CHAPITRE I

Equations générales de transport dans un fluide en mouvement

1) Introduction :

Dans un écoulement, des propriétés caractérisant le fluide en mouvement telles que la masse, la quantité de mouvement, la température (ou l'energie interne, ou l'enthalpie) et/ou la concentration d'une espèce, peuvent être produites, transportées et/ou détruites en différents points du domaine d'étude. Dans ce qui suit, l'équation différentielle ponctuelle de transport d'une variable dépendante ϕ dans l'écoulement, sera établie à partir d'un bilan local par rapport à un volume infiniment petit, fixe dans l'espace (approche Eulerienne). Les équations de transport de la masse et de la quantité de mouvement seront traitées en particulier.

2) Mécanismes de transport convectif et diffusif :

La variable dépendante ϕ (unités / kg de fluide porteur) peut être transportée par 2 mécanismes : convectif et diffusif.

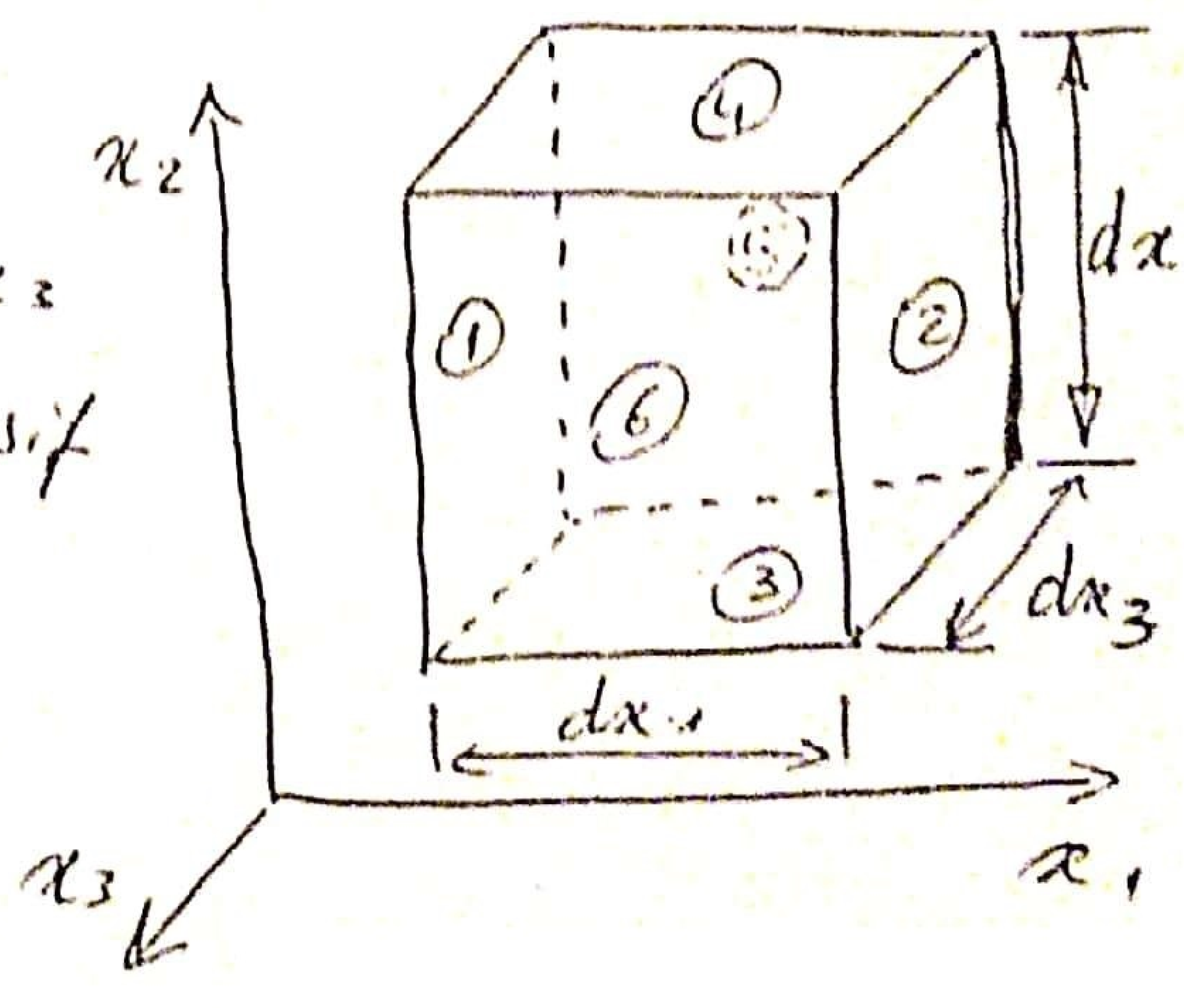
* le transport convectif de ϕ est le transport par le courant même du fluide en mouvement. La quantité de ϕ traversant un élément de surface dS par convection par unité de temps est $\rho U_n \phi \, dS$. C'est le flux convectif. Où U_n est la composante de vitesse normale à dS.

* le transport diffusif de ϕ est le transport par l'interaction des molécules en agitation. La quantité de ϕ traversant l'élément de surface dS par diffusion est $-\Gamma_\phi \dfrac{\partial \phi}{\partial n} dS$
Où Γ_ϕ est la diffusivité associée à ϕ et $\dfrac{\partial \phi}{\partial n}$ est le gradient de ϕ par rapport à la normale à dS.
Il est à noter que les mécanismes de production et de destruction de ϕ dépendent évidemment de la nature de cette variable.

3). Equation générale de transport

Soit un fluide en écoulement tri-dimensionnel instationnaire dans lequel la variable dépendante ϕ peut etre simultanément produite par quelques mécanismes, détruite par d'autres, et/ou transportée par convection et diffusion. le bilan de ϕ par rapport à un volume $dx_1\, dx_2\, dx_3$ fixe dans l'espace est formulé comme suit:

le taux d'accumulation de ϕ à l'intérieur du volume $dx_1 dx_2 dx_3$
= les flux de ϕ convectif et diffusif entrant par les faces 1, 3 et 5
− les flux de ϕ convectif et diffusif sortant par les faces 2, 4 et 6
+ les taux de production de ϕ
− les taux de destruction de ϕ.



Considérons maintenant l'expression mathématique de chacun des termes de cette équation.

* le taux d'accumulation de ϕ :

si la quantité de la variable dépendante dans le volume à l'instant t est $dm\,\phi$

et à l'instant $t+\delta t$ est $dm\,\phi + \frac{\partial}{\partial t}(dm\,\phi)\,\delta t$, dm étant la masse du fluide dans le volume, alors le taux d'accumulation est :

$$\frac{\left\{\left[dm\,\phi + \frac{\partial}{\partial t}(dm\,\phi)\,\delta t\right] - dm\,\phi\right\}}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t}(dm\,\phi) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho\, dx_1\, dx_2\, dx_3\, \phi)$$

$= \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}\, dx_1\, dx_2\, dx_3$ (car x_1, x_2, x_3 et t sont des variables indépendant

* le flux convectif de ϕ entrant net :

le flux convectif entrant par la face ① est $\rho U_1\, dx_2\, dx_3\, \phi$ où U_1 est la composante de vitesse suivant la direction x_1

le flux convectif sortant par la face ② est

$$\rho U_1\, dx_2\, dx_3\, \phi + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1\, dx_2\, dx_3\, \phi)\, dx_1$$

les flux convectifs entrant ou sortant par les faces ③ à ⑥ sont obtenus de façon analogue. Donc le flux convectif entrant net dans le volume est :

$$\rho U_1\, dx_2\, dx_3\, \phi - \left[\rho U_1\, dx_2\, dx_3\, \phi + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1\, dx_2\, dx_3\, \phi)\, dx_1\right]$$
$$+ \rho U_2\, dx_1\, dx_3\, \phi - \left[\rho U_2\, dx_1\, dx_3\, \phi + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho U_2\, dx_1\, dx_3\, \phi)\, dx_2\right]$$
$$+ \rho U_3\, dx_1\, dx_2\, \phi - \left[\rho U_3\, dx_1\, dx_2\, \phi + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho U_3\, dx_1\, dx_2\, \phi)\, dx_3\right]$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho U_1\, dx_2\, dx_3\, \phi)\, dx_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho U_2\, dx_1\, dx_2\, \phi)\, dx_2 - \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho U_3\, dx_1\, dx_2\, \phi)\, dx_3$$
$$= \left[-\frac{\partial(\rho U_1 \phi)}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho U_2 \phi) - \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho U_3 \phi)\right] dx_1\, dx_2\, dx_3$$

puisque x_1, x_2 et x_3 sont des variables indépendantes

* le flux diffusif de ϕ entrant net :

le flux diffusif de ϕ entrant dans le volume par la face ① est $-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\, dx_2\, dx_3$

le flux diffusif sortant par la face ② est

$$\left(-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 dx_3\right) - \left[\left(-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 dx_3\right) + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(-\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1} dx_2 dx_3\right) dx_1\right]$$

les flux diffusifs à travers les faces ③ à ⑥ sont obtenus de manière similaire.

le flux diffusif entrant net dans le volume est après simplification et rearrangement :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right)\right] dx_1 dx_2 dx_3$$

* le taux de production de ϕ net.

Si $\dot{S}_\phi$ et $\dot{P}_\phi$ représentent les taux de production et de destruction de ϕ par unité de masse du fluide respectivement, alors le taux de production net dans le volume est $dm(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi) = \rho\, dx_1 dx_2 dx_3 (\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi)$

* L'équation générale de transport :

Le bilan s'exprime finalement, en divisant tous les termes par le volume $dx_1 dx_2 dx_3$:

- Sous forme développée :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_1 \phi)}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho U_2 \phi) + \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho U_3 \phi) =$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_2}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_3}\right) + \rho(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi)$$

- Sous forme tensorielle :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho U_j \phi) = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_j}\right) + \rho(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi)$$

- Sous forme vectorielle :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho \vec{U} \phi) = \mathrm{div}(\Gamma_\phi\, \mathrm{grad}\, \phi) + \rho(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi)$$

4) Conservation de la masse - Equation de Continuité

Reprenons l'équation de transport d'une variable dépendante quelconque ϕ (unités / kg de fluide porteur) dans un écoulement :

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + div(\rho\vec{V}\phi) = div(\Gamma_\phi \, grad\, \phi) + \rho(\dot{S}_\phi - \dot{P}_\phi)$$

Si la quantité transportable considérée est la masse du fluide lui-même alors :

* $\phi = \dfrac{\text{masse du fluide}}{\text{kg de fluide}} = \dfrac{1\ kg}{kg} = 1$

* la diffusivité $\Gamma_\phi = 0$ (une molécule ne peut céder sa propre masse à une autre molécule)

* les taux de production et de destruction de la masse $\dot{S}_\phi = \dot{P}_\phi = 0$ (la masse n'est ni créée ni détruite)

Donc l'équation de transport de la masse du fluide s'écrit :

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + div(\rho\vec{V}) = 0$$

C'est l'équation de Continuité sous forme vectorielle.

Sous forme développée : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial\rho U}{\partial x} + \dfrac{\partial\rho V}{\partial y} + \dfrac{\partial\rho W}{\partial z} = 0$

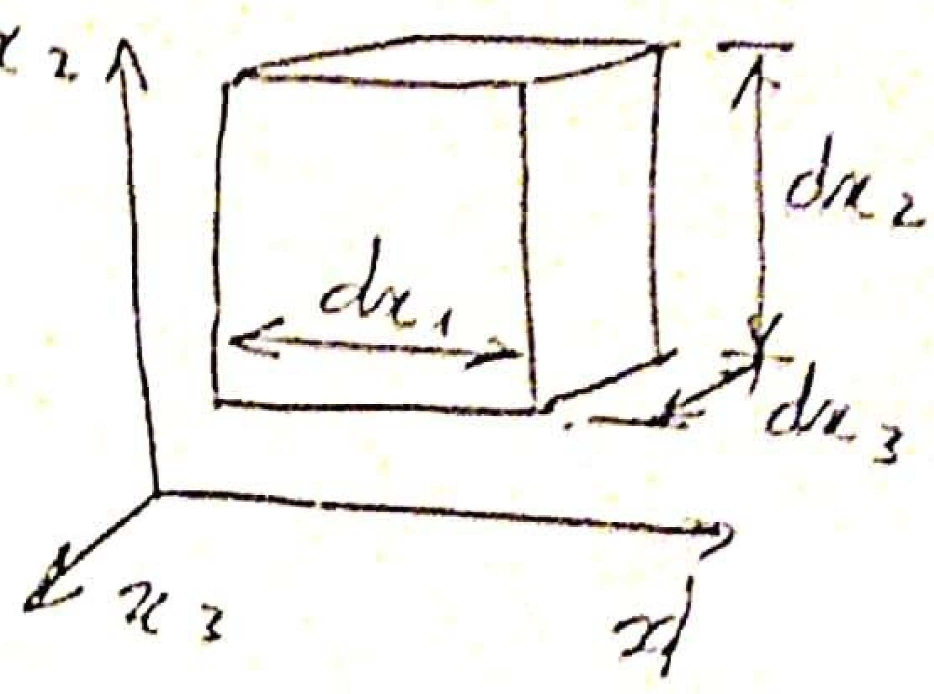
Sous forme tensorielle : $\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \dfrac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_i} = 0$

Si le fluide est incompressible :

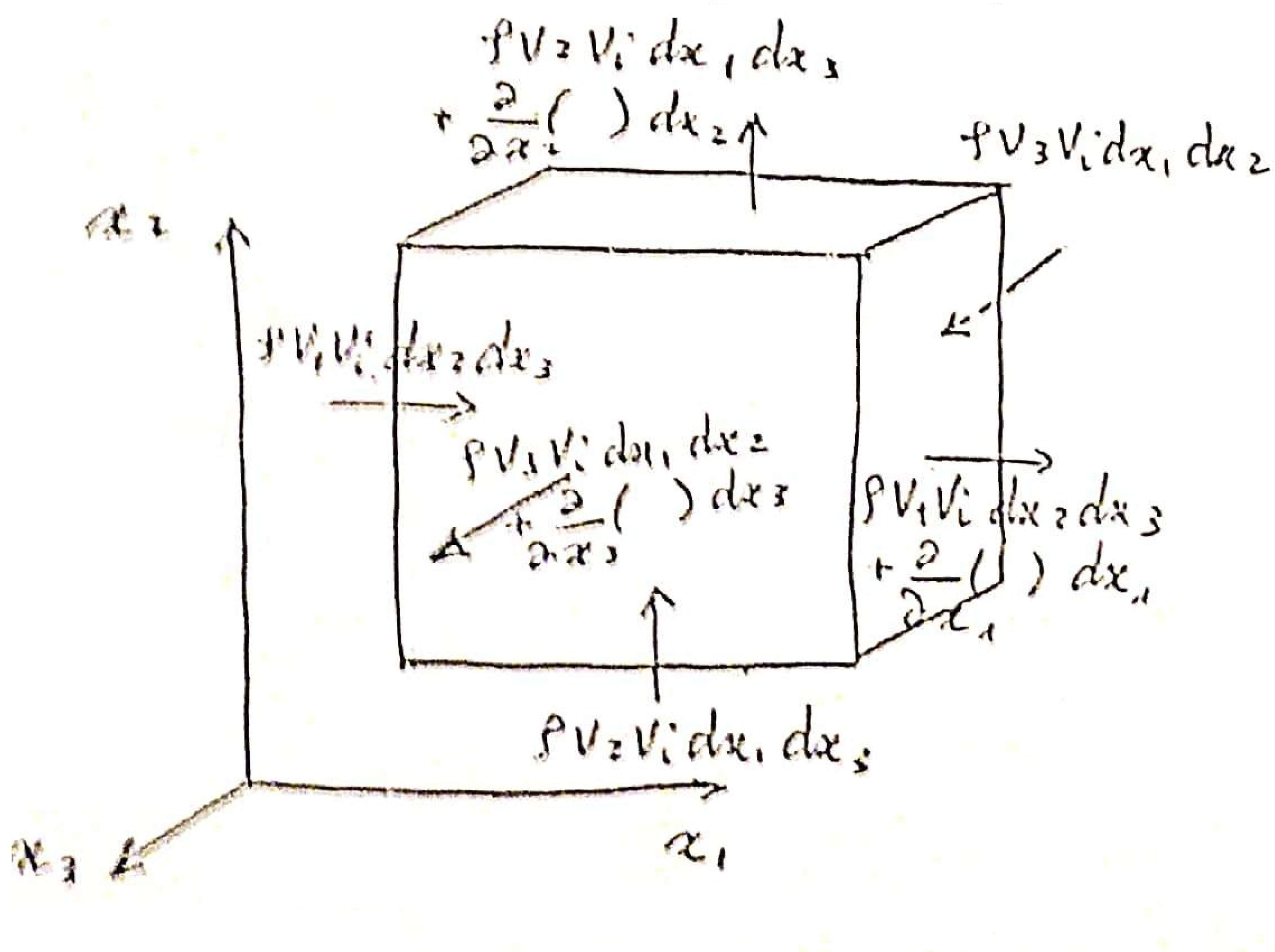
$$div\,\vec{V} = \frac{\partial U_i}{\partial x_i} = \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0$$

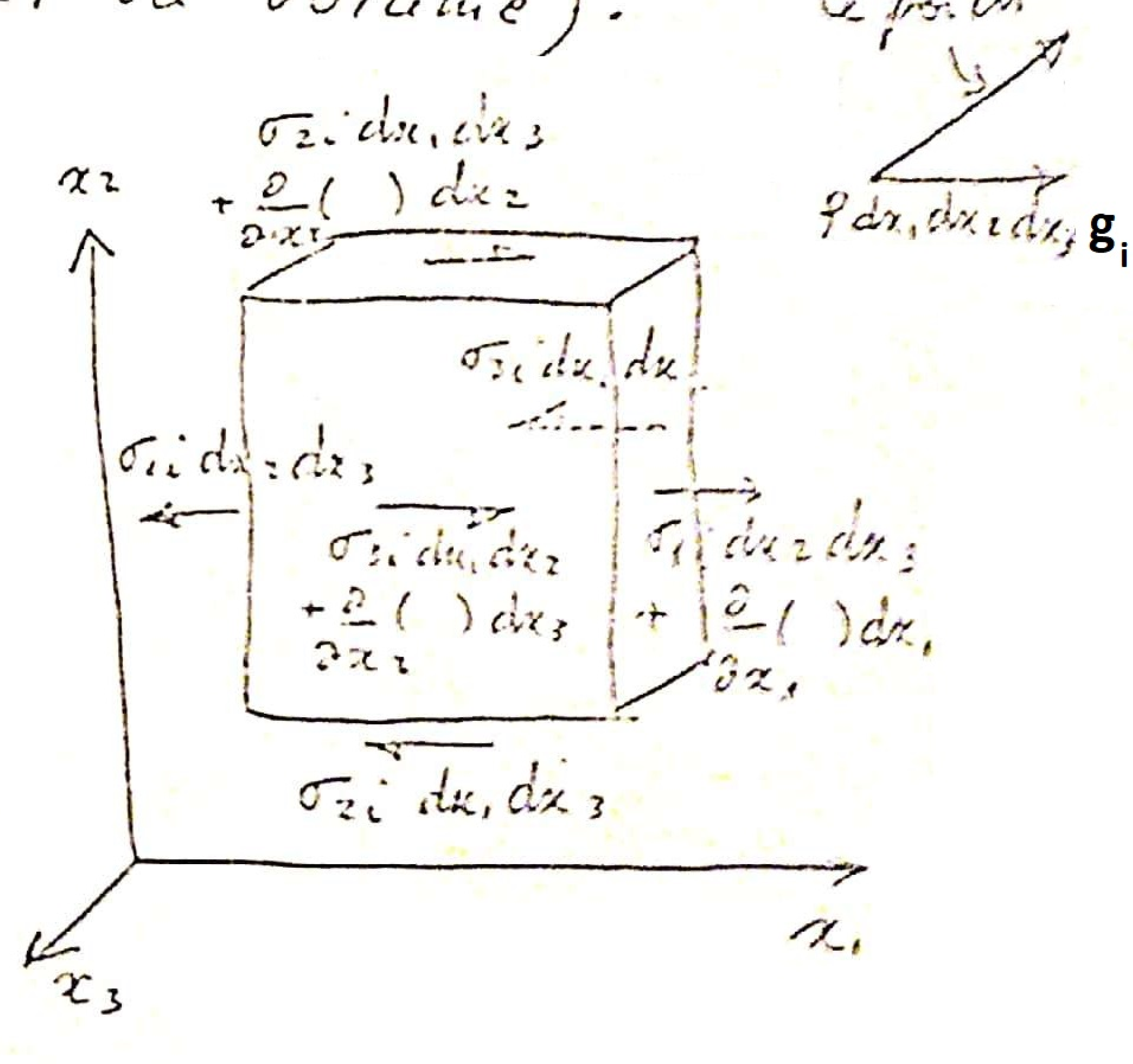
5) Les équations Navier-Stokes :

Ce sont les équations qui régissent le transport des trois composantes de quantité de mouvement dans l'écoulement. Considérons un petit volume $dx_1 dx_2 dx_3$ fixe dans l'espace. Le bilan de la composante de quantité de mouvement suivant x_i ($i = 1, 2$ ou 3) s'exprime :



Le taux d'accumulation de la quantité de mouv^t suivant x_i dans le volume = les flux de q. de m. suivant x_i entrant − les flux de q. de m. suivant x_i sortant + la somme de toutes les composantes de forces externes suivant x_i agissant sur le fluide dans le volume (forces de surface et de volume).





Les flux de q. de m. suivant x_i ($i = 1$ dans ce cas) à travers les différentes faces.

Composantes de forces externes suivant x_i (de surface et de volume)

Ce bilan s'exprime mathématiquement comme suit.