

TD 03 : Variables aléatoires

Exercice 01

Soit une variable aléatoire discrète associée à la loi de probabilité suivante. Calculer son espérance et sa variance.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,1	0,1	0,1	0,1	0,1	0,5

Exercice 02

Une variable aléatoire X est établie par la loi de probabilité suivante :

x_i	-2	-1	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,3	0,05	0,1	0,05	0,2	p

Soit F sa fonction de répartition.

- a) Calculer p .
- b) Calculer $F(0,5)$
- c) Calculer $E(X)$.
- d) Calculer $\sigma(X)$.

Exercice 03

Partie A.

Soit X la variable aléatoire dont la fonction densité est définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = 4e^{-4x}$.

- Calculer $F(5)$.
- Calculer $p(1 < X < 3)$.

Partie B.

Pour la fonction suivante, définie sur l'intervalle $[0;2]$, déterminer la valeur de k pour qu'elle soit une densité de probabilité.

$$f(x) = kx^3$$

Solution exercice 01

$$E(X) = 1 \times 0.1 + 2 \times 0.1 + \dots + 6 \times 0.5 = 4.5$$

$$V(X) = 0.1 \times 1^2 + 0.1 \times 2^2 + \dots + 0.5 \times 6^2 - 4.5^2 = 3.25$$

Solution exercice 02

$$0.3 + 0.05 + 0.1 + 0.05 + 0.2 + p = 1 \text{ donc } p = 0.3$$

$$\text{a) } F(0.5) = p(X \leq 0.5) = 0.3 + 0.05 + 0.1 = 0.45$$

$$\text{b) } E(X) = 0.3 \times (-2) + 0.05 \times (-1) + \dots + 0.3 \times 3 = 0.7$$

$$V(X) = 0.3 \times (-2)^2 + 0.05 \times (-1)^2 + \dots + 0.3 \times 3^2 - 7^2 = 4.8 - 0.7^2 = 4.31$$

$$\text{c) } \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 2.077$$

Solution Exercice 03

Partie A.

$$\begin{aligned} \text{a) } F(5) = P(X \leq 5) &= \int_0^5 f(x) dx = \int_0^5 4e^{-4x} dx = \left[\frac{4}{-4} e^{-4x} \right]_0^5 = \left[-e^{-4x} \right]_0^5 \\ &= (-e^{-4 \times 5}) - (-e^{-4 \times 0}) = -e^{-20} + 1 \cong 0.99 \end{aligned}$$

$$\text{b) } P(1 < X < 3) = \int_1^3 f(x) dx = \left[-e^{-4x} \right]_1^3 = (-e^{-4 \times 3}) - (-e^{-4 \times 1}) = -e^{-12} + e^{-4} \cong 0.0183$$

Partie B.

f est une densité de probabilité ssi

$$\int_0^2 f(x) dx = 1 \Leftrightarrow \int_0^2 kx^3 dx = 1 \Leftrightarrow \left[k \frac{x^4}{4} \right]_0^2 = 1 \Leftrightarrow \left(k \times \frac{2^4}{4} \right) - \left(k \times \frac{0^4}{4} \right) = 1 \Leftrightarrow 4k = 1 \Leftrightarrow k = \frac{1}{4}$$