$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\, dx_1 dx_2 dx_3 V_i) = \rho V_1 V_i\, dx_2 dx_3 - \left[\rho V_1 V_i\, dx_2 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\ )\, dx_1\right]$$

$$+ \rho V_2 V_i\, dx_1 dx_3 - \left[\rho V_2 V_i\, dx_1 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho V_2 V_i\, dx_1 dx_3)\, dx_2\right]$$

$$+ \rho V_3 V_i\, dx_1 dx_2 - \left[\rho V_3 V_i\, dx_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho V_3 V_i\, dx_1 dx_2)\, dx_3\right]$$

$$- \sigma_{1i}\, dx_2 dx_3 + \left[\sigma_{1i}\, dx_2 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\sigma_{1i}\, dx_2 dx_3)\, dx_1\right]$$

$$- \sigma_{2i}\, dx_1 dx_3 + \left[\sigma_{2i}\, dx_1 dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_2}(\sigma_{2i}\, dx_1 dx_3)\, dx_2\right]$$

$$- \sigma_{3i}\, dx_1 dx_2 + \left[\sigma_{3i}\, dx_1 dx_2 + \frac{\partial}{\partial x_3}(\sigma_{3i}\, dx_1 dx_2)\, dx_3\right] + \rho\, dx_1 dx_2 dx_3\, g_i$$

x_1, x_2, x_3 et t étant des variables indépendantes, on peut simplifier par $dx_1 dx_2 dx_3$. Après réarrangement on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \frac{\partial(\rho V_j V_i)}{\partial x_j} = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

A noter que $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, $\dfrac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = \displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ et de même pour $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j V_i)$

Ces équations contiennent les vitesses et les contraintes comme inconnues. Le problème de fermeture du système est résolu en réécrivant le tenseur des contraintes en fonction des taux de déformation c'est-à-dire des gradients de vitesse. En fait, c'est le tenseur déviateur des contraintes qui est relié au tenseur déviateur du taux de déformation.

<u>Tenseur</u> <u>déviateur</u> <u>des</u> <u>contraintes</u> :

Introduisons le tenseur déviateur des contraintes tel que :

$$\tau_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk} = \sigma_{ij} + P\delta_{ij}$$

où $P = -\frac{1}{3}\sigma_{kk}$ représente la pression.

alors $\sigma_{ij} = \tau_{ij} - P\delta_{ij}$

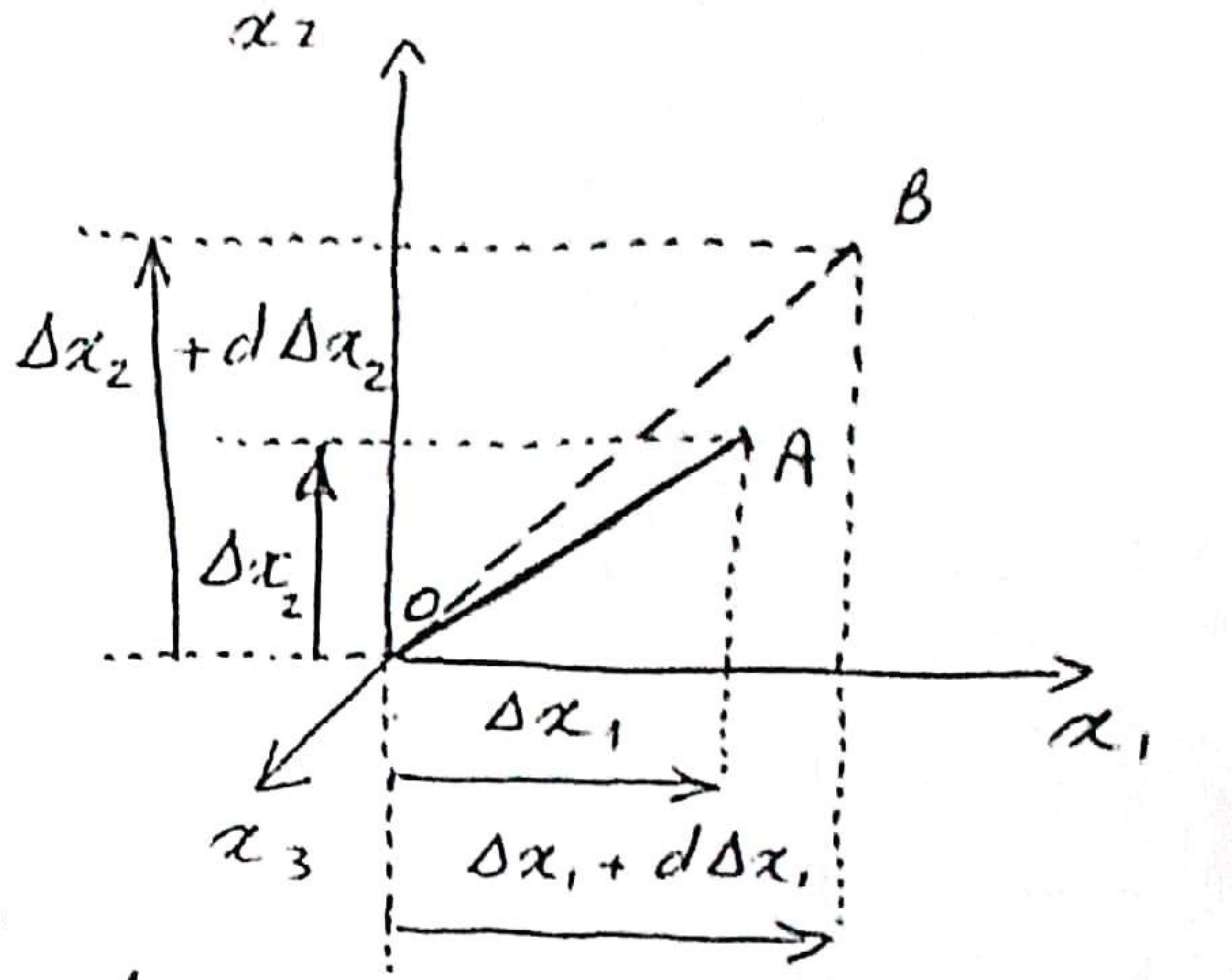
Substituant dans les équations de quantité de mouvement pour σ_{ij} :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho V_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j V_i) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij} - P\delta_{ij}) + \rho g_i$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_j}(\tau_{ij}) - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \rho g_i \quad \left(\text{puisque } \frac{\partial P\delta_{ij}}{\partial x_j} = \frac{\partial P}{\partial x_i}\right)$$

<u>Tenseur</u> <u>déviateur</u> <u>du</u> <u>taux</u> <u>de</u> <u>déformation</u>:

Considérons un segment de fluide déformable OA en mouvement dans un repère $Ox_1x_2x_3$ dont les directions des coordonnées x_1, x_2 et x_3 restent inchangées mais dont l'origine O suit l'un des deux bouts du segment de fluide.



Durant un temps dt, le segment OA dont la longueur au temps t a pour composantes $[\Delta x_1 \; \Delta x_2 \; \Delta x_3]^T$ subit une déformation et sa longueur OB au temps t+dt aura pour composantes

$$[\Delta x_1 + d\Delta x_1 \quad \Delta x_2 + d\Delta x_2 \quad \Delta x_3 + d\Delta x_3]^T$$

On définit le taux de déformation normal suivant x_1

$$E_{11} = \frac{d\Delta x_1}{\Delta x_1} / dt = \frac{1}{\Delta x_1}\frac{d\Delta x_1}{dt} = \frac{\Delta V_1}{\Delta x_1}$$

ΔV_1 étant la composante de vitesse suivant x_1 du point A relative par rapport à O.

A la limite, quand $\Delta x_1 \to 0$, le taux de déformation normal suivant x_1 est

$$e_{11} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta V_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial V_1}{\partial x_1}$$

les taux de déformation normaux suivant x_2 et x_3 sont obtenus de manière similaire :

$$e_{22} = \frac{\partial V_2}{\partial x_2} \qquad e_{33} = \frac{\partial V_3}{\partial x_3}$$

On définit le taux de déformation tangentielle suivant x_2 par rapport à x_1 :

$$E_{21} = \frac{d\,\Delta x_2}{\Delta x_1} \Big/ dt = \frac{1}{\Delta x_1} \frac{d\,\Delta x_2}{dt} = \frac{\Delta V_2}{\Delta x_1}$$

ΔV_2 étant la composante de vitesse suivant x_2 du point A relative par rapport à O

A la limite quand $\Delta x_1 \to 0$

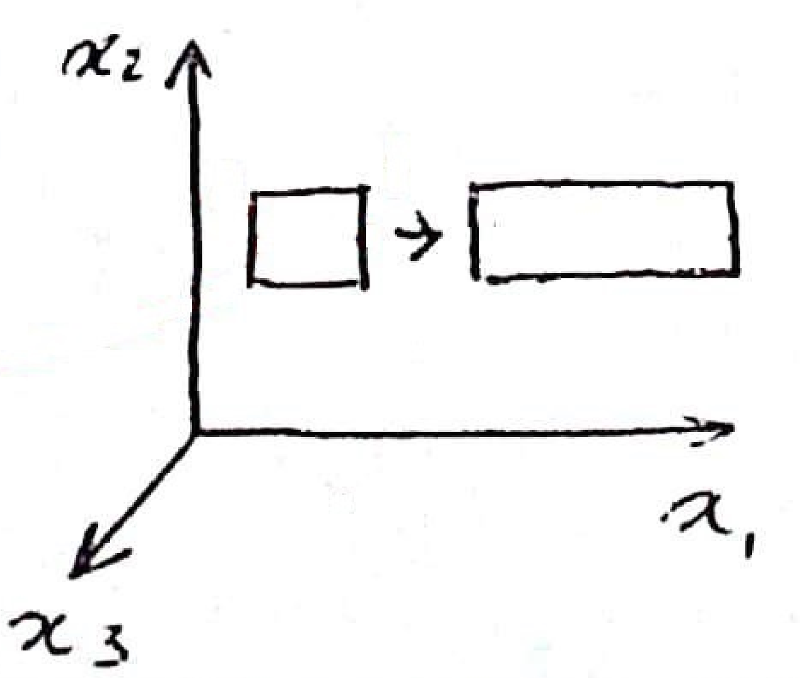
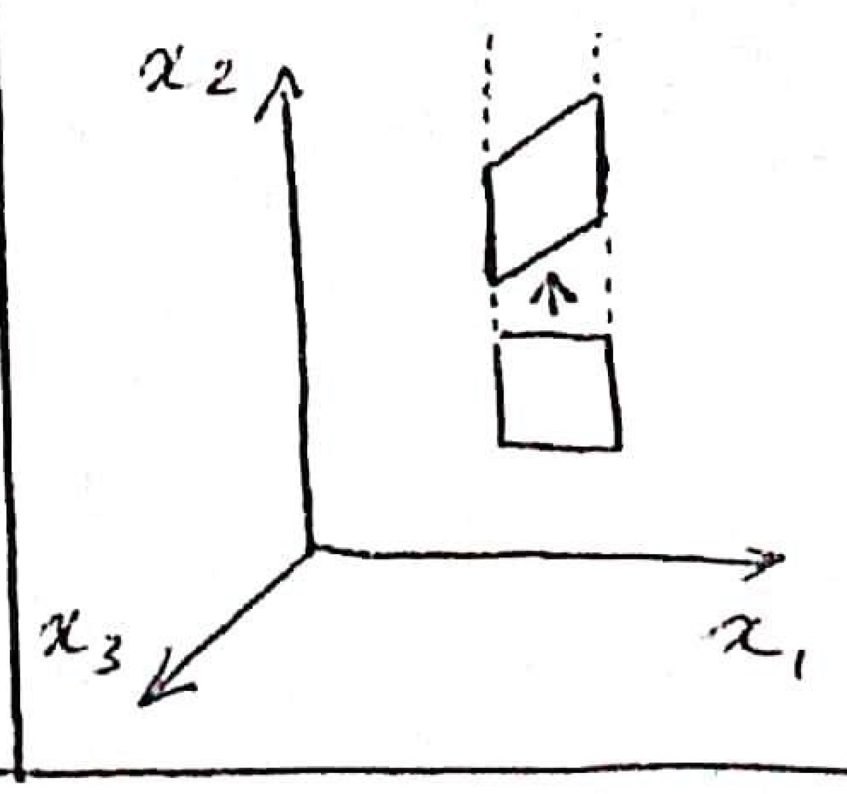
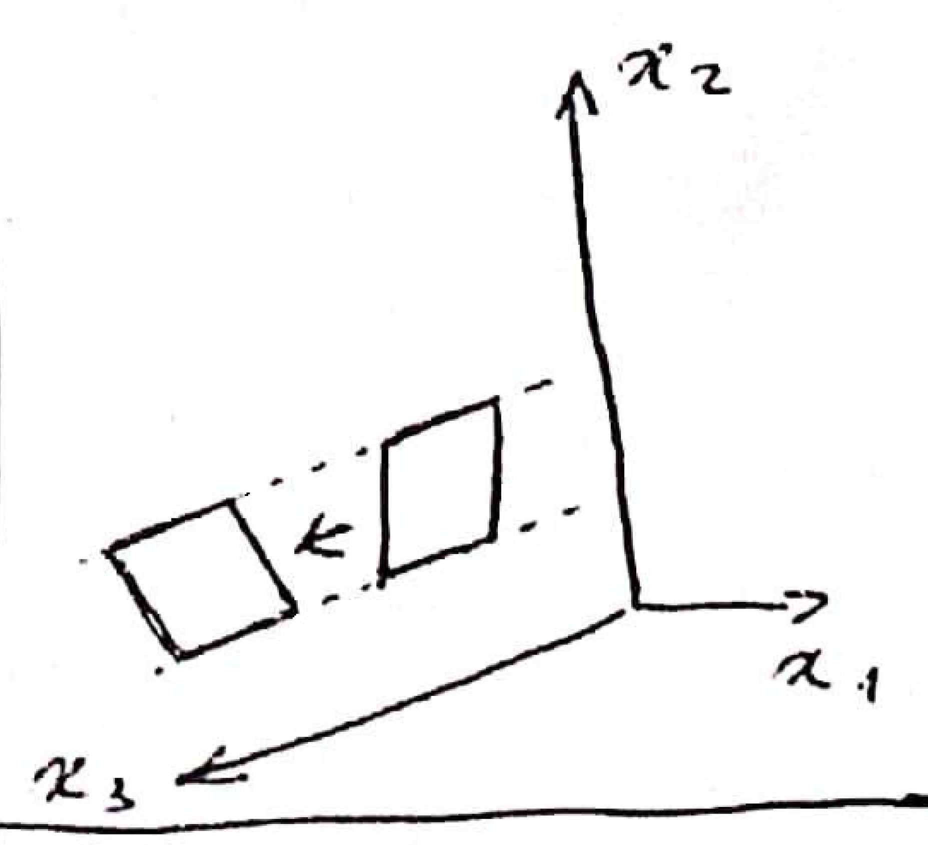
$$e_{21} = \lim_{\Delta x_1 \to 0} \frac{\Delta V_2}{\Delta x_1} = \frac{\partial V_2}{\partial x_1}$$

On définit de façons analogues les taux de déformation tangentielle e_{12}, e_{13}, e_{31}, e_{23} et e_{32}.

le tenseur du taux de déformation s'écrit donc :

$$e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial V_1/\partial x_1 & \partial V_1/\partial x_2 & \partial V_1/\partial x_3 \\ \partial V_2/\partial x_1 & \partial V_2/\partial x_2 & \partial V_2/\partial x_3 \\ \partial V_3/\partial x_1 & \partial V_3/\partial x_2 & \partial V_3/\partial x_3 \end{bmatrix}$$

Quelques exemples de déformation sont illustrés dans le tableau ci dessous.

$\partial V_1/\partial x_1$	$\partial V_2/\partial x_1$	$\partial V_3/\partial x_2$
		

Une façon plus convenable d'exprimer le tenseur e_{ij} est :

si $i=j$ $$e_{ij} = \underbrace{\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)}_{\text{tenseur déviateur de déformation pure}} + \underbrace{\frac{1}{3}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}}_{\text{tenseur sphérique de dilatation}} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{3}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

si $i \neq j$ $$e_{ij} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{tenseur déviateur de déformation pure}} + \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)}_{\text{tenseur du taux de rotation}} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)$$

Relation entre tenseurs déviateurs de contraintes et de taux de déformation :

La relation entre le tenseur déviateur des contraintes et celui du taux de déformation est

$$\tau_{ij} = 2\mu\,\varepsilon_{ij} \qquad \forall\, i \text{ et } j.$$

si $i=j$ $$\tau_{ij} = 2\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} - \frac{1}{3}\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}\right)$$

si $i \neq j$ $$\tau_{ij} = 2\mu\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)\right]$$

Une forme compacte de ces 2 relations s'écrit,

$\forall\, i$ et j $$\tau_{ij} = \mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\delta_{ij}$$

μ est la viscosité dynamique du fluide.

Les équations Navier-Stokes :

Substituant pour τ_{ij} dans les équations de quantité de mouvement on obtient les équations Navier-Stokes suivantes :

$$\boxed{\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j V_i) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\left[\mu\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\delta_{ij}\mu\frac{\partial V_k}{\partial x_k}\right] + \rho g_i}$$

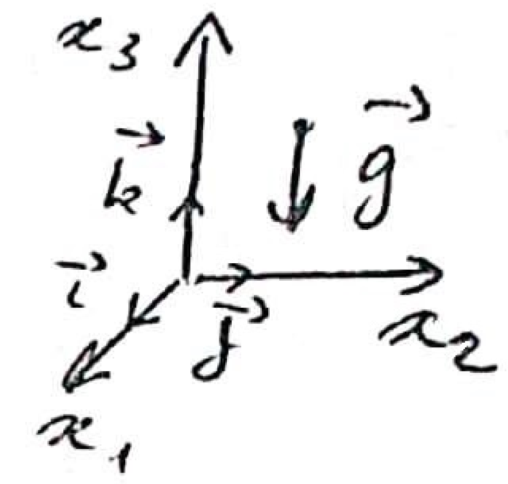
Cas d'un fluide incompressible :

Dans le cas l'équation de continuité donne :

$$\frac{\partial V_k}{\partial x_k} = 0 \quad , \quad \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right) = \mu \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial V_j}{\partial x_j}\right) = 0$$

Maintenant si on oriente la direction x_3 (ou z) verticalement vers le haut alors

$$\rho \vec{g} = -\rho g \vec{k} = -\rho g \, \mathrm{grad}\, x_3 = -\rho g \, \mathrm{grad}\, z$$



Si la masse volumique ρ est constante

$$\rho \vec{g} = -\mathrm{grad}\,(\rho g z).$$

* les équations Navier-Stokes deviennent, sous forme tensorielle :

$$\frac{\partial(\rho V_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho V_j V_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(P + \rho g z) + \mu \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\right)$$

$P + \rho g z = P^*$ est la pression motrice ou piézometrique.

* Sous forme vectorielle :

l'équation de continuité : $\mathrm{div}\, \vec{V} = 0$

les équations N-S :

$$\frac{\partial(\rho \vec{V})}{\partial t} + \rho \vec{V} \cdot \mathrm{grad}\, \vec{V} = -\mathrm{grad}\, P^* - \mu \, \mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, \vec{V})$$

* Sous forme développée :

l'équation de continuité : $\frac{\partial V_1}{\partial x_1} + \frac{\partial V_2}{\partial x_2} + \frac{\partial V_3}{\partial x_3} = 0$

les équations N-S :

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial x} + V\frac{\partial U}{\partial y} + W\frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial x} + \nu\left[\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U\frac{\partial V}{\partial x} + V\frac{\partial V}{\partial y} + W\frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial y} + \nu\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U\frac{\partial W}{\partial x} + V\frac{\partial W}{\partial y} + W\frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial P^*}{\partial z} + \nu\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right]$$

où $U = V_1$ $V = V_2$ $W = V_3$, $x = x_1$ $y = x_2$ $z = x_3$

ν la viscosité cinématique.