**Chapitre 2**

# Introduction à la commande optimale

## 1. Introduction

Le problème général de la détermination d'une commande optimale d'un système peut se résumer comme suit :

Un système étant donné et défini par son modèle, trouver parmi les commandes admissibles celle qui permet à la fois :

- De vérifier les conditions initiales et finales
- De satisfaire diverse contraintes imposés
- D'optimiser un critère choisi

## 2. position du problème

Le système étudier est décrit dans l'espace d'état sous la forme :

$$\dot{x} = f(x, u, t)$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ représente le vecteur d'état et $x \in \mathcal{R}^m$ la commande. Les conditions initiales et finales $x_0$ et $x_f$ prise au instants respectives $t_0$ et $t_f$ doivent satisfaire les conditions :

$k(x_0, t_0) = 0$ et $l\left(x_f, t_f\right) = 0$

La commande optimale, $u^*$, cherché doit minimiser le critère suivant :

$$J = \int_{t_0}^{t_f} \rho(x, u, t)dt + g\left(x_0, t_0, x_f, t_f\right)$$

Le terme $g\left(x_0, t_0, x_f, t_f\right) \in \mathcal{R}$ est appelé parti terminale.

***Le problème de commande optimale consiste alors à trouver la commande $u^*$ minimisant le critère J : $u^* = min_{u \in U} J$.***

## 3. Principe de minimum de Pontriaguine :

La formulation du problème étant inchangé, notons :

$H(x, u, \lambda, t) = \rho(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$

Le Hamiltonien du système. Les conditions d'optimalité peuvent alors s'exprimer simplement par les équations canoniques de Hamilton et le principe de minimum.

### 3.1. Equation canonique de Hamilton

$$\dot{x} = H_\lambda$$

$$\dot{\lambda} = -H_x$$

***Principe de minimum :*** *la commande optime est celle qui minimise le Hamiltonien, les contraintes étant satisfaites, autrement dit :*

$$H(x^*, u^*, \lambda^*) \leq H(x^*, u, \lambda^*), \qquad \forall u \in U$$

### 3.2. Expression des conditions de transversalité :

A l'instant initiale

$$\left(-H(t_0) - g_{t_0}\right)\delta t_0 + \left(\lambda(t_0) - g_{x_0}\right)^T \delta x_0 = 0$$

avec $k_{t_0}\delta t_0 + k_{x_0}\delta x_0 = 0$

A l'instant finale

$$\left(-H(t_f) - g_{t_f}\right)\delta t_f + \left(\lambda(t_f) - g_{x_f}\right)^T \delta x_f = 0$$

avec $k_{t_f}\delta t_f + k_{x_f}\delta x_f = 0$

**Remarque :** si aucun contrainte (de type saturation) n'est imposé sur $u(t)$ à l'instant $t$, on a : $\frac{\partial H}{\partial t} = 0$.

**Exemple 01**

Trouvez le plus court chemin $x(t)$ entre deux points .

**En** utilisant le Théorème de Pythagore, la longueur d'une trajectoire $x(t)$ entre deux points $t = a$ et $t = b$ se calcule comme suit :

$$dl^2 = dx^2 + dt^2 \quad \rightarrow \quad dl = \sqrt{dx^2 + dt^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt \quad \rightarrow \quad l = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\, dt$$
$$= \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}\, dt$$

où $l$ est la longueur de $x(t)$ entre $a$ et $b$.

Notre objective est de trouver $x(t)$ de longueur $l$ minimal, c'est-à-dire trouver $x(t)$ qui minimise

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{x}^2(t)}dt$$

Pour assurer que cette trajectoire liée deux points $(a, A)$ et $(b, B)$ dans le plane, nous avons besoin d'imposer la condition

$$x(a) = A$$

$$x(b) = B$$

Pour mettre ce problème sous forme d'un problème de commande optimale, on définit l'entrée par :

$$\dot{x} = u$$

Donc $J$ devient

$$J = \int_a^b \sqrt{1 + u^2}dt$$

L'Hamiltonien est tel que :

$$H = \sqrt{1 + u^2} + \lambda u$$

Les conditions d'optimalités sont :

$$\dot{x} = H_\lambda = u$$

$$-\dot{\lambda} = H_\lambda = 0$$

$$0 = H_u = \lambda + \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}$$

Ces trois dernières équations définie la forme de la solution, la dernière équation nous donne

$$u = -\frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}}$$

la deuxième équation prouve que le paramètre $\lambda$ est un constant. D'où, la commande optimale est alors une constante, c'est-à-dire

$$u = const$$

En utilisant la première équation on obtient la forme suivante :

$$x(t) = c_1 t + c_2$$

Pour déterminer $c_1$ et $c_2$, on utilise les conditions d'extrémité imposés sur la trajectoire cherché

$$x(t) = \frac{A - B}{a - b}t + \frac{aB - bA}{a - b}$$

La trajectoire optimale entre deux points est donc une ligne droite.

## 4. Commande optimale quadratique des systèmes linéaires

L'évolution du système est décrite par les équations :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A(t)x + B(t)u} \\ \boldsymbol{y = C(t)x} \\ \boldsymbol{e = r - y} \end{cases}$$

où $x \in \mathcal{R}^n$ représente le vecteur d'état, $x \in \mathcal{R}^m$ le vecteur commande, $y \in \mathcal{R}^p$ le vecteur de sortie, $r$ le vecteur de consigne (référence) et $e$ le vecteur erreur. Le cas $r = 0$ correspond au problème de régulation et le cas $r$ quelconque correspond à une problème de poursuite.

Le critère à minimiser s'écrit :

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} (e^T Q(t) e + u^T R(t) u) dt + \frac{1}{2} e_f^T F e_f$$

où $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T \geq 0$ et $F = F^T \geq 0$.

Le critère prend la forme :

$$J = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f} ((r - Cx)^T Q (r - Cx) + u^T R u) dt + \frac{1}{2}(r - Cx)_f^T F (r - Cx)_f$$

et le Hamiltonien s'écrit :

$$H = \frac{1}{2}[(r - Cx)^T Q (r - Cx) + u^T R u] + \lambda^T (Ax + Bu)$$

D'où $\dot{\lambda} = -A^T \lambda + C^T Q (r - Cx)$

La minimisation de $H (H_u = B^T \lambda + Ru)$ conduit à la commande optimale : $\boldsymbol{u^* = -R^{-1} B^T \lambda}$.

Les conditions de transversalité à l'instant finale s'écrivent :

$$\left(-H_f - g_{t_f}\right)\delta t_f + \left(\lambda_f - g_{x_f}\right)^T \delta x_f = 0$$

avec ici $g = \frac{1}{2}(r - Cx)_f^T F (r - Cx)_f$, l'état finale étant libre, il vient :$\lambda_f = C_f^T F (r - Cx)_f$

Le système optimal prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax - BR^{-1}B^T\lambda} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{-A^T\lambda + C^TQr - C^TQCx} \end{cases}$$

avec les conditions terminales $x(t_0) = x_0$ et $\lambda_f = C_f^T F (r - Cx)_f$.

## 3.1. Problème de régulation

### 3.1.1. Détermination d'un bouclage optimal

Les propriétés des systèmes linéaires permettent la recherche d'une commande optimale en boucle fermée.

Le système ci-dessus s'écrit

$$\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{x}}\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{A} & -\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}\\ -\boldsymbol{C}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{C} & -\boldsymbol{A}^{\boldsymbol{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}\\ \boldsymbol{\lambda}\end{bmatrix}$$

Nous noterons $\Phi(t,t_0)$ la matrice de transition associée. Un partitionnement en blocks $n\times n$ de la matrice $\Phi(t,t_0)$ permet d'écrire la solution de ce système sous la forme :

$$\begin{bmatrix}x\\ \lambda\end{bmatrix}=\Phi(t,t_0)\begin{bmatrix}x_0\\ \lambda_0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\Phi_{11}(t,t_0) & \Phi_{12}(t,t_0)\\ \Phi_{21}(t,t_0) & \Phi_{22}(t,t_0)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_0\\ \lambda_0\end{bmatrix}$$

En portant les formules de $x_f$ et $\lambda_f$ tirés de l'équation précédente dans la condition de transversalité $\lambda_f=-C_f^TFC_fx_f$, il vient :

$$\Phi_{21}(t_f,t_0)x_0+\Phi_{22}(t_f,t_0)\lambda_0=-C_f^TFC_f\big(\Phi_{11}(t_f,t_0)x_0+\Phi_{12}(t_f,t_0)\lambda_0\big)$$

et en résulte, l'inversion étant toujours possible :

$$\lambda_0=-\big[\Phi_{21}(t_f,t_0)+C_f^TFC_f\Phi_{12}(t_f,t_0)\big]^{-1}\big[\Phi_{21}(t_f,t_0)+C_f^TFC_f\Phi_{11}(t_f,t_0)\big]x_0$$

Soit pour $t_f$ donné la relation

$$\lambda_0=P(t_0)x_0$$

Un calcul d'optimalité à partir d'une instant $t$ quelconque pris comme origine donnerait la même expression formelle. Il en résulte que la solution optimale est telle existe une matrice $K(t)$ telle que

$$\forall t,\lambda(t)=P(t)x(t)$$

$$P(t)=-\big[\Phi_{21}(t_f,t_0)+C_f^TFC_f\Phi_{12}(t_f,t_0)\big]^{-1}\big[\Phi_{21}(t_f,t_0)+C_f^TFC_f\Phi_{11}(t_f,t_0)\big]$$

De plus, compte tenu des propriétés de la matrice de transition, $\Phi(t,t)=I$, il vient : $K(t_f)=-C_f^TPC_f$.

Cette approche nous donne directement une structure de commande optimale en boucle fermée :

$$\boldsymbol{u}^*=-\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$$

### 3.1.2. Calcul direct du gain $\boldsymbol{K}(\boldsymbol{t})$

Sachant que $P(t)$ existe, posons $\lambda=Px$, il vient $\dot{\lambda}=P\dot{x}+\dot{P}x$, d'après l'équation du système optimal on obtient

$-A^T\lambda-C^TQCx=P(Ax-BR^{-1}B^T\lambda)+\dot{P}x$

En substituant $\lambda = Px$ dans l'équation précédent, on trouve

$$\left[\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T QC\right]x = 0$$

Cette condition est vraie quel que soit $x$, ce qui implique que $K$ solution de l'équation de Riccati matricielle :

$\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T QC = 0$ avec la condition finale $K_f = -C_f^T F C_f$

### 3.1.3. Cas stationnaire, horizon infini

Dans le cas stationnaire les matrices $A, B, C, Q$ et $R$ sont constantes et il vient :

$$\boldsymbol{\frac{\partial H}{\partial t} = H_t = 0},$$

ce qui implique que le Hamiltonien est constant. Come de plus le Hamiltonien est nul à l'instant finale puisque $t_f$ est non fixé, il vient :

$$H \equiv 0$$

soit, $\forall x$ :

$$\frac{1}{2}[x^T C^T QCx + x^T PBR^{-1}B^T Px] + x^T P(A - BR^{-1}B^T P)x = 0$$

D'où il résulte :

$$PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T QC = 0$$

La structure de la commande obtenue est alors identique à celle utilisée dans la méthode de placement de pôles par retour d'état. De plus, cette structure bouclée obtenue est asymptotiquement stable, en effet, prenons

$$V(x) = x^T Px$$

Comme fonction de Lyapunov, il vient

$$\frac{\partial V(x)}{\partial t} = \dot{x}^T Px + x^T \dot{P}x + x^T P\dot{x}$$

$$= (Ax - BR^{-1}B^T Px)^T Px + x^T \dot{P}x + x^T K(Ax - BR^{-1}B^T Px)$$

$$= x^T (A - BR^{-1}B^T P)^T Px + x^T \dot{P}x + x^T P(A - BR^{-1}B^T P)x$$

$$= x^T\left[(A - BR^{-1}B^T P)^T K + \dot{P} + P(A - BR^{-1}B^T P)\right]x$$

Compte tenu de l'équation de Riccati, on obtient

$$\frac{\partial V(x)}{\partial t} = -x^T (PBR^{-1}B^T P + C^T QC)x$$

Expression est définie négative puisque $R$ est définie positive et $Q$ non-négative, nous pouvons donc conclure à la stabilité asymptotique de la structure bouclée.

### 3.2. Problème de poursuite

Le système reste lui-même, l'intégration des équation d'état donne une expression de la forme :

$$\begin{bmatrix} x \\ \lambda \end{bmatrix} = \Phi(t,t_0)\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + v(t,t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(t,t_0) & \Phi_{12}(t,t_0) \\ \Phi_{21}(t,t_0) & \Phi_{22}(t,t_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1(t,t_0) \\ v_2(t,t_0) \end{bmatrix}$$

où $\Phi(t,t_0)$ la matrice de transition associé et $v(t,t_0)$ l'effet des consignes sur l'intervalle $[t_0,t]$. Les conditions terminales restent inchangées

$x(t_0) = x_0$

$\lambda(t_f) = [C^T F(r - Cx)]_f$

Il vient

$$\begin{aligned} &\Phi_{21}(t_f,t_0)x_0 + \Phi_{22}(t_f,t_0)\lambda_0 + v_2(t_f,t_0) \\ &\qquad = -C_f^T F\left[r_f - C_f\left(\Phi_{11}(t_f,t_0)x_0 + \Phi_{12}(t_f,t_0)\lambda_0 + v_1(t_f,t_0)\right)\right] \end{aligned}$$

En prenant comme origine l'instant $t$, on obtient une expression de la forme :

$$\lambda = Px + q$$

où $K$ a été définie précédemment et $q$ satisfait la relation

$$q = \left[\Phi_{22}(t_f,t_0) + C_f^T F C_f \Phi_{12}(t_f,t_0)\right]^{-1}\left[C_f^T F r_f - C_f^T F C_f v_1(t_f,t_0) - v_2(t_f,t_0)\right]$$

$q_f = C_f^T F r_f$

La commande optimale s'écrit alors sous la forme :

$u^* = -R^{-1}B^T(Px + q)$

#### 3.2.1 détermination de $q$

Posons $\lambda = Px + q$

il vient : $\dot{\lambda} = \dot{P}x + P\dot{x} + \dot{q}$

ce qui implique en considérant l'équation du système optimal

$$-A^T(Px+q) + C^T Q r - C^T Q C x = \dot{P}x + P\left(Ax - BR^{-1}B^T(Px+q)\right) + \dot{q}$$

Ce qui s'écrit sous la forme

$\left(\dot{P} + PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + C^T Q C\right) + \dot{q} + (A^T - PBR^{-1}B^T)q - C^T Q r = 0$

Qui doit être satisfait pour tout $x$, on trouve donc $K$ est la solution de l'équation de Riccati obtenu dans le problème de régulation, et $q$ est la solution de

$$\dot{q} + (A^T - PBR^{-1}B^TP)q - C^TQr = 0$$

Avec la condition finale $q_f = C_f^T F r_f$.

### 3.2.2. Cas stationnaire, horizon infini

Dans ce cas la consigne $r(t)$ est constante. Et en écrivant que le Hamiltonien est identiquement nul, il vient, $\forall x$ :

$$\frac{1}{2}x^T[PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + C^TQC]x + x^T(A^Tq - PBR^{-1}B^Tq - C^TQr) + \frac{1}{2}(r^TQr - q^TBR^{-1}B^Tq) = 0$$

On retrouve l'équation de Riccati algébrique et on obtient les relations :

$$A^Tq - PBR^{-1}B^Tq - C^TQr = 0$$

$$q^TBR^{-1}B^Tq = r^TQr$$

cela implique que $\dot{q} = 0$, donc $q$ est constant. Comme il a été montré que le système bouclé était asymptotiquement stable, la matrice $A - BR^{-1}B^TP$ est inversible, on obtient de la première équation :

$$q = (A - BR^{-1}B^TP)^{-T}C^TQr$$

et de la deuxième, la condition nécessaire du résolution du problème de poursuite :

$$Q - QC(A - BR^{-1}B^TP)^{-1}BR^{-1}B^T(A - BR^{-1}B^TP)^{-T}C^TQ = 0$$

**Exemple 2**

Soit le système sous la forme d'espace d'état suivant :

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u \quad \text{et} \quad y = [1 \quad -1]\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Nous recherchons le régulateur qui minimise le critère

$$J = \int_0^{+\infty} (y^2 + \rho u^2)dt$$

En appliquant l'équation de Riccati :

$$PA + A^TP - PBR^{-1}B^TP + C^TC = \mathbf{0}$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\rho^{-1}[0 \quad 1]\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}[1 \quad -1]=0$$

Ce qui implique

$$\begin{bmatrix} 0 & p_{11} \\ 0 & p_{21} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ p_{11} & p_{12} \end{bmatrix}+\frac{1}{\sqrt{1+2\sqrt{\rho}}}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix}[p_{21} \quad p_{22}]+\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}=0$$

Il en résulte le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} p_{11}-\dfrac{1}{2\rho}p_{12}p_{22}-1=0 \\ p_{21}+p_{12}-\dfrac{1}{\rho}p_{22}^2+1=0 \\ p_{11}-\dfrac{1}{\rho}p_{21}p_{22}-1=0 \\ -\dfrac{1}{\rho}p_{12}p_{21}+1=0 \end{cases}$$

D'où

$$P=\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+\sqrt{1+2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{\rho\left(1+2\sqrt{\rho}\right)} \end{bmatrix}$$

En fin

$$u=-R^{-1}B^TPx=-\frac{1}{\rho}[0 \quad 1]\begin{bmatrix} 1+\sqrt{1+2\sqrt{\rho}} & \sqrt{\rho} \\ \sqrt{\rho} & \sqrt{\rho\left(1+2\sqrt{\rho}\right)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$=-\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\rho}} & \dfrac{\sqrt{1+2\sqrt{\rho}}}{\rho} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Le retour d'état optimal est tel que

$$K=-\begin{bmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{\rho}} & \dfrac{\sqrt{1+2\sqrt{\rho}}}{\rho} \end{bmatrix}$$