مقدمة

تصف مقاييس النزعة المركزية ومقاييس التشتت خصائص معينة في البيانات والتوزيعات التكرارية، لكن توجد خصائص أخرى لا يمكن وصفها أو إبرازها إلا من خلال مقاييس الشكل، فقد نصادف توزيعين لهما نفس المتوسط ونفس الانحراف المعياري لكنهما يختلفان في الشكل العام للتوزيع.

عند رسم التمثيل البياني (المنحنى التكراري) تصادفنا عدة أشكال تبين توزيع البيانات محل الدراسة، من بين أشكال التوزيعات التي يمكن أن نصادفها نجد: التماثل التام، الالتواء والتفرطح.

قبل دراسة أشكال التوزيعات التكرارية سوف نقوم بدراسة العزوم[1] التي تستخدم في قياس الالتواء والتفرطح.

نتطرق في هذه المحاضرة إلى:

- العزوم.
- التماثل وحالة الالتواء.
- التفرطح

1.العزوم (Moments):

تعرف العزوم لمجموعة من القيم حول أي وسيط فرضي (A). فإذا كان لدينا مجموعة من القيم($x_1,x_2,\dots x_n$)، فإن العزم حول الوسط الفرضي يعرف كما يلي:

$$m_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-A)^k}{n},\dots\dots k=0,1,2,\dots\dots\dots(1)$$

1.1.العزوم حول الصفر:

إذا أفترضنا أن A=0 فبالتعويض في العلاقة أعلاه نجد أن:

في حالة وجود سلسلة إحصائية	في حالة البيانات المبوبة
$m_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,k}}{n}$	$m_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}n_i x_i^{\,k}}{n}$

2.1.العزوم حول المتوسط الحسابي:

إذا فرضنا أن $A=\bar{X}$ وبالتعويض في المعادلة (1) فإن:

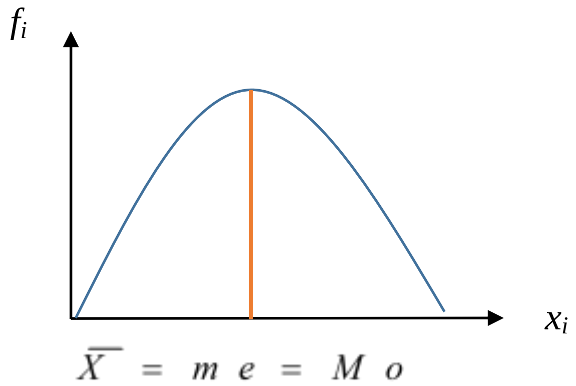
في حالة وجود سلسلة إحصائية	في حالة البيانات المبوبة
$m_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^k}{n}$	$m_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}n_i(X_i-\bar{X})^k}{n}$

[1] العزم بمعناه الملموس مصطلح مكانيكي يشير إلى مقياس القوم حول نقطة مركزية.

فإذا كانت:
$$k=0 \Rightarrow m_0=1$$
$$k=1 \Rightarrow m_1=0$$
$$k=2 \Rightarrow m_2=\sigma_X^2$$

2.التماثل التام(Symétrique) : نقول أن التوزيع التكراري متماثل أو توبع تكراري معتدل الالتواء إذا كان الشق الأيمن مماثل تماما للشق الأيسر، في هذه الحالة تسمى نقطة تقاطع نقطة الانعطاف مع محور الفواصل بالنقطة المركزية للتوزيع أو نقطة التماثل، وتكون مساوية للمتوسط الحسابي، الوسيط والمنوال؛ أي $\bar{X}=me=Mo$

الشكل 1: التوزيع المتماثل



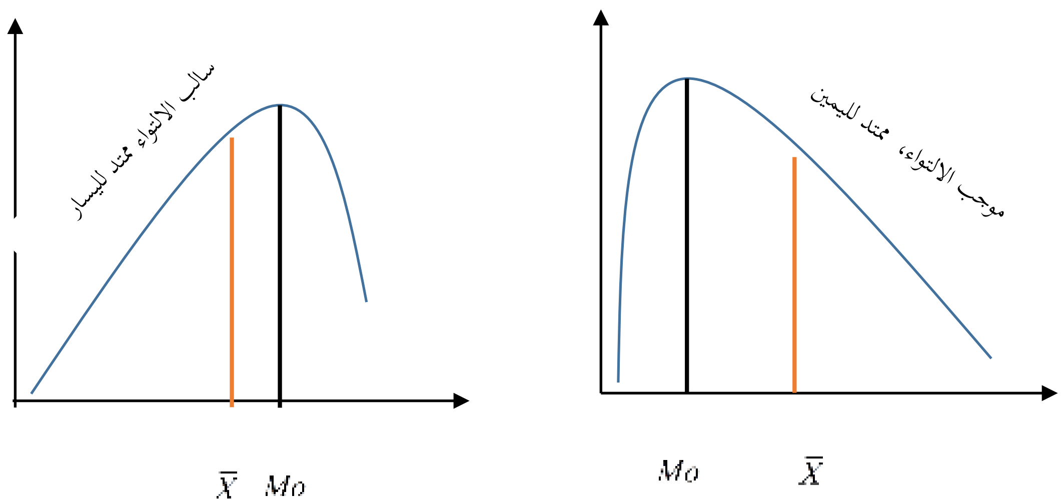
3.حالة الالتواء (Asymétrique) : يعرف الالتواء بأنه درجة البعد عن التماثل، وندرس الالتواء في حالة التوزيعات التكرارية وحيدة القمة. في هذه الحالة نجد أن التوزيعات إما ملتوية جهة اليمين أو ملتوية جهة اليسار.

تقاس حالةالالتواء بعدة مقاييس منها:

1.3.قيمة الالتواء: هي عبارة عن الفرق بين المتوسط الحسابي والمنوال؛ أي $VA=\bar{X}-Mo$ وهنا نجد حالتين:

- ✓ سالب الالتواء إذا كان $\bar{X} \prec Mo$ وهنا يكون المنحى أو التوزيع التكراري ممتد جهة اليسار.
- ✓ موجب الالتواء إذا كان $\bar{X} \succ Mo$ وهنا يكون التوزيع التكراري ممتد جهة اليمين.

الشكل 2: أنواع الالتواء



2.3 معامل بيرسون للالتواء: قيمة الالتواء لا تسمح بمقارنة إلتواء ظاهرتين مختلفتين، لذلك يلجأ إلى معامل بيرسون للالتواء

$$P_1 = \frac{VA}{\sigma_X} = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma_X}$$

يكون معامل بيرسون محصورا بين ± 1، أي $-1 \leq P_1 \leq +1$

وهنا نميز بين حالتين:

- ✓ إذا كان P_1 موجبا دل ذلك على أن التوزيع ممتدا جهة اليمين، أي موجب الالتواء.
- ✓ إذا كان P_1 سالبا دل ذلك على أن التوزيع ممتدا جهة اليسار، أي سالب الالتواء.

ملاحظة هامة: إذا كان لمجموعة من البيانات منوال واحد فإن الوسيط يقع بين المتوسط الحسابي والمنوال ويحقق العلاقة التالية: $\frac{\bar{X} - Mo}{3} = \bar{X} - Me \Rightarrow \bar{X} - Mo = 3(\bar{X} - Me)$

وعلى هذا الأساس نجد معامل بيرسون P_2، حيث: $P_2 = \frac{3(\bar{X} - Me)}{\sigma_X}$

3.3.معامل الالتواء الربيعي (معامل باولي): خاص بالتوزيعات التكرارية المفتوحة ويحسب كما يلي:

$$y = \frac{(Q_3 - Q_2) - (Q_2 - Q_1)}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Q_2}{Q_3 - Q_1} = \frac{Q_3 + Q_1 - 2Me}{Q_3 - Q_1}$$

تتراوح قيمة هذا المعامل بين ± 1 ويستعمل في حالة التوزيعات التكرارية المفتوحة أو التي تكون فيها قيم متطرفة.

حيث إذا كان:

- ✓ المعامل y قريب من الصفر $(y \approx 0)$ فإن التوزيع قريب من التماثل.

✓ موجب فإن التوزيع ممتد لليمين.

✓ سالب التوزيع ممتد لليسار.

4.3.معامل فيشر للالتواء: هو النسبة بين العزم الثالث حول المتوسط الحسابي ومكعب الانحراف المعياري، أي:

$$A_F = \frac{m_3}{\sigma_X^3}$$ من

إذا كان:

✓ $A_F = 0$ فإن التوزيع معتدل.

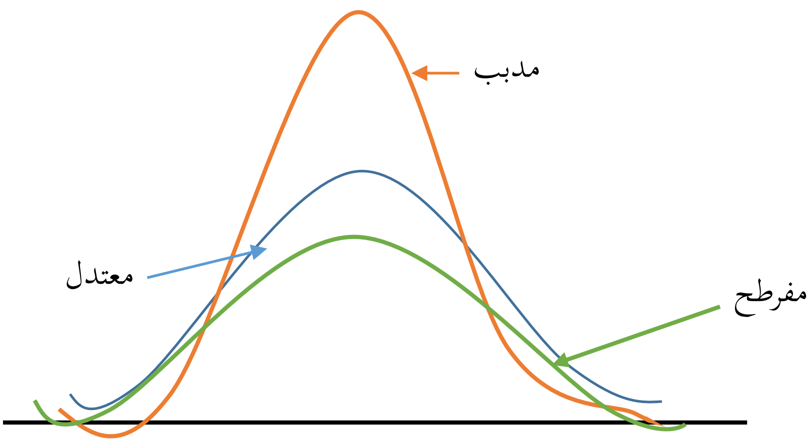
✓ $A_F \prec 0$ فإن التوزيع ملتو جهة اليسار.

✓ $A_F \succ 0$ فإن التوزيع ملتو جهة اليمين.

3.التفرطح (Aplatissement)

1.3.تعريف التفرطح: يشير التفرطح إلى درجة تدبب أو درجة تبسط التوزيع في المنطقة المحيطة بالمنوال، وتقاس درجة تدبب أي توزيع بالنسبة إلى تدبب التوزيع الطبيعي. فإذا كانت قاعدة التوزيع ضيقة وطرفاه مرتفعين فإنه يكون مدببا، أما إذا كانت قاعدة التوزيع واسعة وطرفاه منخفضين فإنه يكون مفرطحا.

الشكل 3: مقارنة التوزيع المفرطح بالتوزيع المدبب والتوزيع المعتدل



2.3.قياس التفرطح: يعتمد قياس التفرطح على العزم الرابع حول المتوسط الحسابي وبقسمته على مربع العزم الثاني حول المتوسط لإزالة أثر الوحدة. $B = \frac{m_4}{\sigma_X^4}$، حيث أن: m_4 العزم الرابع حول المتوسط الحسابي، σ_X^4 مربع التباين.

معامل التفرطح للتوزيع الطبيعي $B = 3$ ولذلك نجد أن معامل التفرطح يعرف بالمقدار $(B-3)$ فإن:

✓ إذا كان $B = 0$ فإن التوزيع معتدل.

✓ إذا كان المعامل موجب فإن التوزيع مدبب. وإذا كان المعامل سالب فإن التوزيع مفرطح.

4.مثال تطبيقي 4

أدرس شكل التوزيع التكراري للمثال التطبيقي 1 وذلك من خلال حساب:

- ✓ معامل بيرسون للالتواء.
- ✓ معامل فيشر للالتواء.
- ✓ معامل التفرطح.

الحل:

1.4.معامل بيرسون للالتواء

$\bar{X} = 159.2$

$Mo = 159.44$

$\sigma_X = 5.97$

$$P_1 = \frac{\bar{X} - Mo}{\sigma_X} = \frac{159.2 - 159.44}{5.97}$$

$$P = -0.04$$

نلاحظ أن معامل بيرسون $(P = -0.04 \approx 0)$ وبالتالي التوزيع قريب من التماثل

2.4.معامل فيشر للالتواء ومعامل التفرطح

Classes	n_i	$(x_i - \bar{X})$	$(x_i - \bar{X})^3$	$n_i(x_i - \bar{X})^3$	$(x_i - \bar{X})^4$	$n_i(x_i - \bar{X})^4$
[140-145[	1	-16.7	-4657.463	-4657.463	77779.6321	77779.6321
[145-150[	1	-11.7	-1601.613	-1601.613	18738.8721	18738.8721
[150-155[	9	-6.7	-300.763	-2706.867	2015.1121	18136.0089
[155-160[	17	-1.7	-4.913	-83.521	8.3521	141.9857
[160-165[	16	3.3	35.937	574.992	118.5921	1897.4736
[165-170[	3	8.3	571.787	1715.361	4745.8321	14237.4963
[170-175[	3	13.3	2352.637	7057.911	31290.0721	93870.2163
	50			298.8		224801.685

معامل فيشر للالتواء

$$A_F = \frac{m_3}{\sigma_X^3}$$

$$\sigma_X = 5.97$$

$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (X_i - \bar{X})^3}{n} = \frac{298.8}{50} = 5.97$$

$$A_F = \frac{m_3}{\sigma_X^3} = \frac{5.97}{5.97^3} = 0.03 \approx 0$$

نلاحظ أن معامل فيشر $(A_F = 0.03 \approx 0)$ وبالتالي التوزيع قريب من التماثل.

معامل التفرطح

$$B = \frac{m_4}{\sigma_X^4}$$

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{n} n_i (X_i - \bar{X})^4}{n} = \frac{224801.685}{50} = 4496.03$$

$$B = \frac{m_4}{\sigma_X^4} = \frac{4496.03}{(5.97)^4} = 3.54$$

$$B - 3 = 3.54 - 3 = 0.54$$

نلاحظ أن معامل التفرطح قريب من 3 وبالتالي يميل إلى الاعتدال (توزيع قريب من الطبيعي)