# Partie B

# Probabilités

1. Analyses combinatoire

**Principe fondamentale de dénombrable**

Théorème

Si une expérience peut se réaliser de n1 façons, une deuxième de n2 façons,…, une kéme de nk façons, alors la séquence des K opérations peut se réaliser de n1×n2×…×nk façons.

On peut résoudre ce problème, en utilisant une autre méthode qui est l’arbre d’étalement.

***L’arbre d’étalement***

1. **Arrangements sans répétition**
* Soit n objets distincts. On appelle un arrangement une manière de sélectionner p objets parmi les n et de les ranger dans des boîtes numérotées de 1 à p.
* Dans la première boîte, on peut mettre chacun des n objets. Dans la seconde boîte, on peut mettre chacun des n−1 objets restants, dans la troisième boîte, on peut mettre chacun des n−2 objets restants et ainsi de suite. Le nombre d’arrangements possibles est donc égal à :
* 1≤ p ≤n

1. **Arrangements avec répétition**

Lorsqu'un objet peut être observé plusieurs fois dans un arrangement, le nombre d’arrangement avec répétition de p objets pris parmi n, est alors :

1. **Permutations sans répétition**
* Une permutation sans répétition est un classement ordonné de n objets distincts. Considérons par exemple l’ensemble {1, 2, 3}. Il existe 6 manières d’ordonner ces trois chiﬀres :

{ 1, 2, 3} , { 1, 3, 2} , { 2, 1, 3} , { 2, 3, 1} , { 3, 1, 2} , { 3, 2, 1} .

* Si on dispose de n objets, chacun des n objets peut être placé à la première place.
* Il reste ensuite n−1 objets qui peuvent être placés à la deuxième place, puis n−2 objets pour la troisième place, et ainsi de suite. Le nombre de permutations possibles de n objets distincts vaut donc n × (n − 1) × (n − 2) × · · · × 2 × 1 = n!

1. **Permutations avec répétition**

Si l’on dispose de n objets appartenant à p groupes de tailles n1, n2,..., np, le nombre de permutations avec répétition est

1. **Combinaisons sans répétition**

On appelle combinaisons sans répétition de p objets tout ensemble de p objets pris parmi les n objets sans remise. Le nombre de combinaisons de p objets pris parmi n est



1. **Combinaisons avec répétition**

On appelle combinaisons avec répétition de p éléments choisis parmi les n éléments. Une disposition non ordonne de p éléments dans laquelle chaque élément peut figurer plus qu’une :



1. Espace Probabilisable

**Expérience aléatoire*:***

Une expérience aléatoire est une expérience dont les résultats ( éventualités ou issues possibles) ne sont pas connus à priori.

L’ensemble des issues possibles d’une expérience aléatoire s’appelle l’univers (espace fondamental), ou espace des événements, on le not Ω.

**Evénements**

C’est l’ensemble de tous les résultats caractérisés par une même propriétés lors d’une expérience aléatoire, c’est partie A de Ω.

* Les événements sont représentés par des lettres majuscule: A, B,…, A1,…, Ap,….etc.

 1. **Evénements élémentaires:**

c’est une partie de Ω qui ne contient qu’un seul élément, exemple: obtenir le chiffre 6 dans le cas de lancer un dé.

2. **Evénements composés:**

C’est un ensemble des événements élémentaires, exemple: dans l’expérience de lancer un dé, l’événement d’avoir un chiffre pair est un événement composé de 3 événement élémentaires sont {2}, {4}, {6}.

3. **Evénements contraire ou complémentaire:**

 De A est Ā qui contient toutes les éventualités de Ω qui ne sont pas dans A.

4. **Evénements compatibles et événements incompatibles:**

A et B deux événements incompatibles ( disjoints ou distincts), s’ils ne se réalisent pas ensemble, c’est-à-dire: A∩B=Φ

* **Relations et opérations sur les événements:**
1. **Intersection d’événements:**
2. L’intersection des événements A et B est constitué des issues appartenant à la fois à A et B, c’est événement noté A∩B est appelé l’événement «A et B»

**2. Réunion d’événements:**

La réunion des événements A et B est constitué des issues appartenant à A ou B, c’est événement noté AUB est appelé l’événement «A ou B»

1. **Inclusion d’événements:**

Un événements A inclus dans l’événement B, si la réalisation de A implique celle de B, on dit que A inclus dans B

**4. Système complet d’événements:**

n événements: A1, A2,…, An , constituent un système complet d’événements si et seulement si A1, A2,…, An forment une partition de Ω.

1. **Tribu des événements:**
2. Une famille de parties de Ω est une tribu sur Ω( algèbre de événements), si elle vérifie les 3 conditions suivantes:

1. **Espace probabilité:**
2. **Définition de la probabilité:**

P(A) représente la chance qu’il a de se réaliser :

A: un événement

P(A): la probabilité de réaliser l’événement A.

* Propriétés de la probabilité:
1. P(Ω)=1
2. P(Φ)=0
3. 1 ≤ P(A) ≤ 0
4. P(A)=1-P(Ā)
5. Pour tout couple (A, B) d’événements incompatibles : P(AUB)=P(A)+P(B) (P(A∩B)=Φ)
6. Pour tout couple (A, B) d’événements compatibles:

 P(AUB)=P(A)+P(B)-P(A∩B)

 P(A∩B)=P(A)+P(B)-P(AUB)

7. A, B, C trois événements compatibles:

* P(AUBUC)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A∩B)- P(A∩C)- P(B∩C)+ P(A∩B∩C)
* P(A ∩B∩C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AUB)- P(AUC)- P(BUC)+ P(AUBUC)
* **Probabilité sur un ensemble à événements élémentaires équiprobables:**
* Les événements A et B sont dits équiprobables si et seulement si P(A)=P(B)
* **Probabilité conditionnelle:**
1. Définition:

Soient A et B deux événements de l’ensemble fondamental Ω, avec B de probabilité non nulle ( P(B)≠0), on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B, notée P(A|B), la probabilité de réalisation de l’événement A sachant que l’événement B s’est réalisé, sa valeur est donnée par:

Avec P(B)≠0

1. Probabilités composées:

A partir de la définition de la probabilité conditionnelle, on peut en déduire un résultat intéressant:

 P(A∩B)= P(A|B).P(B)= P(B|A).P(A) avec P(B)≠0 et P(A)≠0

Ce résultat peut être généralisé au cas suivant:

P(A∩B ∩C)= P(A|B ∩C).P(B∩C)= P(A|B∩C). P(B|C).P(C)

3. Probabilité totales:

Si B1 , B2 ,…,Bn forment un système complet de Ω

forment un système complet de A.

4. Formule de Bayes:

Soit B1 , B2,…, Bn un système complet de l’ensemble fondamental Ω associé à une expérience aléatoire, et soit l’événement A dans Ω, on a:

* **Indépendance stochastique:**
1. **Indépendance de deux événements:**

On dit que l’événement A est indépendant de l’événement B si :

**2. Indépendance de plusieurs événements:**

A , B, C sont 3 événements indépendants si et seulement si :



Chapitre 3

# Variables aléatoires réelles

## Définition et propriétés des variables aléatoires réelles

Pour ce paragraphe, ($Ω,F,P)$ est un espace probabilisé.



**3. 2 Variables aléatoires réelles discrètes**

### 3.2.2 Loi de probabilité d'une variable aléatoire réelle discrète

Une v.a. est caractérisée par l’ensemble des valeurs qu’elle peut prendre et par l’expression mathématique de la probabilité de ces valeurs. Cette l’expression s’appelle la loi de probabilité (distribution de probabilité) de la v.a.

Reprenons l'exemple précédent

Ω={(1,1),(1,2),…,(6,6)} et X(Ω)={2,3,…,12}

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| pi=P(X=xi) | 1/36 | 2/36 | 3/36 | 4/36 | 5/36 | 6/36 | 5/36 | 4/36 | 3/36 | 2/36 | 1/36 |

Remarque :

Une loi de probabilité n’est établie que si : $\sum\_{i}^{}p\_{i}=1$

### Fonction de répartition

On appelle fonction de répartition d’une variable aléatoire X , la fonction FX telle que :

### Exemple

Les propriétés associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

### 3.2.3 Espérance mathématique

Si X est une v.a.d de la loi de probabilité (xi ,pi) définit sur un nombre fini (n) d’événements élémentaires alors :

### Exemple

### 3.2.4 Variance

Si X est une v.a.d ayant une espérance E(X), on appelle variance de X le réel :

### Exemple

## 2 . Variables aléatoires continues

### 2.1. définition

Une v.a est dite continue si elle peut prendre toutes les valeurs dans un intervalle donné (borné ou non borné).

### 2.2. Fonction densité de probabilité

On appelle densité de probabilité toute application continue par morceaux :

telle que :

Une v.a X définie sur un univers Ω est dite absolument continue, s’il existe une fonction densité de probabilité f telle que :

### Exemple :

Soit f une fonction définie par ( α constant et > 0 )

## 2.3. Fonction de répartition

Si comme pour les variables aléatoires discrètes, on définit la fonction de répartition de X par :

Les propriétés associées à la fonction de répartition sont les suivantes :

## Espérance

### Définition

Si X est une v.a.c de densité f, on appelle espérance de X, le réel E(X), défini par :

cette intégrale est convergente

## Propriétés de l’espérance

Si X et Y sont deux v.a définies sur un même univers Ω, admettant une espérance, alors :

1. E (X+Y) = E(X) + E(Y)
2. E(aX) = aE(X) $∀ x \in R$
3. Si X ≥ 0 alors E(X) ≥ 0
4. Si X est un caractère constant tel que : $∀ωϵ Ω X\left(ω\right)=k alors E\left(X\right)=k$

## 2.4. Variance

Si X est v.a d’espérance E (X), on appelle variance de X le réel :

## 2.4.2. Propriétés de la variance

Si X est une variable aléatoire admettant une variance alors :

# Chapitre 4

# Lois de Probabilité

##  Lois discrètes

## 1.1 Loi uniforme

Définition

Une distribution de probabilité suit une loi uniforme lorsque toutes les valeurs prises par la variable aléatoire sont équiprobables. Si n est le nombre de valeurs différentes prises par la variable aléatoire

Exemple :

La distribution des chiffres obtenus au lancer de dé (si ce dernier est non pipé) suit une loi uniforme dont la loi de probabilité est la suivante

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| xi | 1  | 2  | 3  | 4  | 5  | 6  |
| P(X=xi) | 1/6  | 1/6  | 1/6  | 1/6  | 1/6  | 1/6  |

E(X)=3.5 et var(X)=2.92

## 1.2 Loi de Bernoulli

Définition

Soit un univers Ω constitué de deux éventualités, S pour succès et E pour échec Ω={E,S}sur lequel on construit une variable aléatoire discrète, telle que :

Si S est réalisé, X=1

Si E est réalisé, X=0

E(X)=p et V(X)=pq

## 1.3 Loi binomiale

### Définition

On dit que S suit une loi binomiale de paramètres n et p.

La probabilité que S=k, c'est-à-dire l’obtention de k succès au cours de n épreuves indépendantes est

E(X)=np et V(X)=npq

## Loi de Poisson

Une v.a X à valeurs dans R suit une loi de poisson de paramètre λ (λ>0) si

où E(X)=λ et V(X)=λ

# Lois continues

## 2.1 Loi uniforme

### Définition

La v.a X suit une loi uniforme sur le segment [a,b] avec a<b si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{b-a} si x\in \left[a,b\right]\\0 si x\notin \left[a,b\right]\end{array}\right.$$

### La fonction de répartition

$$F\left(X\right)=\left\{\begin{array}{c}0 si x<a\\\frac{x-a}{b-a} si a\leq x\leq b\\1 si x>b\end{array}\right.$$

## 2.2 Loi exponentielle

### Définition

La v.a X suit une loi exponentielle de paramètre α>0 si sa densité de probabilité est donnée par :

$$f\left(x\right)=\left\{\begin{array}{c}αe^{-αx}, si x\geq 0\\0 si x\leq 0\end{array}\right.$$

### La fonction de répartition

$$F\left(X\right)=\left\{\begin{array}{c}0 si x<0\\1-e^{-αx} , si x\leq 0\end{array}\right.$$

# 2.3 Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

### Définition

Unev.a.c X suit une loi normale de paramètres (μ,σ) si sa densité de probabilité est donnée par :

# 2.3.3 Loi normale réduite

### Définition

Unev.a.c X suit une loi normale réduite si sa densité de probabilité est donnée par :

E(X)=1 et V(X)=0

### Relation avec la loi normale

Si X suit une loi normale N(μ,σ), alors $Z=\frac{X-μ}{σ}$, est une variable centrée réduite suit une loi normale réduite N(0,1).

### Calcul des probabilités d’une loi normale

On appelle fonction φ, la fonction de répartition d’une variable normale réduite X telle que :

Une application directe de la fonction φ est la lecture des probabilités sur la table de la loi normale réduite.