

CENTRE UNIVERSITAIRE ABDELHAFID BOUSSOUF –MILA

01 ANNEE MASTER GENIE CIVIL-STRUCTURE

MÉCANIQUE DES STRUCTURES

LECHEHEB. M

CHAPITRE 02:

DEFORMEES DES POUTRES

I) Généralités :

1.1) But de l'étude :

Lorsque les structures reçoivent des charges, elles se déforment. Il est nécessaire de limiter leurs déplacements pour des raisons d'exploitation des constructions. En effet, un changement de position trop important peut engendrer, entre autre, des contrepenches, des fissurations dans certains éléments (cloisons), des vibrations sous les charges variables telles que le vent ...

Le présent chapitre a donc pour but de quantifier les déformées des structures.

1.2) Rappels mathématiques :

Dans cette partie de cours, nous aurons besoins de maîtriser les intégrales. Les fonctions étudiées sont généralement assimilées à des polynômes.

L'intégration d'une fonction polynomiale du type x^n est :

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + A$$

1.3) Définitions :

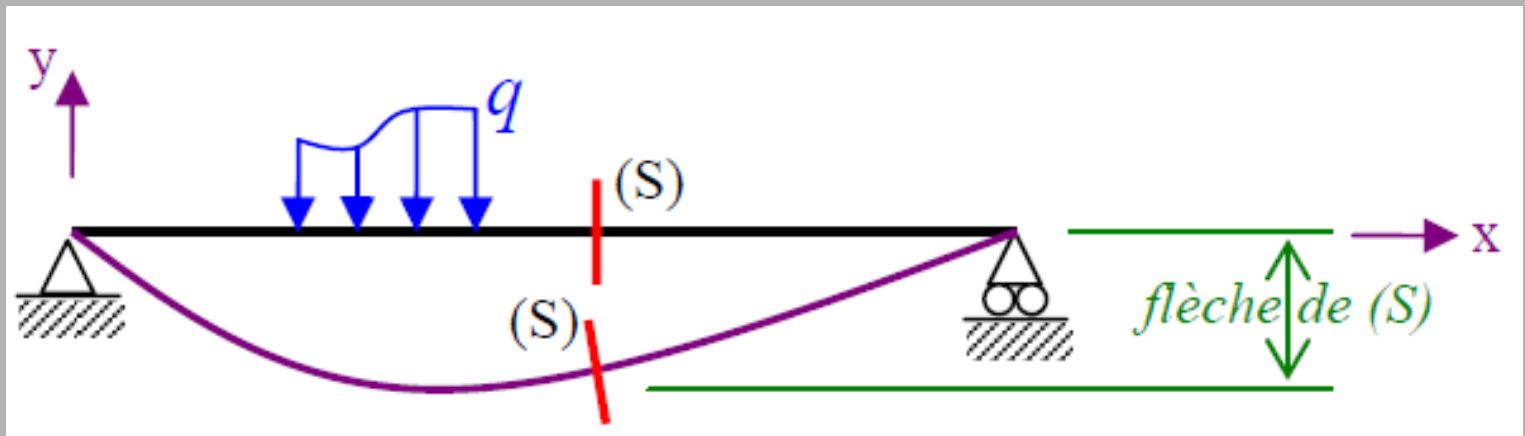
a) Déformée :

La déformée d'une structure correspond à l'allure de celle-ci lorsqu'elle reçoit un chargement. Elle est intimement liée aux actions qu'elle subit (si l'intensité, le type de chargement ... change, la déformée changera).

Remarque : il est très important de ne pas confondre « déformée » et « déformations ». En effet, la déformation est un allongement par unité de longueur, alors qu'une déformée est la combinaison entre une translation [m] et une rotation [rad].

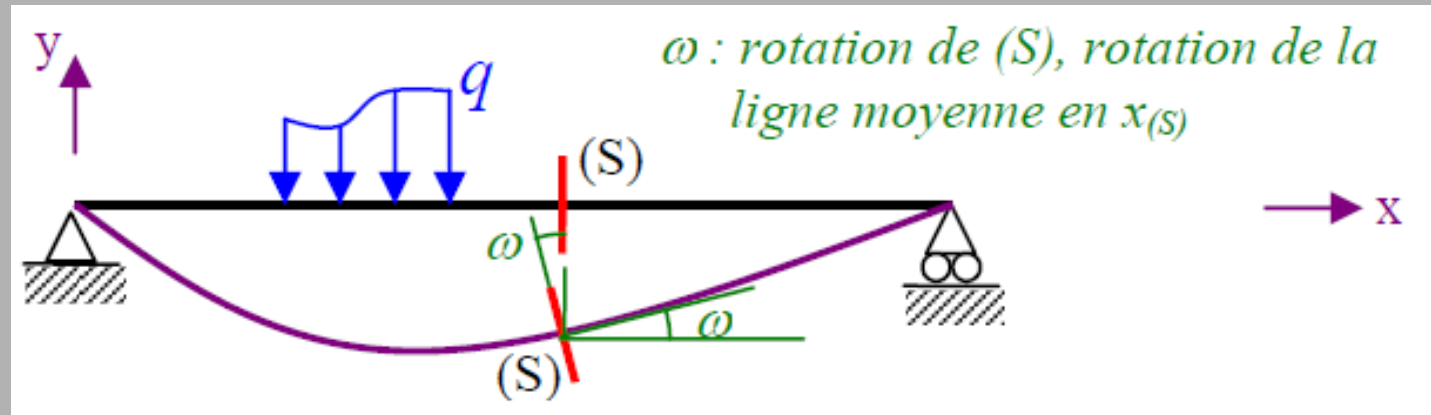
b) Flèche :

Lorsqu'une structure est soumise à un moment de flexion, on observe la translation des sections droites perpendiculairement à la ligne moyenne de la poutre. Cette translation s'appelle « flèche » :



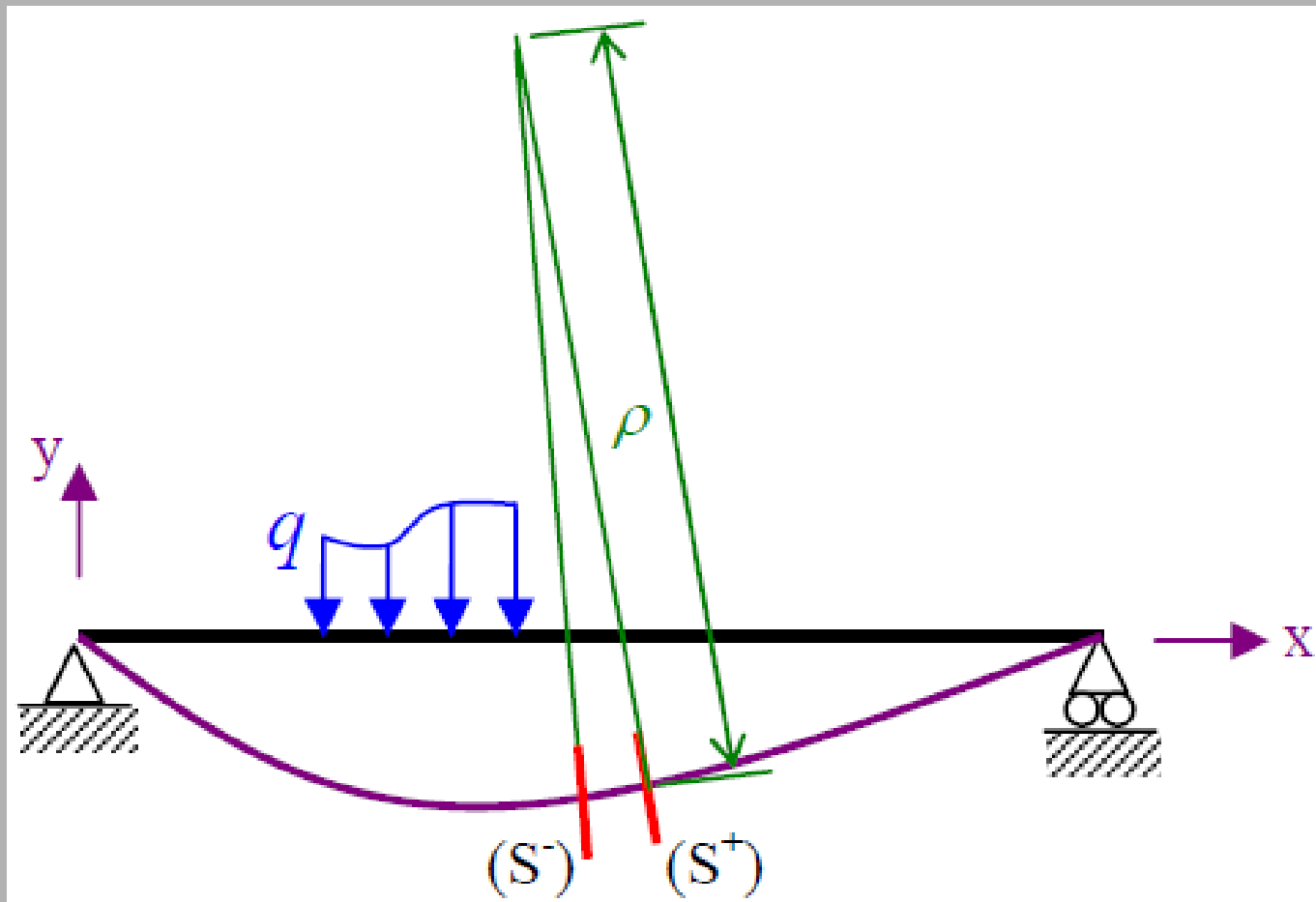
c) Rotation :

Certaines sections subissent une rotation. Cette rotation est naturellement la même que celle de la ligne moyenne :



d) Rayon de courbure :

Considérons deux sections (S^+) et (S^-) infiniment proches. Une fois la structure déformée, les axes de ces sections se croisent à une distance ρ de la ligne moyenne. Cette distance s'appelle « rayon de courbure ».



II) Hypothèses :

De nombreuses hypothèses doivent être posées :

- les structures sont composées de poutres (c.f. théorie des poutres) ;
- les charges sont appliquées de manière très lente et progressive ;
- les déplacements et rotations sont petits ;
- la structure reste dans le domaine élastique ;
- les appuis et liaisons internes sont parfaits ;
- nous négligerons les effets dus à l'effort normal et à l'effort tranchant ;
- nous nous limiterons à l'étude des poutres homogènes (1 seul matériau).

III) Notations :

Nous poserons :

- la longueur d'un tronçon infiniment petit de la poutre : dx ;
- l'équation de la rotation en fonction de l'abscisse de la section : $\omega(x)$;
- l'équation de la flèche : $f(x)$;
- le rayon de courbure : $\rho(x)$;
- la rigidité de la poutre : $EI_{GZ}(x)$ (si celle-ci est variable) et EI_{GZ} (si elle est constante) ;

IV) Etude de la déformée :

4.1) Relation entre la flèche et la rotation :

Prenons un tronçon dx *infinitement* petit de la poutre :

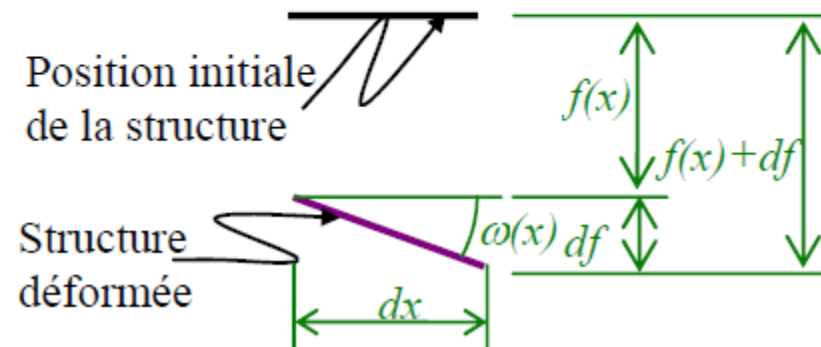
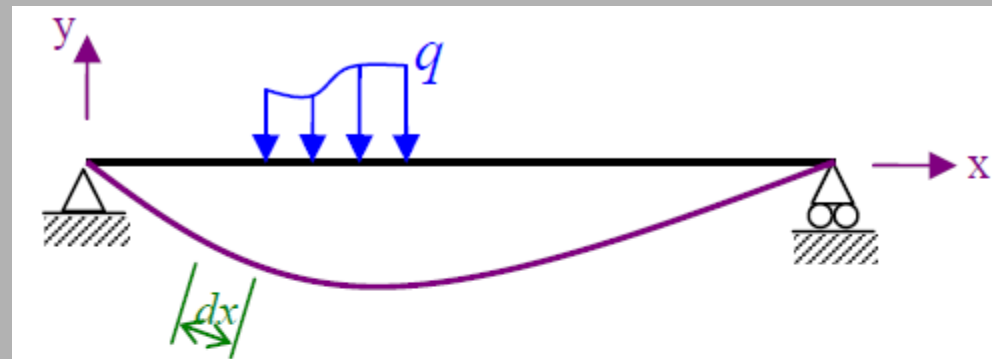
La variation de la flèche vaut df

La déformée de cet élément peut être assimilée à un segment droit :

Nous démontrons donc que :

$$\tan(\omega(x)) = \frac{df}{dx} \approx \omega(x)$$

$$\omega(x) = f'(x)$$



Remarque : la rotation ω peut être assimilée à sa tangente car elle est infinitement petite.

4.2) Relation entre la rotation et le rayon de courbure :

Soient deux sections infiniment proches dont la variation d'abscisse vaut dx .

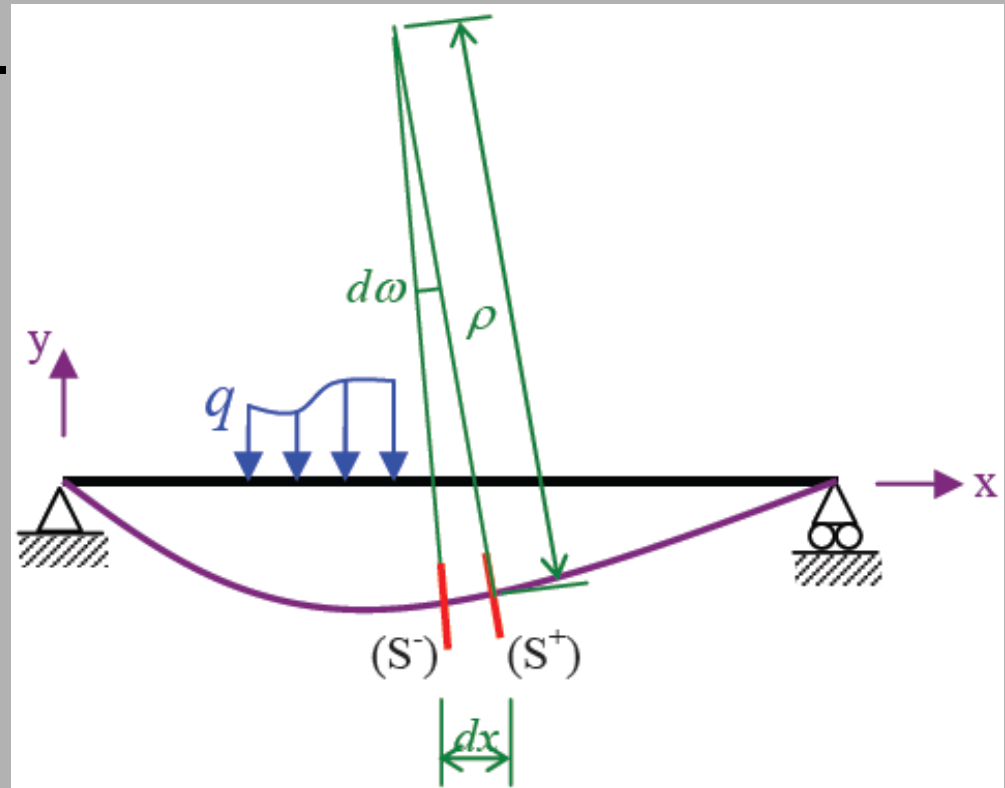
La variation de la rotation de la section en x a la section en $x+dx$ vaut $d\omega$.

On démontre donc que :

$$\tan(d\omega) = \frac{dx}{\rho} \approx d\omega$$

$$\text{donc } \rho = \frac{dx}{d\omega}$$

$$\frac{1}{\rho} = \omega'(x)$$



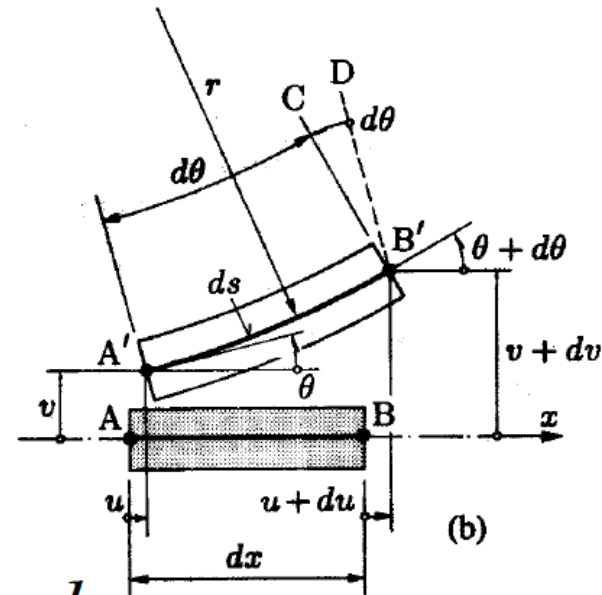
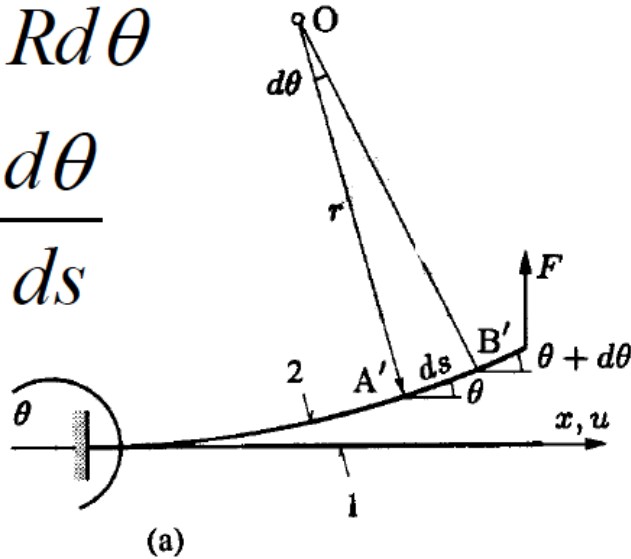
Remarque : la rotation $d\omega$ peut être assimilée à sa tangente car elle est infiniment faible.

Démonstration alternative

■ Petits déplacements, petites rotations

$$ds = R d\theta$$

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{ds}$$



$$\theta \text{ petit} \Rightarrow \cos \theta \approx 1 \Rightarrow ds \approx dx$$

[Frey, 2000, Vol. 2]

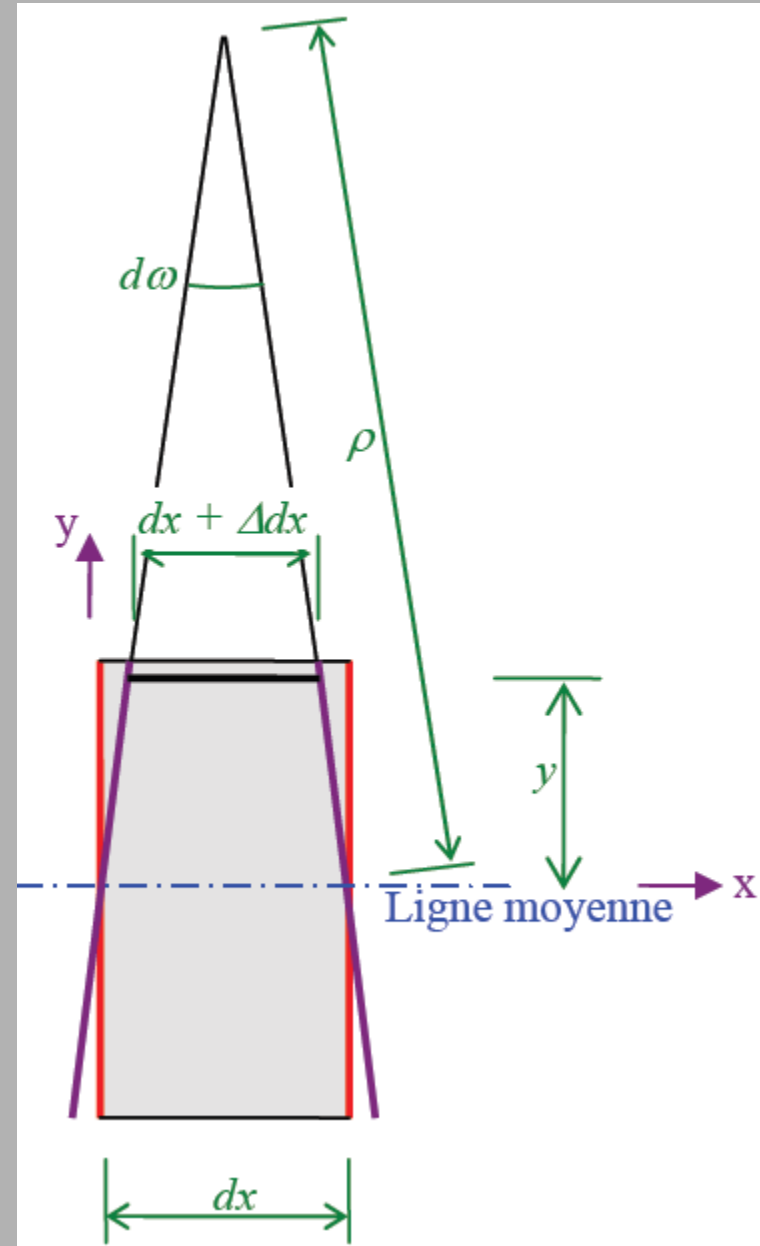
$$\frac{1}{R} \approx \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2 y}{dx^2} \quad \text{car } \theta = \frac{dy}{dx}$$

4.3) Relation entre le moment et le rayon de courbure :

Soit un tronçon dx infiniment petit de la poutre :

Considérons une fibre a l'ordonnée y .

Sous l'action du moment de flexion, cette fibre de longueur initiale dx s'allonge d'une valeur de Δdx .



Remarque : dans le schéma de droite, la valeur de Δdx est négative.

Nous savons que :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x \text{ (c.f. contraintes).}$$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = \varepsilon_x = \frac{\sigma_x(y)}{E} = -\frac{1}{E} \times \frac{M_z(x)}{I_{GZ}(x)} y$$

Dans le schéma de droite :

$$\tan(d\omega) = \frac{dx}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx}{\rho - y}$$

$$\frac{\rho - y}{\rho} = \frac{dx + \Delta dx}{dx} \quad 1 - \frac{y}{\rho} = 1 + \frac{\Delta dx}{dx}$$

Donc :
$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho}$$

Au final :

$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} y$$

4.4) Relation entre la flèche et le moment :

En combinant les différentes relations démontrées :

$$\omega(x) = f'(x)$$

$$\frac{1}{\rho} = \omega'(x)$$

$$\frac{\Delta dx}{dx} = -\frac{y}{\rho} = -\frac{M_z}{EI_{GZ}} y$$

On montre que :

$$f''(x) = \omega'(x) = \frac{1}{\rho} = \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}$$

En conclusion :

$$f(x) = \iint \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx^2$$

$$\omega(x) = f'(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)} dx$$

4.5) Conditions limites :

En intégrant deux fois l'expression


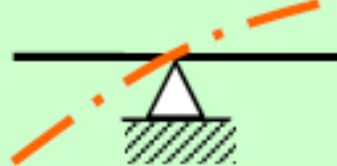

$$\frac{M_z(x)}{EI_{GZ}(x)}$$

, des constantes d'intégration apparaissent.

Afin de déterminer leurs valeurs, il est nécessaire de connaître la flèche ou la rotation en certains points particuliers.

Remarque : le nombre de constantes d'intégration est égal à $2 \times$ le nombre de tronçons.

a) Conditions aux appuis : Nous savons que les appuis bloquent des mouvements :

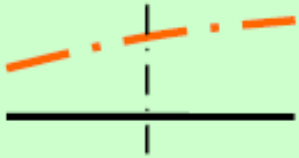

<i>Appui – liaison externe</i>		
<i>encastrement</i>	<i>articulation</i>	<i>appui simple</i>
		
$\omega = 0$ $f = 0$	$f = 0$	$f = 0$

Nous allons donc appliquer les équations au niveau des appuis et ainsi déterminer certaines constantes d'intégration.

b) Conditions de continuité :

Le reste des constantes d'intégration peut être résolu à l'aide des conditions de continuité.

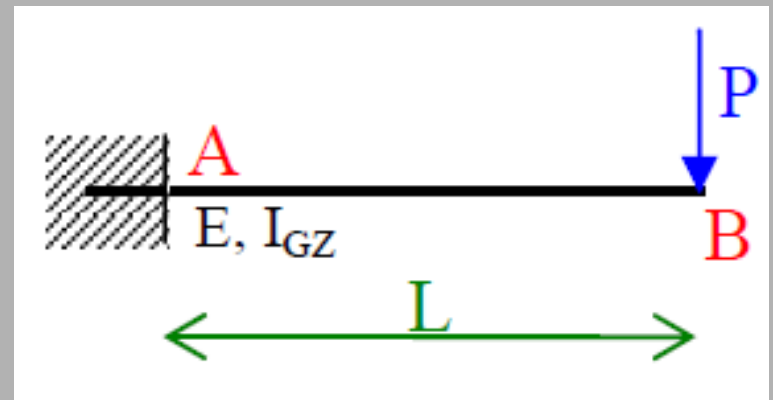
En effet, lorsque l'équation du moment change, 2 nouvelles constantes d'intégration apparaissent. On regardera ainsi s'il y a continuité de la flèche et de la rotation au droit de ce changement d'équation :

<i>Liaison interne</i>	
<i>encastrement</i>	<i>relâchement</i>
	
$\omega_{relative} = 0$ - continuité de la rotation $f_{relative} = 0$ - continuité de la flèche	$f_{relative} = 0$ - continuité de la flèche

Remarque : - lorsqu'il y a continuité de la flèche en x , on a $f(x^-) = f(x^+)$;
 - lorsqu'il y a continuité de la rotation en x , on a $\omega(x^-) = \omega(x^+)$.

Exemple:

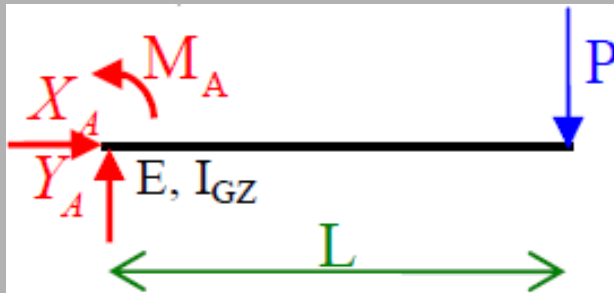
Soit la poutre suivante à rigidité constante :



a) Nature (décomposition minimale) :

$$\left. \begin{array}{l} x = 3 \\ e = 3 \end{array} \right\} \text{structure isostatique}$$

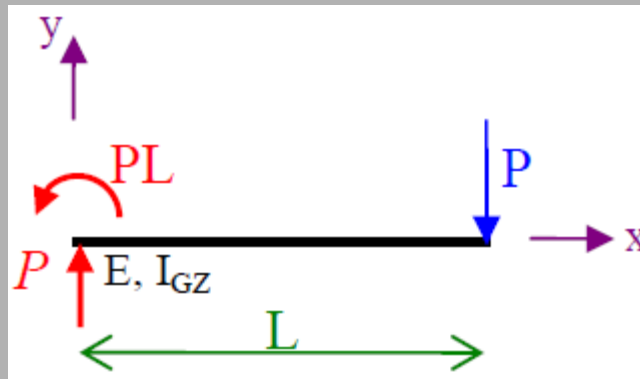
b) Inconnues de liaison :



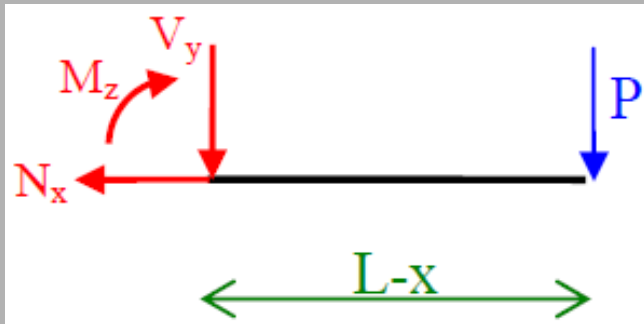
$$\sum F_x = 0 = X_A$$

$$\sum F_y = 0 = Y_A - P$$

$$\sum M_{A/z} = 0 = -PL + M_A$$



c) Sollicitation :



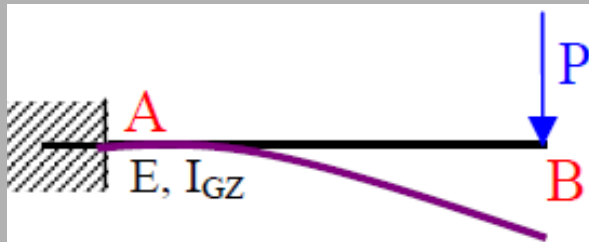
$$N_x(x) = 0$$

$$V_y(x) = -P$$

$$M_z(x) = -P(L-x) = -PL + Px$$

d) Déformée :

d. ①) Allure de la déformée :



d. ②) Intégrations :

$$M_z(x) = -P(L-x) = -PL + Px$$

$$\omega(x) = \int \frac{M_z(x)}{EI_{GZ}} dx = \int \frac{(-PL + Px)}{EI_{GZ}} \times dx = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx + A \right)$$

$$f(x) = \int \omega(x) dx = \int \left[\frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx + A \right) \right] \times dx$$

$$= \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{PL}{2} x^2 + Ax + B \right)$$

d. ③) Conditions limites :

• Conditions aux appuis (CA) :

- encastrement en $x = 0$

$$f(0) = 0$$

$$\omega(0) = 0$$

d. ④) Constantes d'intégrations :

$$\omega(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ} \omega(0) = 0 = + \frac{P}{2} \times 0^2 - PL \times 0 + A \rightarrow A = 0$$

$$f(0) = 0 \rightarrow EI_{GZ} f(0) = 0 = \frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 + B \rightarrow B = 0$$

d. ⑤) Equations :

$$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx \right)$$

$$f(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} x^3 - \frac{PL}{2} x^2 \right)$$

d. ⑥) Flèche maximale :

- Rotation nulle :

$$\omega(x) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{2} x^2 - PLx \right) = 0 \rightarrow EI_{GZ} \omega(x) = 0 = \frac{P}{2} x^2 - PLx$$

$$Px \left(\frac{1}{2} x - L \right) = 0$$

$$\text{solutions : } P = 0 \quad x = 0 \quad x = 2L$$

Nous ne pouvons retenir que $x = 0$, ce qui donne

$$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 \right) = 0$$

- Extrémité de tronçon :

$$f(0) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} 0^3 - \frac{PL}{2} 0^2 \right) = 0$$

$$f(L) = \frac{1}{EI_{GZ}} \left(\frac{P}{6} L^3 - \frac{PL}{2} L^2 \right) = -\frac{PL^3}{3EI_{GZ}}$$

On en conclue que pour cette poutre :

$$f_{max} = f(L) = -\frac{PL^3}{3EI_{GZ}}$$

5.THEORIE DU POTENTIEL INTERNE (Méthodes énergétiques)

5.A. Hypothèses

Lorsque des forces sont appliquées à une structure elles effectuent un travail pour :

- déformer la structure,
- produire de l'énergie cinétique,
- vaincre les résistances de frottement (dissipation en chaleur).

Nous nous placerons dans des conditions telles que l'énergie cinétique et celle dissipée en chaleur soient nulles. Il faut pour cela supposer :

- 1°- que les forces sont appliquées "statiquement", c'est-à-dire sans produire d'accélération,
- 2°- que les frottements aux liaisons sont négligeables,
- 3°- que les frottements internes sont aussi négligeables, c'est-à-dire que le système est parfaitement élastique.

Nous supposons en outre :

4°- que les déplacements sont petits et sans effet sur les forces extérieures,

5°- que le passage de l'état initial à l'état final de déformation est réversible (nous pourrions ainsi appliquer la loi de Hooke).

6° - qu'il ne se produit aucune variation de température.

Soit une structure constituée d'un ensemble de poutres. Pour amener cette structure, par application d'un système de forces extérieures, d'un **état initial naturel** à un **état final caractérisé par un tenseur** contrainte et un tenseur déformation il faut dépenser un travail W .

Si le passage de l'état initial à l'état final se fait de façon réversible, le travail ne dépend que de l'état final (principe de thermodynamique). Ce travail est par définition le **potentiel interne de la structure**.

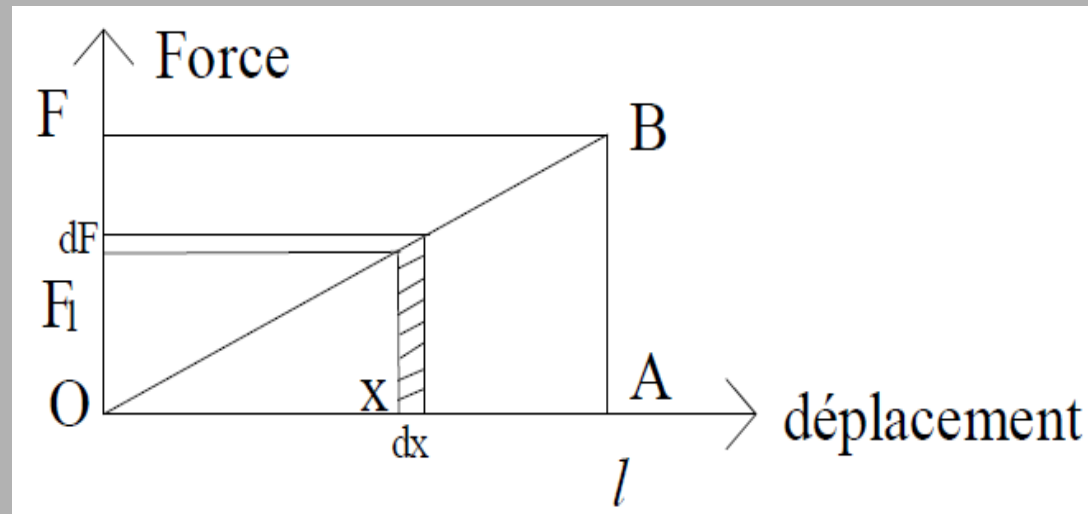
C'est l'énergie potentielle emmagasinée par la structure pendant la déformation.

Rappels:

1) Travail d'une force constante :

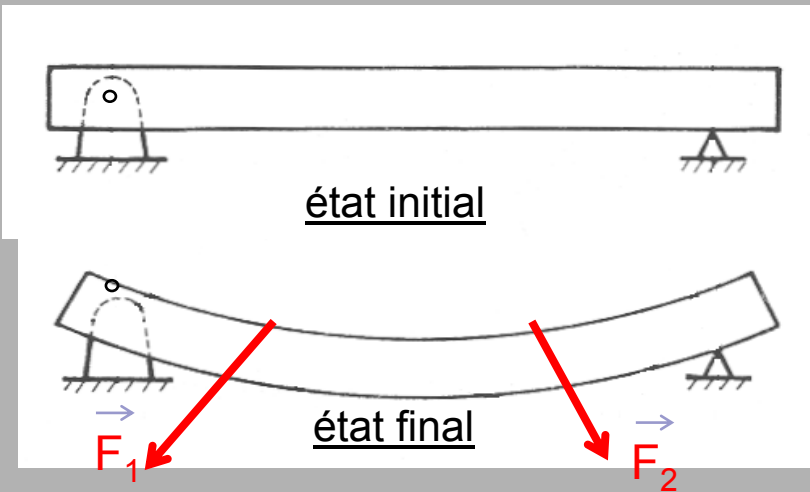
$W = F * \text{déplacement projeté sur sa direction}$. Unité : Nm
(comme un moment)

2) Travail d'une force qui varie de 0 à F pour un déplacement l :



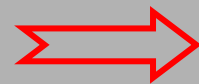
Calculons le travail pour un accroissement dF à partir d'une valeur intermédiaire **F1** : **le déplacement est dx**
et le travail $dW = F1dx$, il se mesure par l'aire hachurée.

Calculons le travail total de 0 à F : $W = 1/2 Fl$: *mesure de l'aire du triangle OAB*



déformation élastique
de la poutre

Théorème de
l'énergie cinétique



$$\left(\begin{array}{l} \text{travail des forces} \\ \text{extérieures} \\ W_{\text{ext}} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{l} \text{travail des forces} \\ \text{intérieures} \\ W_{\text{int}} \end{array} \right) = 0$$

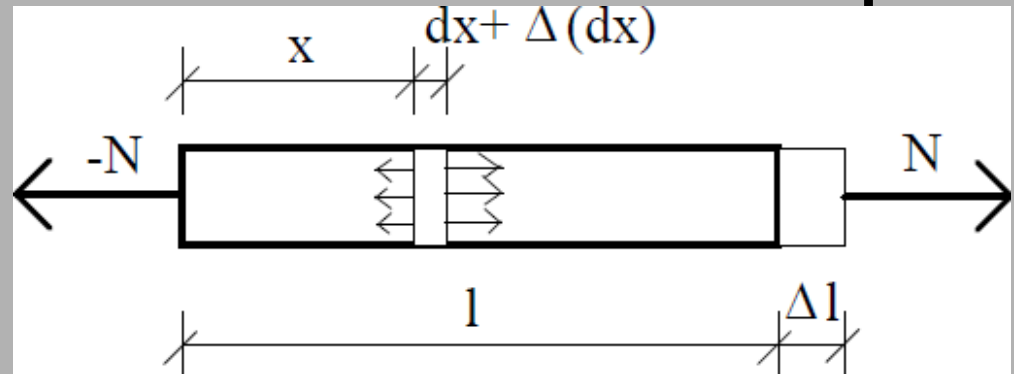
Énergie de déformation : $W_d = -W_{\text{int}} = W_{\text{ext}}$

5.B. Expression du potentiel interne en fonction des sollicitations internes :

On peut donc calculer le potentiel interne d'une poutre en déterminant les déplacements par les équations de Bresse. On peut procéder plus simplement dans le cas **d'une poutre droite**.

a. Effort normal $N(x)$:

$$W = 1/2 N \Delta l$$



Considérons un tronçon dx : $dW = 1/2 N \Delta(dx)$

$$\Delta(dx) = N dx/ES \quad (\text{loi de Hooke})$$

$$dW = 1/2 N^2 dx/ES \quad \text{et pour la poutre entière :}$$

$$W_N = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{N^2}{ES} dx$$

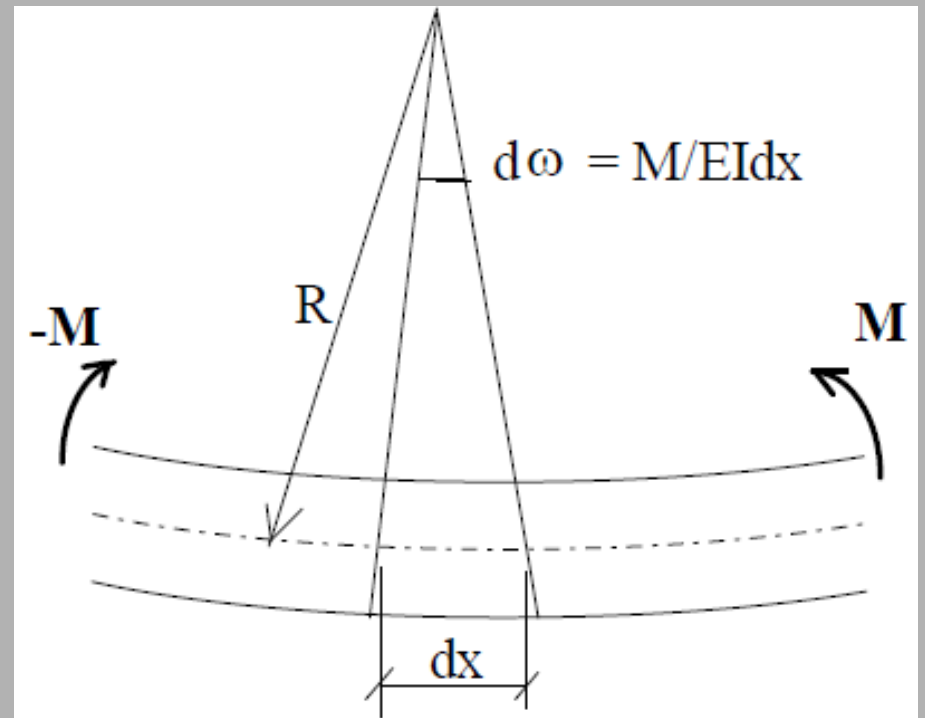
b. Moment de flexion $M(x)$:

On a de même pour un tronçon dx : $dW = 1/2 M d\omega$

$$d\omega/dx = M/EI$$

$dW = 1/2 M^2 dx/EI$ et pour la poutre entière :

$$W_M = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$



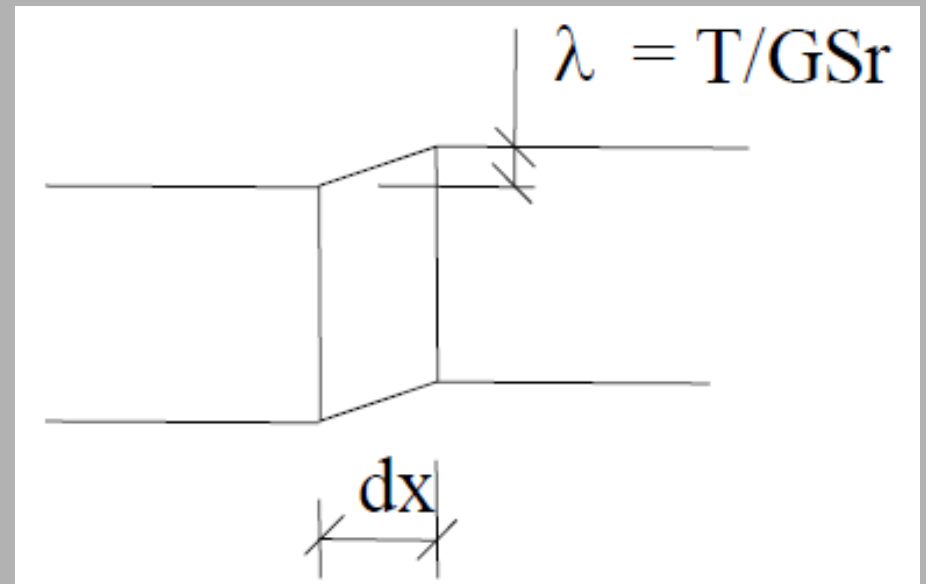
c. Effort tranchant $T(x)$:

$$dW = 1/2 T \lambda dx$$

$$\text{avec: } \lambda = T / GS_r$$

$$dW = 1/2 T^2 dx / GS_r ; \text{ et pour la poutre entière :}$$

$$W_T = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{T^2}{GS_r} dx$$



d. Moment de Torsion M_t :

L'énergie emmagasinée dans le tronçon dx se calcule comme le travail effectué par M_t lors du déplacement $d\varphi_t$:

$$dW = \frac{1}{2} M_t d\varphi_t = \frac{qM_t^2}{2GI_P} dx$$

Et pour l'ensemble de la poutre :

$$W = \frac{1}{2} \int_l \frac{qM_t^2}{GI_P} dx$$

q : coefficient de torsion est une constante dépendant de la forme et des dimensions de la section ($q \approx 40I_p^2/A^4$). Ce facteur vaut 1 pour la section circulaire et est supérieur à 1 pour les autres cas.

d. Cas général :

Si toutes ces actions sont appliquées ensemble on obtient :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{N^2}{ES} + \frac{M^2}{EI} + \frac{T^2}{GS_r} + \frac{M_t^2}{GI_0} \right) .dx$$

N, M et T sont en général des fonction de x.

e. Remarque :

Dans le cas d'une poutre en flexion simple on néglige en général les déformations dues à T, on a donc :

$$W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} .dx$$

- Cas particulier: chargement uniaxial**

$$U = \frac{1}{2} \int_V (\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}) \cdot dV$$

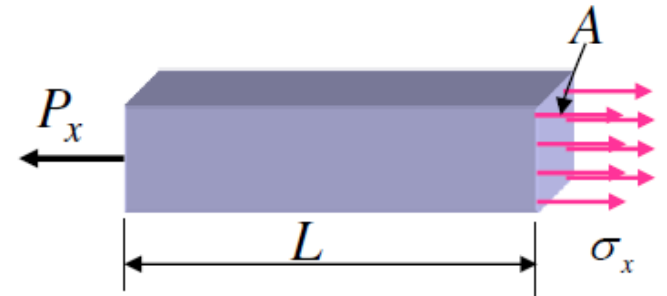
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)]$$

$$U = \int_V \frac{\sigma_x \cdot \varepsilon_x}{2} dV$$

$$U = \int_V \frac{\sigma_x}{2} \cdot \frac{\sigma_x}{E} dV = \frac{1}{2 \cdot E} \int_V \sigma_x^2 dV$$

$$U = \frac{1}{2 \cdot E} \int_0^L \left(\frac{P_x}{A} \right)^2 A \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot E} \left(\frac{P_x}{A} \right)^2 \cdot A \cdot L$$

$$U = \frac{P_x^2 \cdot L}{2 \cdot A \cdot E}$$



• **Cas particulier:** poutre en flexion ordinaire

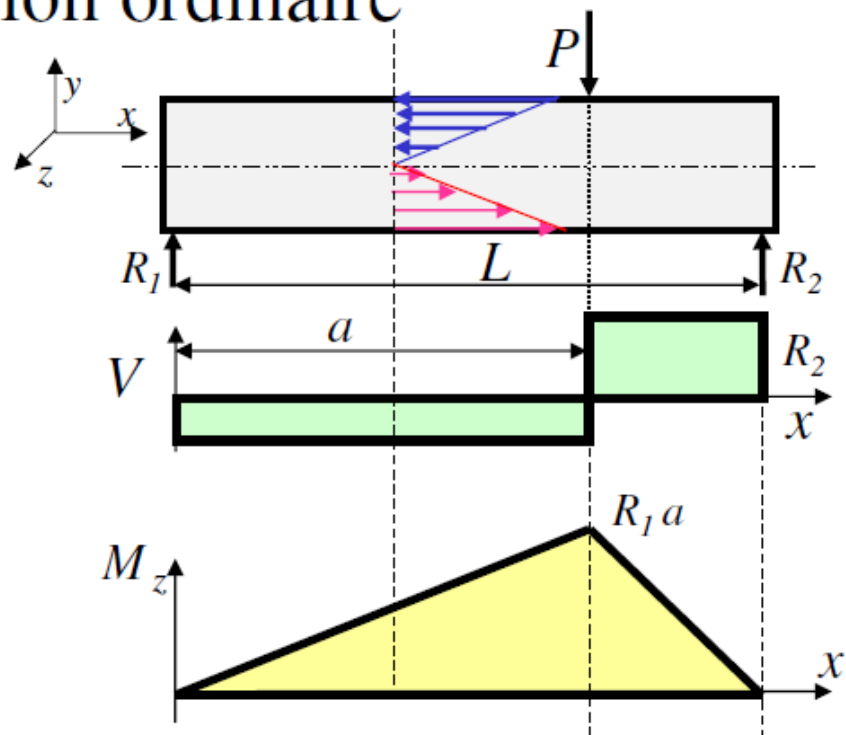
$$U = \int_V \frac{1}{2} \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot dV \quad ; \quad \sigma_x = \frac{-M_z \cdot y}{I}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$U = \int_0^L \int_A \frac{1}{2} \cdot \frac{M_z^2 \cdot y^2}{E \cdot I^2} dA \cdot dx$$

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I^2} dx \int_A y^2 dA$$

où, par définition $\int_A y^2 dA = I \Rightarrow U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I} dx$

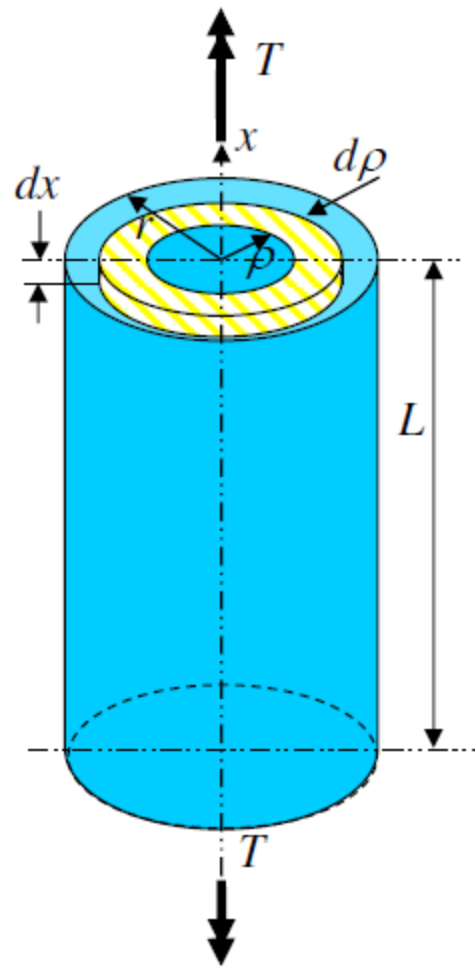


Pour le moment, on néglige l'énergie associée à la contrainte de cisaillement due à l'effort tranchant

Cas particulier: barre en torsion

$$U = \frac{1}{2} \int_V \tau_{x\theta} \cdot \gamma_{x\theta} dV$$
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^r \frac{T \cdot \rho}{J} \cdot \frac{T \cdot \rho}{G J} 2\pi \rho d\rho dx$$
$$U = \frac{1}{2} \int_0^L \int_0^r \frac{T^2}{G J^2} 2\pi \rho^3 d\rho dx$$
$$U = \int_0^L \frac{T^2}{G J^2} \frac{\pi r^4}{4} dx = \int_0^L \frac{T^2}{G J^2} \frac{J}{2} dx$$

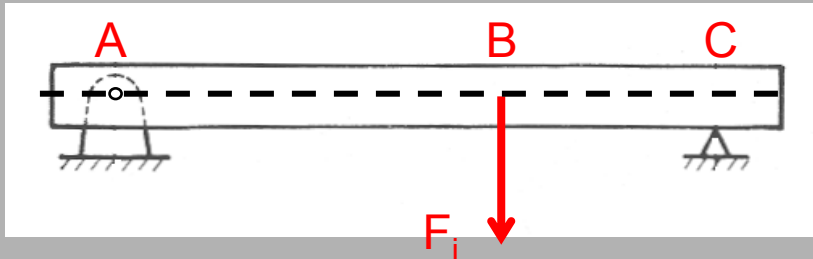
$$U = \frac{1}{2} \frac{T^2 L}{G J}$$



5.C. Théorème de Castigliano

Première forme du théorème :

Théorème : *Dans un système élastique à appuis indéformables, la dérivée de l'énergie de déformation par rapport à l'une des forces agissant sur le système est égale à la projection sur la direction de cette force du déplacement élastique de son point d'application.*



$$\Rightarrow \frac{\partial W}{\partial F_i} = \delta_i$$

Deuxième forme du théorème

Théorème : *La dérivée de l'énergie de déformation, exprimée en fonction des déplacements des points sur lesquels agissent des forces extérieures, par rapport à un de ces déplacements, est égale à la force correspondante, calculée suivant la direction du déplacement.*

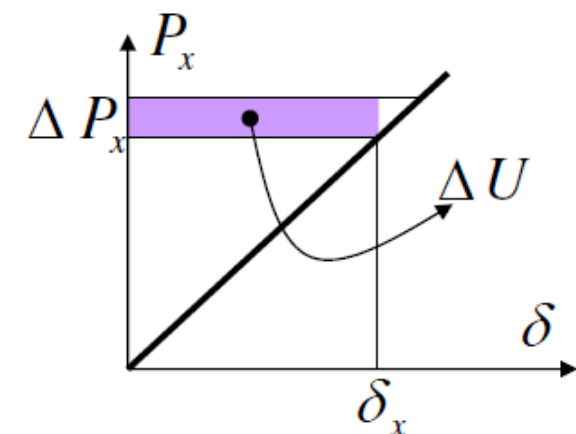
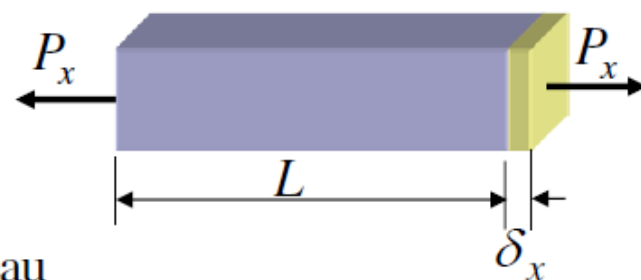
$$\frac{\partial W}{\partial \delta_i} = F_i$$

Cas particulier: chargement uniaxial

$$U = \frac{P_x^2 \cdot L}{2 \cdot A \cdot E} = \frac{1}{2} P_x \left[\frac{P_x L}{A E} \right]$$

$$U = \frac{1}{2} P_x \delta_x$$

δ_x , l'allongement du barreau



$$\Delta U = \delta_x \Delta P_x \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta P_x} = \delta_x$$

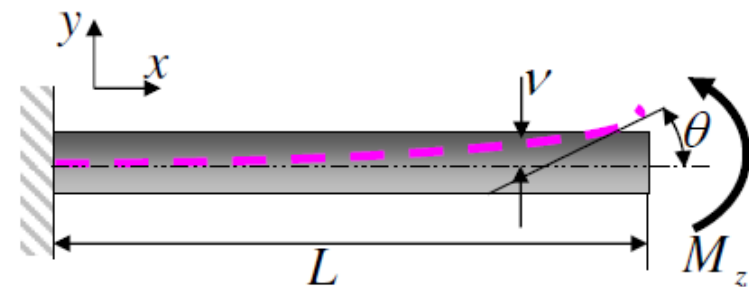
$$\text{Si } \Delta P_x \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial P_x} = \delta_x$$

Cas particulier: poutre en flexion pure

$$U = \int_0^L \frac{M_z^2}{2 \cdot E \cdot I} dx$$

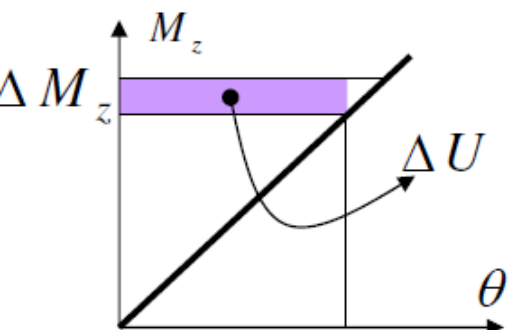
$$U = \frac{M_z}{2} \int_0^L \frac{M_z}{E \cdot I} dx = \frac{M_z}{2} \int_0^L \frac{d^2 v}{dx^2} dx$$

$$U = \frac{M_z}{2} \left[\frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} - \frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} \right] = \frac{M_z}{2} \theta$$



$$\frac{dv}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{dv}{dx} \Big|_{x=L} = \theta$$

Conditions limites



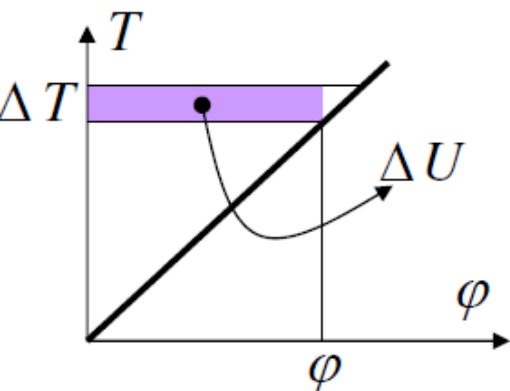
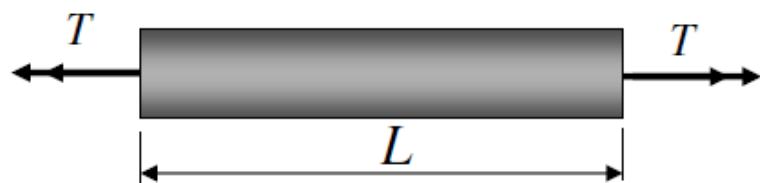
$$\Delta U = \theta \Delta M_z \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta M_z} = \theta \quad \text{Si } \Delta M_z \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial M_z} = \theta$$

Cas particulier: barre en torsion

$$U = \frac{1 T^2 \cdot L}{2 J \cdot G}$$

$$U = \frac{1}{2} T \frac{T \cdot L}{J \cdot G}$$

$$U = \frac{1}{2} T \varphi$$



$$\Delta U = \varphi \Delta T \Rightarrow \frac{\Delta U}{\Delta T} = \varphi$$

$$\text{Si } \Delta T \rightarrow 0 \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial T} = \varphi$$

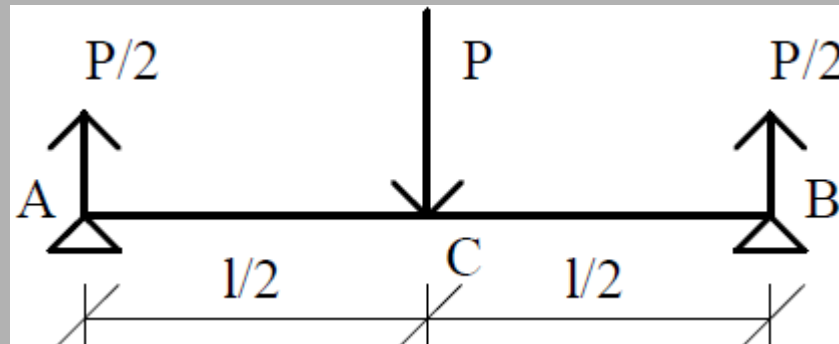
Applications :

a) Calcul de flèche sous charge concentrée :

Remarque : pour calculer $v = \frac{\delta W}{\delta P}$ avec $W = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{EI} dx$

il est en général plus facile de calculer :

$$\frac{\delta W}{\delta P} = \int M \frac{\delta M}{\delta P} \cdot \frac{dx}{EI}$$



$$v_C = \frac{\delta W}{\delta P} \quad \text{et} \quad W = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2}{EI} dx$$

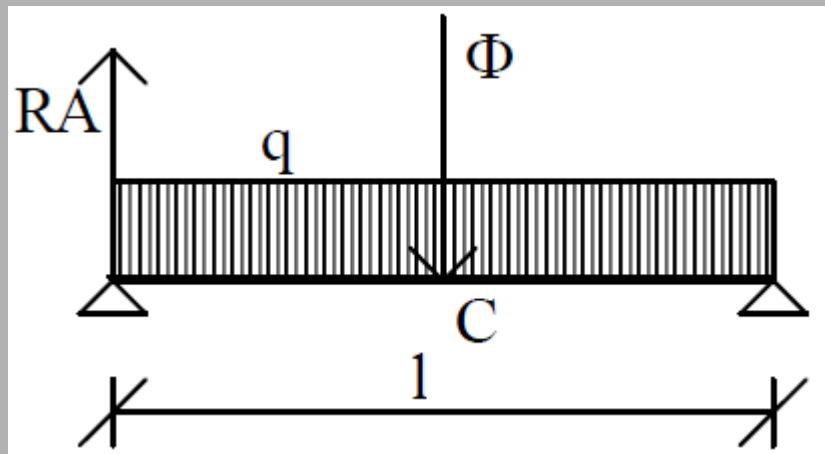
Compte tenu de la symétrie calculons :

$$W = \int_0^{l/2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{et} \quad v_C = 2 \int_0^{l/2} M \frac{\delta M}{\delta P} \cdot \frac{dx}{EI}$$

avec EI constant, $M = Px/2$ et $\delta M/\delta P = x/2$ on obtient :

$$v_C = \frac{Pl^3}{48EI}$$

b) On peut aussi calculer le déplacement d'un point où n'agit aucune force en appliquant une force fictive Φ . On calcule l'énergie potentielle avec cette force, puis sa dérivée partielle et on fait tendre Φ vers 0 . Cette méthode est pratique pour calculer les flèches sous charges réparties :



$$v_C = \frac{\delta W}{\delta \phi} \quad \text{et} \quad W = \int_0^{l/2} \frac{M^2}{EI} dx \quad \text{en utilisant la symétrie}$$

$$M(x) = R_A x - qx^2/2 \quad \text{et} \quad R_A = \Phi/2 + ql/2$$

$$\frac{\delta M}{\delta \phi} = \frac{x}{2} \quad \text{et} \quad v_C = \frac{2}{EI} \int_0^{l/2} M \frac{\delta M}{\delta \phi} dx \quad \text{on obtient :}$$

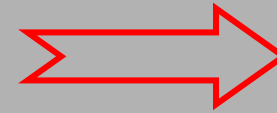
$$v_C = \frac{5ql^4}{384EI}$$

5.D. Théorème de Ménébréa

Théorème : la dérivée partielle de l'énergie de déformation par rapport à chacune des inconnues surabondantes est nulle, à condition que les points d'application des forces ne bougent pas ($U_i = 0$) ou que les sections ne tournent pas ($\theta_i = 0$)

$$\frac{\partial W_d}{\partial R_i} = 0$$

Structure hyperstatique
d'inconnues surabondantes R_i



$$W_d = f(R_i)$$



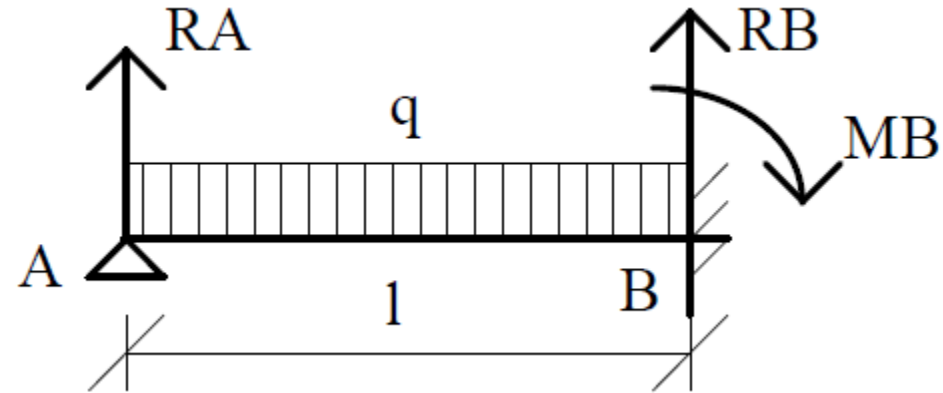
$$\frac{\partial W_d}{\partial R_i} = 0$$



Il y a autant d'équations que d'inconnues hyperstatiques.

Hyperstatique	Isostatique associé	Inconnue hyperstatique	condition cinématique	Ménabréa
		C	$\omega_A = 0$	$\frac{\partial W}{\partial C} = 0$
		F	$u_A = 0$	$\frac{\partial W}{\partial F} = 0$
		N	$u_A^+ = u_A^-$	$\frac{\partial W}{\partial N} = 0$

Application : poutre encastrée-appuyée.



Calculons R_A avec Méthode des Ménabréa : $\frac{\delta W}{\delta R_A} = 0$

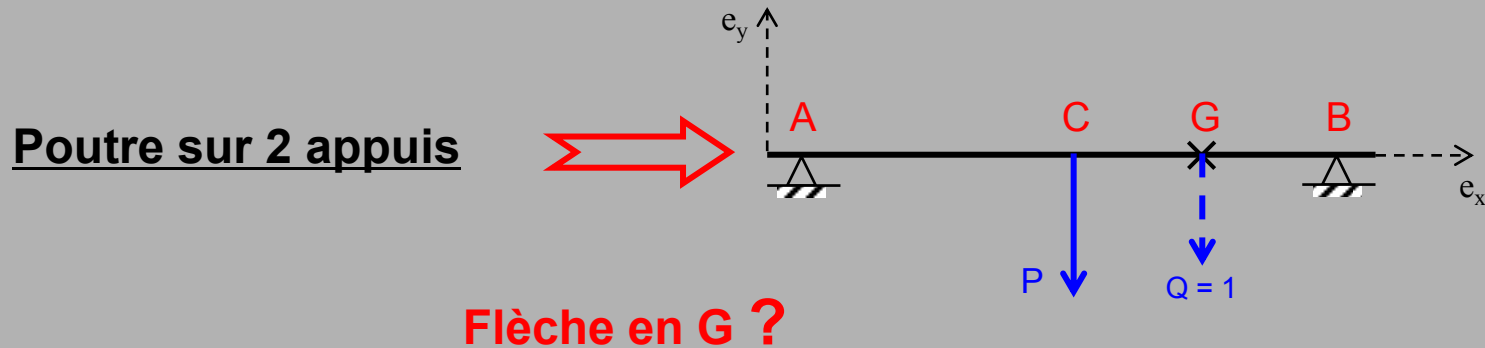
$$M(x) = R_A x - qx^2/2 \quad , \quad \frac{\delta M}{\delta R_A} = x$$

$$\frac{\delta W}{\delta R_A} = \frac{1}{EI} \int_0^l M \frac{\delta M}{\delta R_A} dx = 0 \quad ,$$

on obtient :

$$R_A = \frac{3ql}{8}$$

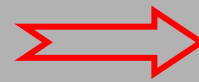
Calcul du déplacement d'un point non chargé



- détermination de l'équation de la déformée
- charge fictive unitaire Q travaillant dans le déplacement $U_y(G)$

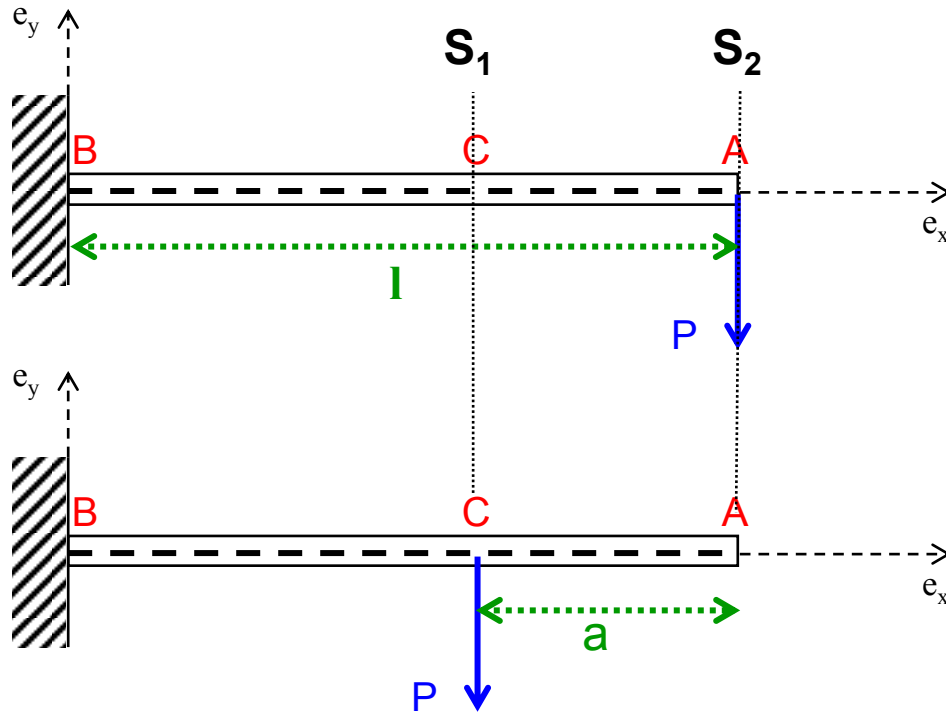


Théorème de
CASTIGLIANO



$$\left(\frac{\partial W_d}{\partial Q} \right)_{Q=0} = U_y(G)$$

Théorème de réciprocité de Maxwell - Betti



$$y_C = \frac{P}{6EI} (2l + a)(l - a)^2$$



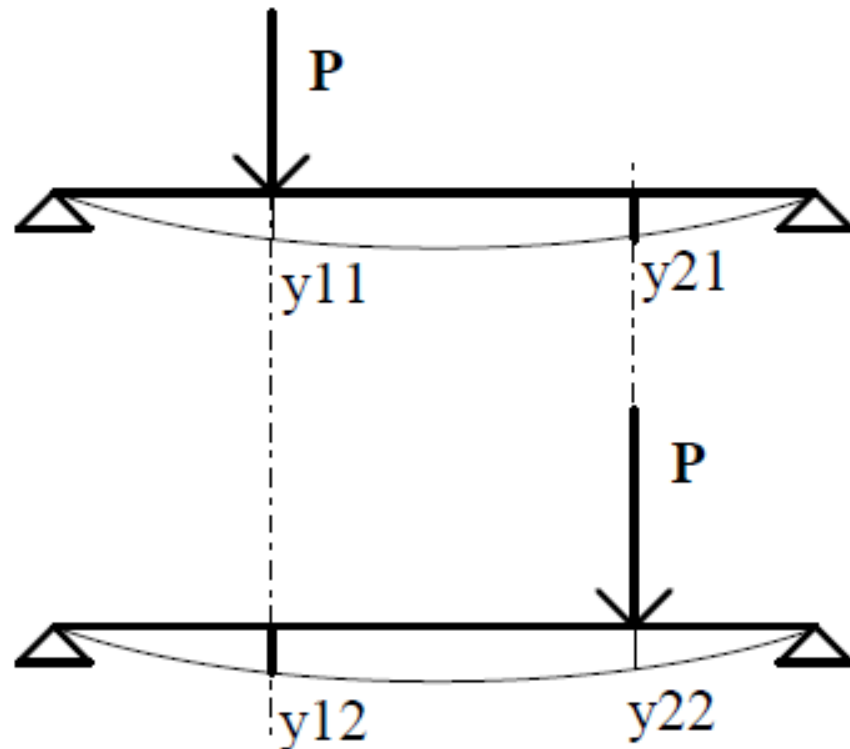
$$y_A = \frac{P}{6EI} (2l + a)(l - a)^2$$

Flèche dans la section S_1 due à la charge P en S_2

=

Flèche dans la section S_2 due à la charge P en S_1

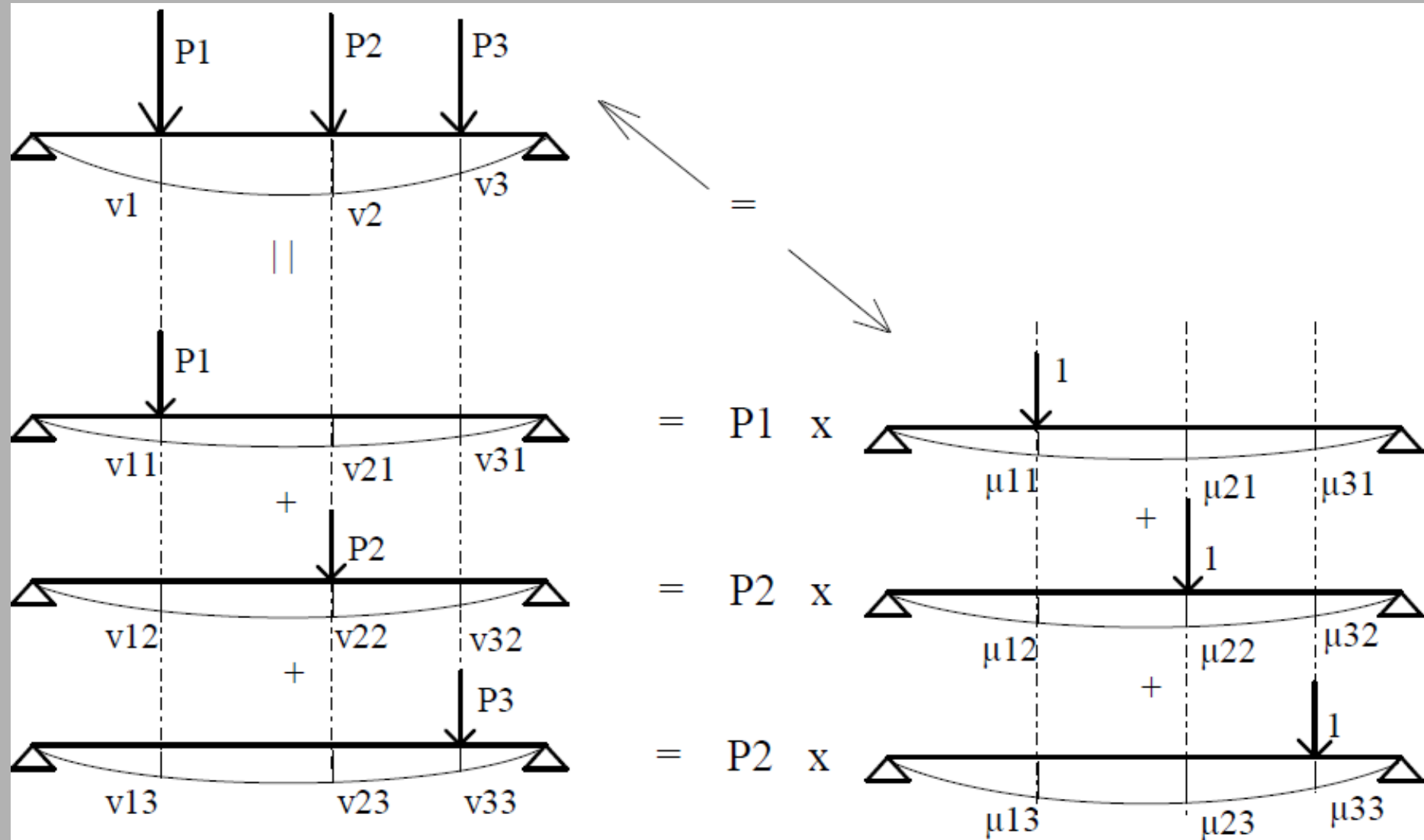
Exemple :



$$P \cdot y_{12} = P \cdot y_{21}$$

$$y_{12} = y_{21}$$

Coefficients d'influence (déplacements sous l'action d'une charge unité) :



$$v_i = \mu_{i1} \cdot P_1 + \mu_{i2} \cdot P_2 + \mu_{i3} \cdot P_3 = \sum \mu_{ij} P_j$$

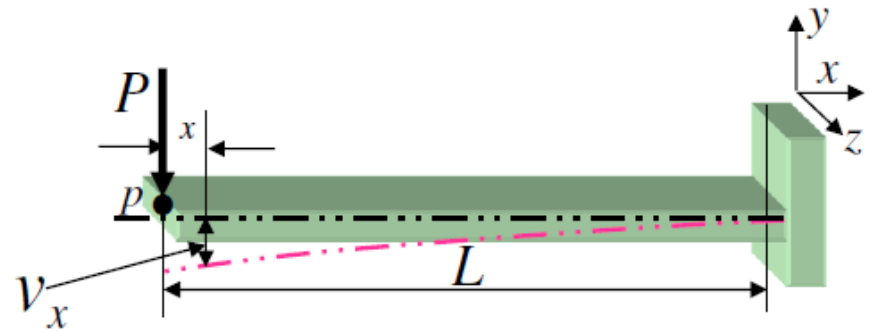
D'après Maxwell on a $\mu_{ij} = \mu_{ji}$

Cette méthode est utilisée pour le tracé des lignes d'influence.

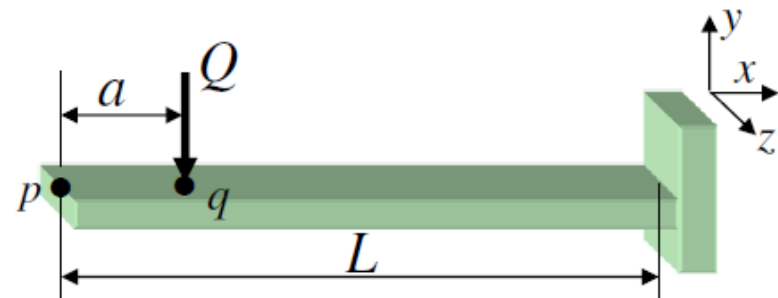
Exemple

L'expression v_x de la déformée de cette poutre lorsqu'une force P agit à une distance L de l'encastrement est :

$$v_x = \frac{-P}{6 \cdot E \cdot I} (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot x + x^3)$$



On demande de trouver l'expression du déplacement du point p lorsqu'une force Q agit en q .



On connaît $(\delta_p)_p$ et $(\delta_q)_p$; on cherche $(\delta_p)_Q$

Du théorème de *Maxwell-Betti*,

on peut écrire : $P(\delta_p)_Q = Q(\delta_q)_P$

D'où : $(\delta_p)_Q = \frac{Q}{P}(\delta_q)_P$

à $x = a$ $v_x = (\delta_q)_P$

$$(\delta_p)_Q = \frac{Q}{P} \left[\frac{-P}{6 \cdot E \cdot I} (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot a + a^3) \right]$$

$$(\delta_p)_Q = \frac{-Q}{6 \cdot E \cdot I} (2 \cdot L^3 - 3 \cdot L^2 \cdot a + a^3)$$

