Mécanique des fluides approfondie TD 1, 2 et 3
Master 1 Energétique

Exercice 1: Considérer un volume infinitésimal dans les coordonnées cylindriques (fig.1). Etablir l'équation de transport pour les cas suivants :

(a) un écoulement bidimensionnel $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\varphi})$.
(b) un écoulement axisymétrique $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{z})$.
(c) un écoulement tridimensionnel $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{z})$.

Exercice 2: Considérer un volume infinitésimal dans les coordonnées sphériques $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$ (fig.2). Etablir l'équation de transport pour un écoulement tridimensionnel.

Exercice 3: Soit l'écoulement incompressible dans le plan $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Montrer que la composante de vorticité $\boldsymbol{\xi_z}$ suivant $\boldsymbol{z}$ varie selon l'équation suivante :

$$\frac{d\xi_z}{dt} = \nu\, \nabla^2 \xi_z$$

Où : $\boldsymbol{\nu}$ est la viscosité cinématique du fluide.
Quelle est l'interprétation physique de cette équation pour un fluide parfait.

Exercice 4 : Le débit d'air (fluide incompressible) dans des conditions standards dans une conduite de section rectangulaire est déterminé en utilisant des prises de pression dans un coude (fig.3). On considère que l'écoulement dans le coude est similaire à un vortex libre (écoulement irrotationnel ; $V = C^{te}/r$).
Montrer que le débit est donné par la formule suivante :

$$Q = k\sqrt{\Delta P}$$

Où :

$$k = L \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)\sqrt{\frac{2\,{R_2}^2{R_1}^2}{\rho\left({R_2}^2 - {R_1}^2\right)}}$$

$$\Delta P = P_2 - P_1$$

L : est la profondeur du coude

Exercice 4: Soit l'écoulement stationnaire dû à la pesanteur de 2 films liquides immiscibles le long d'une paroi inclinée faisant un angle $\boldsymbol{\theta}$ avec la verticale (fig.4).

1. Trouver la forme simplifiée de l'équation différentielle qui régit l'écoulement.
2. Donner l'expression de la distribution de pression suivant la direction $\boldsymbol{y}$ dans les deux liquides $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ sachant que $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{P_0}$ à $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{h_b}$.
3. Obtenir le profil de vitesse pour les deux liquides.

Exercice 5: Considérer un film de liquide visqueux exposé à l'atmosphère s'écoulant uniformément le long d'une tige verticale de rayon $\boldsymbol{a}$ (fig.5). A une certaine distance de la tige, le film se rapprochera d'un écoulement complètement développé de rayon extérieur constant $\boldsymbol{b}$.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement du film.
2. Donner la distribution de la vitesse du film.
3. Quelle est la relation entre le rayon du film $\boldsymbol{b}$ et le débit volumique total du film $\boldsymbol{Q}$?

Exercice 6: Un liquide newtonien incompressible est confiné entre deux cylindres circulaires concentriques de longueurs infinies ; un cylindre interne plein de rayon $\boldsymbol{R_i}$ et un autre externe fixe de rayon $\boldsymbol{R_o}$ (Fig.6a). Le cylindre interne tourne à une vitesse angulaire $\boldsymbol{w_i}$. L'écoulement est stationnaire, laminaire et bidimensionnel dans le plan $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})$.
1- a) Donner l'expression de la composante de vitesse du fluide et déterminer la contrainte de cisaillement au niveau du cylindre tournant. (Négliger la pesanteur).
b) Si l'espace $\boldsymbol{h}$ $(\boldsymbol{h} = \boldsymbol{R_o} - \boldsymbol{R_i})$ est très petit entre la paroi du cylindre externe et la paroi du cylindre interne (Fig.6b), montrer que le profil de la composante de vitesse du fluide est linéaire (pour un espace très petit, le profil de vitesse se réduit à celui de l'écoulement bidimensionnel simple de Couette). (Conseil : Définir $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{R_o} - \boldsymbol{r}$).
c) Si le rayon du cylindre externe devient infini (le rayon du cylindre intérieur devient très petit), donner l'expression de la composante de vitesse et quel est l'écoulement résultant de cette approche ?
2- Pour le cas général, les deux cylindres tournent à des vitesses angulaires différentes, donner l'expression de la composante de vitesse.
3- Si $\boldsymbol{R_i} = \boldsymbol{w_i} = \boldsymbol{0}$, donner l'expression de la composante de vitesse et analyser l'écoulement résultant.

Exercice 7: Le profil de vitesse d'un écoulement laminaire entre deux plaques planes est donné par:

$$u = \frac{4\,u_{max}y(h-y)}{h^2}, \qquad v = w = 0$$

Si la température de la paroi est T_w pour les deux plaques, utiliser l'équation d'énergie pour résoudre la distribution de la température $T(y)$ entre les deux plaques pour un écoulement stationnaire et incompressible.

Exercice 8: Pour un écoulement laminaire, stationnaire et incompressible traversant un tube long, la distribution de vitesse est donnée par:

$$V_z = U\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right), \qquad V_r = V_\theta = 0$$

Ou : U est la vitesse maximale à la ligne centrale (l'axe de symétrie).
R est le rayon de tube.

Si la température de la paroi est constante T_w (isotherme) et la distribution de température est seulement en fonction de r ($T = T(r)$), trouver $T(r)$ pour cet écoulement.

Exercice 9:

a) On considère l'écoulement laminaire stationnaire d'un liquide visqueux confiné dans un espace annulaire entre deux cylindres verticaux concentriques. Le cylindre interne de rayon $\boldsymbol{R_1}$ est fixe et l'autre externe de rayon $\boldsymbol{R_2}$ tourne à une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ (fig.7a).

1. Donner la forme simplifiée de l'équation de continuité.
2. Obtenir l'expression du profil de vitesse.
3. Trouver la distribution de la contrainte de cisaillement.
4. Déterminer la contrainte de cisaillement au niveau du cylindre externe.
5. Comparer cette contrainte avec celle entre deux plaques planes en considérant que la distance de l'espace annulaire est petite (fig.7b).
6. Trouver le rapport des rayons $(\boldsymbol{R_1/R_2})$ pour lequel les contraintes sont les même avec 1% de correction $(\boldsymbol{\tau_{cylindre}/\tau_{plaque} = 1.01})$.

b) Maintenant, le cylindre externe est fixe et sa surface est maintenue à une température uniforme $\boldsymbol{T_0}$ par contre le cylindre interne tourne avec une vitesse angulaire constante $\boldsymbol{\omega}$ et sa surface est supposée adiabatique (fig.7c). Obtenir la distribution de la température en négligeant la variation axiale.

Equations (en coordonnées cylindriques):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r V_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho V_z) = 0$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_r}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_r}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} - \frac{{V_\theta}^2}{r} + V_z\frac{\partial V_r}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_r}{\partial r}\right) - \frac{V_r}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_\theta}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_\theta}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r V_\theta}{r} + V_z\frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right) = -\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_\theta}{\partial r}\right) - \frac{V_\theta}{r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial V_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 V_\theta}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial V_z}{\partial t} + V_r\frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial V_z}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V_z}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho c_p\left(\frac{\partial T}{\partial t} + V_r\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{V_\theta}{r}\frac{\partial T}{\partial \theta} + V_z\frac{\partial T}{\partial z}\right) = k\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] + \mu\Phi$$

$$\Phi = 2\left(\frac{\partial V_r}{\partial r}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial V_z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_\theta}{\partial r} - \frac{V_\theta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial V_r}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{r}\frac{\partial V_z}{\partial \theta} + \frac{\partial V_\theta}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r}\right)^2$$

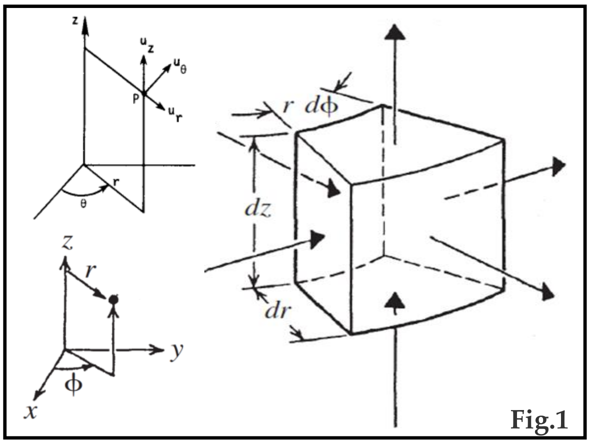

Fig.1

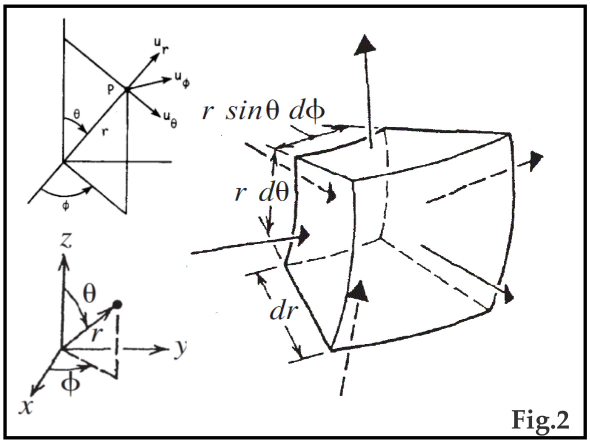

Fig.2

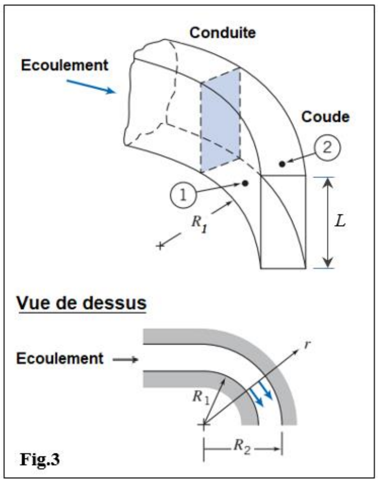

Fig.3

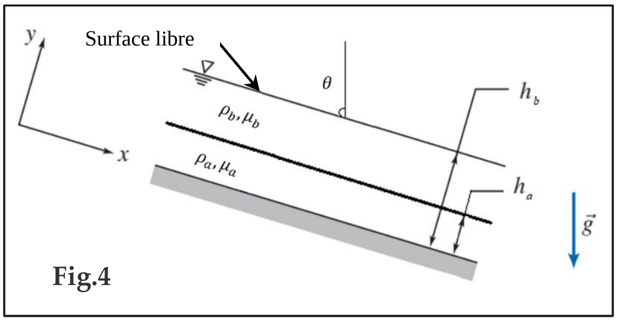

Fig.4

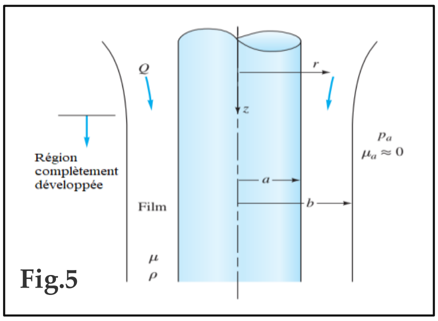

Fig.5

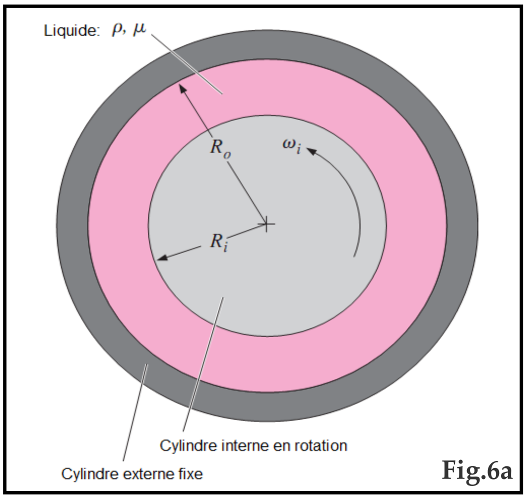

Fig.6a

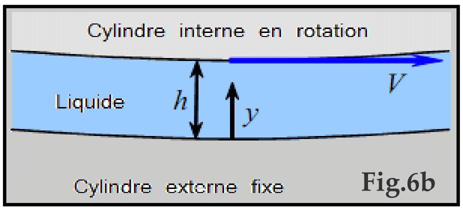

Fig.6b

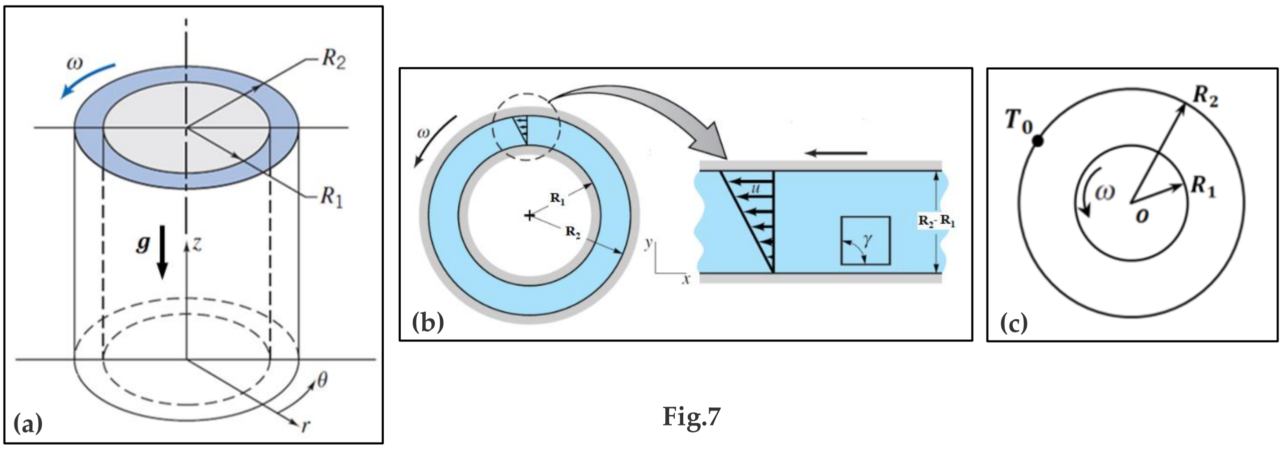

Fig.7