أ- تقنيات لحساب بعض التكاملات

1- **تكامل الدالة** : $f(x) = \frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c}$ حيث $a \neq 0$ و $(\alpha , \beta) \neq (0 , 0)$

نميز ثلاث حالات

الحالة الأولى : المقام $ax^2 + bx + c$ يقبل جذرين مختلفين x_1 و x_2 . في هذه الحالة يوجد عددين A و B حيث

$$\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-x_2}$$

و تكامل الدالة f هو $\int f(x)dx = ALn|x - x_1| + BLn|x - x_2|$

الحالة الثانية : المقام $ax^2 + bx + c$ يقبل جذر مضاعف x_0. في هذه الحالة يوجد عددين A و B حيث

$$\frac{\alpha x+\beta}{ax^2+bx+c} = \frac{A}{(x-x_0)^2} + \frac{B}{x-x_0}$$

و تكامل الدالة f هو هو $\int f(x)dx = -\frac{A}{x-x_0} + BLn|x - x_0|$

الحالة الثالثة : المقام $ax^2 + bx + c$ لا يقبل جذور

$$\int f(x)dx = \alpha \int \frac{x}{ax^2+bx+c} dx + \beta \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$$

$$\frac{\alpha}{a} \int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c} dx + \left(\beta - \frac{\alpha b}{a}\right) \int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx$$

واضح أن $\int \frac{ax+b}{ax^2+bx+c} = Ln|ax^2 + bx + c| + c'$

لنحسب التكامل $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}$

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \int \frac{1}{\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{-\Delta}{4a^2}} dx = \frac{4a^2}{-\Delta} \int \frac{1}{\left[\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2 +1} dx$$

$$= \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}} \int \frac{\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}}{\left[\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2 +1} dx$$

بوضع $f(x) = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)$ ينتج : $f'(x) = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}$ و

$$\int \frac{1}{ax^2+bx+c} dx = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}} artg \left[\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x + \frac{b}{2a}\right)\right] + c'$$

2- **تكامل الدوال الكسرية**

لتكن $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ حيث $P(x)$ و $Q(x)$ هما كثيري حدود بمعاملات حقيقية

بإستعمال القسمة الإقليدية يمكن كتابة الكسر $\frac{P(x)}{Q(x)}$ على شكل مجموع من كثير حدود $E(x)$ ومن عناصر على الشكل

$\frac{\gamma}{(x-x_0)^k}$ أو $\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}$ حيث $a \neq 0$ و $(\alpha , \beta) \neq (0 , 0)$ و $(b^2 - 4ac < 0)$ و $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

أ- تكامل كثير الحدود $E(x)$ واضح

ب- لنحسب التكامل $\int \frac{\gamma}{(x-x_0)^k} dx$

إذا كان $k = 1$: $\int \frac{\gamma}{(x-x_0)} dx = \gamma Ln|x - x_0| + c'$

إذا كان $k \geq 2$: $\int \frac{\gamma}{(x-x_0)^k} dx = \frac{1}{-k+1}(x - x_0)^{-k+1} + c'$

ج- حساب التكامل $\int \frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k}dx$ حيث $a \neq 0$ و $(\alpha , \beta) \neq (0 , 0)$ و $(b^2-4ac<0)$ و $k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$

إذا كان $k = 1$: يحسب التكامل كما هو مبين في الحالة الثالثة للفقرة السابقة

إذا كان $k \geq 2$: نكتب الكسر على الشكل

$$\frac{\alpha x+\beta}{(ax^2+bx+c)^k} = \gamma \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k} + \delta \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}$$

ولدينا

$$\int \frac{2ax+b}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \frac{1}{-k+1}(ax^2+bx+c)^{-k+1} + c'$$

حساب $\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}dx$

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \int \frac{1}{\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{-\Delta}{4a^2}\right]^k}dx = \left(\frac{4a^2}{-\Delta}\right)^k \int \frac{1}{\left[\left[\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2+1\right]^k}dx$$

$$= \left(\frac{4a^2}{-\Delta}\right)^{k-\frac{1}{2}} \int \frac{\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}}{\left[\left[\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)\right]^2+1\right]^k}dx$$

و بوضع $u = \frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$ نحصل على $\frac{2a}{\sqrt{-\Delta}}dx = du$

$$\int \frac{1}{(ax^2+bx+c)^k}dx = \left(\frac{4a^2}{-\Delta}\right)^{k-\frac{1}{2}} \int \frac{1}{(u^2+1)^k}du$$

بالنسبة إلى التكامل $\boldsymbol{I_k = \int \frac{1}{(u^2+1)^k}du}$

نستعمل تقنية التكامل بالتجزئة وذالك بوضع $g = \frac{1}{(u^2+1)}$ و $f' = 1$ في التكامل

$$arctgu = \int \frac{1}{(u^2+1)}du = \frac{u}{(u^2+1)} + \int \frac{2u^2}{(u^2+1)^2}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+1)} + 2\int \frac{u^2+1}{(u^2+1)^2}du - 2\int \frac{1}{(u^2+1)}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+1)} + 2\int \frac{1}{(u^2+1)}du - 2\int \frac{1}{(u^2+1)^2}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+1)} + 2arctgu - 2I_2$$

$$\Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{u}{(u^2+1)} + arctgu\right] + c'$$

وهكذا لحساب التكامل $I_{k+1} = \int \frac{1}{(u^2+1)^{k+1}}du$ $(k \geq 3)$نستعمل تقنية التكامل بالتجزئة في التكامل I_k

$$f' = 1 \quad , \quad g = \frac{1}{(u^2+1)^k} \quad , \quad \left(g' = -k\frac{2u}{(u^2+1)^{k+1}}\right)$$

$$I_k = \int \frac{1}{(u^2+1)^k}du = \frac{u}{(u^2+1)^k} + 2k\int \frac{u^2}{(u^2+1)^{k+1}}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+1)^k} + 2k\int \frac{u^2+1}{(u^2+1)^{k+1}}du - 2k\int \frac{1}{(u^2+1)^{k+1}}du$$

$$= \frac{u}{(u^2+1)^k} + 2kI_k - 2kI_{k+1}$$

$$\Rightarrow I_{k+1} = \frac{1}{2k}\left[\frac{u}{(u^2+1)^k} + (2k-1)I_k\right] + c' \quad , \quad k \geq 3$$

وبهذا نكون قد أعطينا I_k ، $k \geq 2$ على شكل متتالية دوال معرفة بالتراجع

$$\begin{cases} I_2 = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{u}{(u^2+1)} + arctgu\right] + c' \\ I_{k+1} = \dfrac{1}{2k}\left[\dfrac{u}{(u^2+1)^k} + (2k-1)I_k\right] + c' \quad , k \geq 3 \end{cases}$$

3- تكامل الدوال المثلثية: $f(sinx\ , cosx)$

نستعمل هذه الطريقة لحساب التكاملات من الشكل $\int P(sinx\ , cosx)dx$ أو من الشكل $\int \frac{P(sinx\ ,cosx)}{Q(sinx\ ,cosx)}$

حيث $P\ et\ Q$ هي كثيرات حدود

نستعمل تغيير المتغير $t = tg\frac{x}{2}$. لدينا

$$cosx = cos^2\frac{x}{2} - sin^2\frac{x}{2} = = \frac{cos^2\frac{x}{2}\left(1 - \dfrac{sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}}\right)}{cos^2\frac{x}{2}\left(1 + \dfrac{sin^2\frac{x}{2}}{cos^2\frac{x}{2}}\right)} \qquad \boxed{\Rightarrow cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}}$$

$$sinx = 2sin\frac{x}{2}cos\frac{x}{2} = 2\frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}cos^2\frac{x}{2} = 2\frac{sin\frac{x}{2}}{cos\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad \boxed{\Rightarrow sinx = \frac{2t}{1+t^2}}$$

$$tgx = \frac{sinx}{cosx} \qquad \boxed{\Rightarrow tgx = \frac{2t}{1-t^2}}$$

$$t = tg\frac{x}{2} \Rightarrow dt = tg'\frac{x}{2}dx = \frac{1}{2}\left(1 + tg^2\frac{x}{2}\right)dx \qquad \boxed{\Rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2}dt}$$

فنحصل على تكامل دالة ناطقة بدلالة t