin\ 2\theta$ est irréductible.

1.9. Irréductibilité des courbes paramétrées

1.9.1. Soient $d_1, \ldots, d_n$ des entiers strictement positifs premiers entre eux et $C := \{(t^{d_1}, \ldots, t^{d_n}),\ t \in k\} \subset \mathbb{A}^n$. Montrer que C est un ensemble algébrique irréductible.

1.9.2. Montrer que la courbe paramétrée $C = \{(t^2,\ t^2(t^2 - 1),\ t^3),\ t \in k\}$ est irréductible.

1.9.3. Idem avec $C = \{(t^2,\ t^3 - t^2,\ t^5),\ t \in k\}$.

1.9.4. Idem avec $C = \{(t - t^4, 1 - t^3),\ t \in k\}$.