

Introduction aux systèmes dynamiques

Allal MEHAZZEM

Centre Universitaire Abdlehafidh Boussouf Mila

2020 2021

Systemes linéaires dans \mathbb{R}^2

Dans cette section nous discutons les différents portraits de phase possibles dans le plan \mathbb{R}^2 pour le système linéaire plan

$$\dot{x} = Ax \quad (.)$$

avec $x \in \mathbb{R}^2$ et A une matrice carré (2×2). Pour cela on s'intéresse dans un premier temps au système

$$\dot{y} = By \quad (..)$$

avec $B = P^{-1}AP$ (B a l'une des formes $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$),

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ ou } B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Le portrait de phase de (.) est alors obtenu à partir du portrait de phase de (..) en utilisant la transformation linéaire des coordonnées $x = Py$.

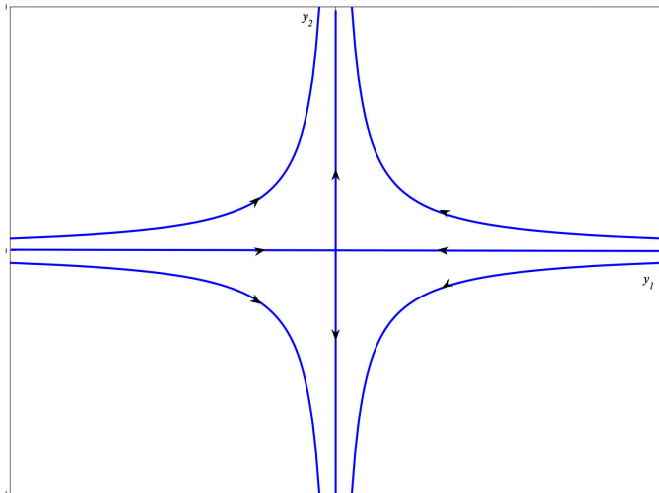


Figure 2.1: Point selle (col)

Cas 1 : Valeurs propres réelles de signes opposés

Soit

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} \text{ avec } \lambda < 0 < \mu$$

Dans ce cas la solution de (..) avec la condition initiale

$$y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \text{ donnée par :}$$

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\mu t} \end{pmatrix} y_0 \quad (\dots)$$

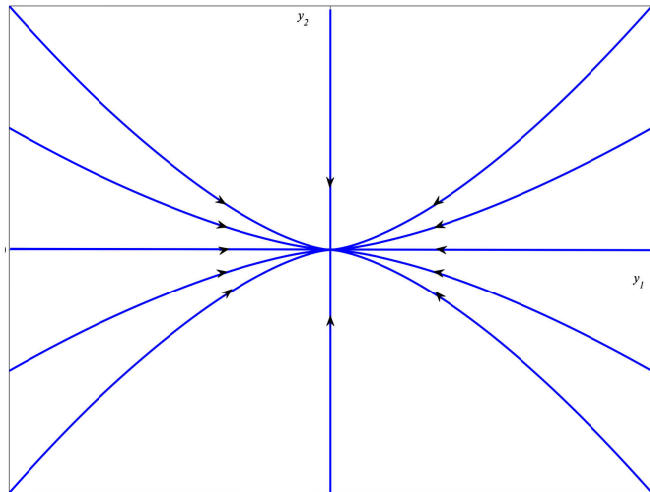


Figure 2.2: Nœud stable $\mu < \lambda < 0$.

Alors $y_1(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et $y_2(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$ l'origine est appelé point selle (col).

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = \frac{c}{|y_1|^\alpha}$ avec $c = c_2|c_1|^\alpha$ et $\alpha = -\frac{\mu}{\lambda} > 0$. La figure () illustre ce portrait de phase (si $\mu < 0 < \lambda$ les flèches seront inversés).

Le portrait de phase de (.) est linéairement équivalent au portrait de phase de (..)

Cas 2 : Différentes valeurs propres réelles de mêmes signes:

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu < \lambda < 0$.

La solution de (..) est donnée par (...).

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ l'origine est appelé noeud stable.

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = c|y_1|^\alpha$ avec $c = \frac{c_2}{|c_1|^\alpha}$ et $\alpha = \frac{\mu}{\lambda} > 1$.

La figure (2) illustre ce portrait de phase (si $\lambda < \mu < 0$ les axes seront permutés). Si $\mu, \lambda > 0$ les flèches seront inverses, dans ce cas l'origine est appelé noeud instable. Le portrait de phase de (.) est linéairement équivalent au portrait de phase de (..)

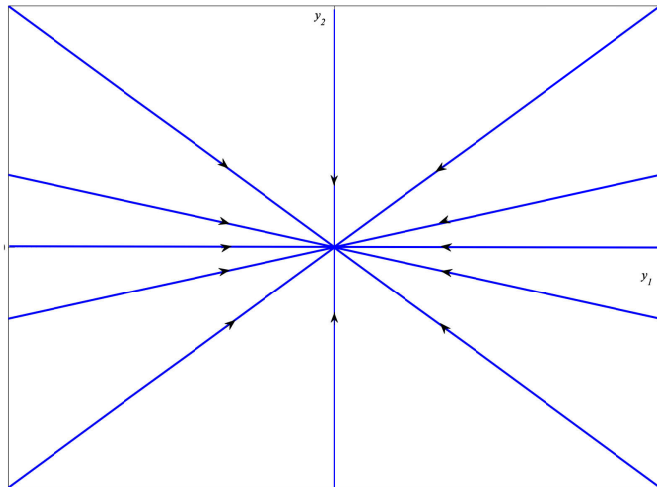


Figure 2.3: Nœud propre stable $\mu = \lambda < 0$. avec deux vecteurs propres indépendants

Cas 3 : Valeurs propres réelles égales

On distingue deux cas

a) Deux vecteurs propres indépendants

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu = \lambda < 0$.

la solution de (..) avec la condition initiale $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

donnée par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} y_0 \quad (\dots)$$

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ l'origine est appelée noeud propre stable.

En éliminant t de y_1 et y_2 on obtient $y_2 = c|y_1|$ avec $c = \frac{c_2}{|c_1|}$.

La figure (3) illustre ce portrait de phase (si $\lambda = \mu > 0$ les flèches seront inversées, dans ce cas l'origine est appelée noeud propre instable. Le portrait de phase de

(.) est linéairement équivalent au portrait de phase de (..)

b) Un seul vecteur propre indépendant

Soit $B = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$ avec $\mu = \lambda < 0$.

la solution de (..) avec la condition initiale $y(0) = y_0 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$

donnée par :

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} y_0 \quad (\dots)$$

Alors $y(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ l'origine est appelée noeud impropre stable.

La figure (4) illustre ce portrait de phase (si $\lambda = \mu > 0$ les flèches seront inversées, dans ce cas l'origine est appelée noeud impropre instable. Le portrait de phase de (.) est linéairement équivalent au portrait de phase de (..)

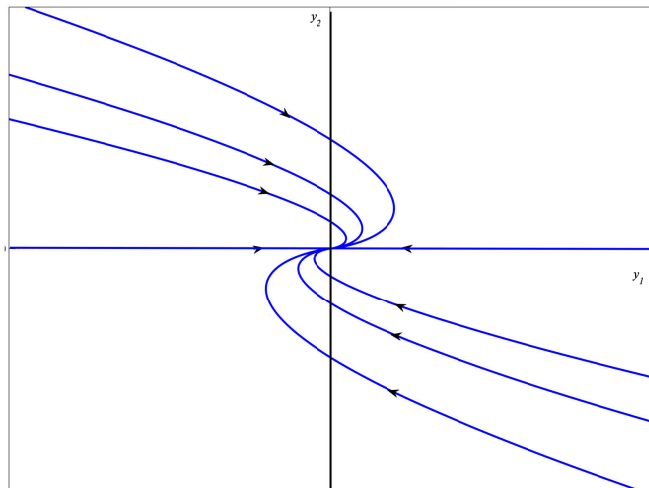


Figure 2.4: Nœud impropre stable $\mu = \lambda < 0$, avec un seul vecteur propre indépendant

Cas 4 : Valeurs propres complexes

$$B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ avec } a < 0.$$

Introduisant les coordonnées polaires r, θ définis par

$$r^2 = y_1^2 + y_2^2, \quad \tan(\theta) = \frac{y_2}{y_1}$$

et dérivant ces équations, on obtient le système suivant

$$\dot{r} = ar$$

$$\dot{\theta} = b \quad (\dots)$$

d'où la solution

$$r = r_0 e^{at} \infty$$

$$\theta = bt + \theta_0 \quad (\dots)$$

Alors $r(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow +\infty$ et θ augmente lorsque t augmente si $b > 0$, et diminue lorsque t augmente si $b < 0$.
Donc les trajectoires s'approchent de l'origine en spirale, dans ce cas l'origine est appelée foyer stable.

La figure (5) illustre ce portrait de phase (si $a > 0$ les flèches seront inversés, dans ce cas l'origine est appelée foyer instable). Le portrait de phase de (.) est linéairement équivalent au portrait de phase de (..) .

Cas 5 : Valeurs propres imaginaires pures

Dans ce cas on suppose $a = 0$ et on procède de la même manière comme dans le cas 4.

$$\text{Soit } B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}$$

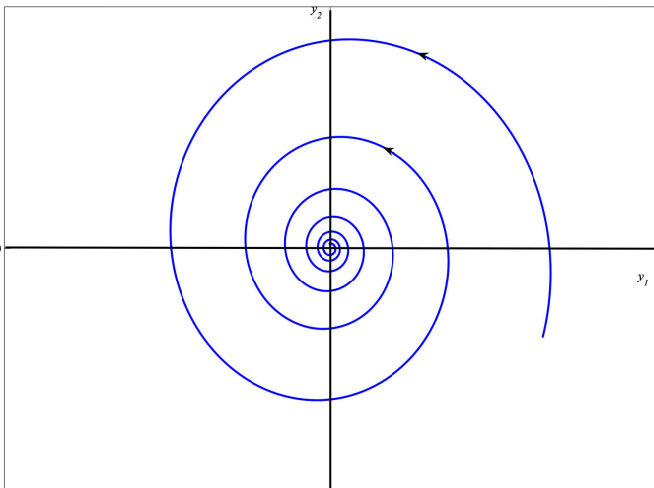


Figure 2.5: Foyer stable, $a < 0$. et $b > 0$.

Introduisant les coordonnées polaires r, θ on obtient le système suivant :

$$\dot{r} = 0$$

$$\dot{\theta} = b \quad (\text{.....})$$

d'où la solution

$$r = r_0$$

$$\theta = bt + \theta_0 \quad (\text{.....})$$

Alors $r(t) = \text{constante}$ et θ augmente lorsque t augmente si $b > 0$ et diminue lorsque t augmente si $b < 0$. Donc les trajectoires sont des cercles centrés à l'origine,

La figure (6) illustre ce portrait de phase. Le portrait de phase de $(\dot{r}, \dot{\theta})$ est linéairement équivalent au portrait de phase de (r, θ) dans ce cas l'origine est appelée centre.

Exemple: (Système linéaire avec un centre à l'origine)

Considérons le système $(.)$ avec $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Les valeurs propres de A sont $\lambda_{1,2} = \pm 2i$ avec les vecteurs propres

$v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc

$P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ d'où $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

La solution est

$$\begin{aligned}x(t) &= P^{-1} \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} P x_0 \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2t) & -\sin(2t) \\ \sin(2t) & \cos(2t) \end{pmatrix} x_0\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1 \cos(2t) - 2c_2 \sin(2t) \\ x_2(t) &= \frac{1}{2}c_1 \sin(2t) + c_2 \cos(2t)\end{aligned}$$

La solution vérifie

$$x_1^2(t) + 4x_2^2(t) = c_1^2 + 4c_2^2, \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

Alors les trajectoires résident dans des ellipses.

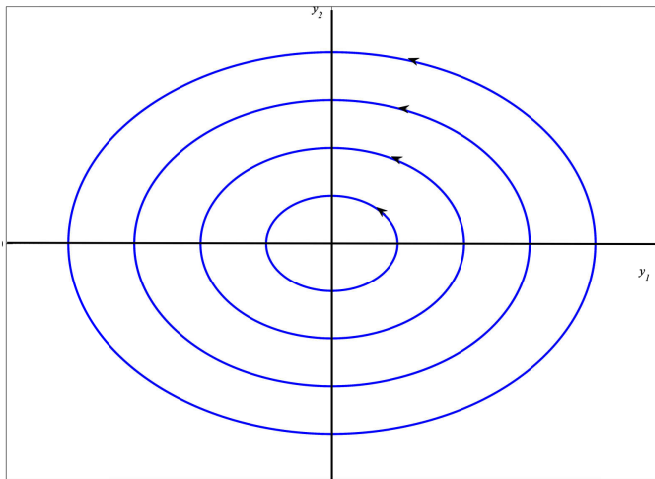


Figure 2.6: Centre à l'origine, $b > 0$.

