المحاضرة : 07

المحور الرابع

التكامل

أ- تعاريف و قواعد

1- تعريف

لتكن $f: I \longrightarrow \mathbb{R}$ دالة حقيقية معرفة على مجال I ، ولتكن F دالة معرفة وقابلة للإشتقاق على I
نقول أن الدالة F هي دالة أصلية (تكامل) للدالة f إذا كان :

$$F'(x) = f(x) \quad , \quad \forall x \in I$$

2- **ملاحظة** : إذا كانت F هي دالة أصلية للدالة f فإن $F + c$ (حيث c هو عدد ثابت) تضحى كذالك ، كما أن الفرق بين أي دالتين أصليتين لـ f يكون ثابتا

إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال I و F هي دالتها الأصلية فإن المساحة المحصورة بين محور الفواصل و منحنى الدالة f و المستقيمين ذاتا المعادلتين $(x = b$ و $x = a)$ تساوي

$$F(b) - F(a)$$

ونكتب $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ ونسميه التكامل المحدود للدالة f بين النقطتين a و b

3- قواعد التكامل

الدالة	الدالة الأصلية
af	$a\int f$
$f + g$	$\int f + \int g$
$f'.g$	$fg - \int fg'$
$\frac{f'}{f}$	$Ln\|f\|$ + c
$\frac{f'}{f^n}$, $n \neq 1$	$\frac{1}{1-n}.f^{1-n}$ + c
$f'e^f$	e^f + c
$f'sinf$	$-cosf$ + c
$f'cosf$	$sinf$ + c
$f'tgf$	$Ln\|cosf\|$ + c
$\frac{f'}{\sqrt{1-f^2}}$	$arcsinf$ + c
$\frac{f'}{1+f^2}$	$arctgf$ + c

الدالة	الدالة الأصلية
a ثابت	$ax + c$
x^a , $a \neq -1$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$ + c
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$ + c
$\frac{1}{x}$	$Ln\|x\|$ + c
$\frac{1}{x^n}$, $n \neq 1$	$\frac{1}{1-n}.x^{1-n}$ + c
Lnx	$xLnx - x$ + c
e^x	e^x + c
$sinx$	$-cosx$ +c
$cosx$	$sinx$ + c
tgx	$Ln\|cosx\|$ + c
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arcsinx$ + c

4- **أمثلة**: أحسب التكاملات التالية

1) $\int xLnx\, dx$, 2) $\int sinxcos^2 x\, dx$, 3) $\int arcsinx\, dx$

1- $\int \underbrace{x}_{u'} \underbrace{Lnx}_{v} dx = uv - \int uv'$

$= \frac{1}{2}x^2.Lnx - \frac{1}{2}\int x^2.\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\left(Lnx - \frac{1}{2}\right) + c$

2- $\int sinxcos^2 xdx = -\int(-sinx)cos^2xdx = -\frac{1}{3}(cosx)^3 + c$

3- $\int \underbrace{1}_{u'} \underbrace{arcsinx}_{v} dx = xarcsinx + \frac{1}{2}\int \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \sqrt{1-x^2}$ +c

5- التكامل بتغيير المتغير

لتكن f دالة مستمرة على مجال $[a , b]$ ولتكن φ دالة مستمرة من $[\alpha , \beta]$ نحو $[a , b]$ وقابلة للإشتقاق على$[\alpha , \beta]$ ومشتقتها φ' مستمرة على $[\alpha , \beta]$ حيث $\varphi(\alpha) = a$ و $\varphi(\beta) = b$

إذن $$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\varphi'(t)dt$$

مثال أحسب التكامل : $I = \int_1^e \frac{(Lnt)}{t}dt$

نضع $\varphi(t) = Lnt = x$ ينتج $\varphi'(t)dt = dx$ أي $\frac{1}{t}dt = dx$ ومنه

$$I = \int_{\varphi(1)}^{\varphi(e)} xdx = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$$

6- الدوال الزائدية

نعرف الدوال th , sh , ch كما يلي:

$$chx = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \ , \ shx = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) \ , \ thx = \frac{shx}{chx}$$

لدينا :

1) $\forall x \in \mathbb{R} : ch^2x - sh^2x = 1$
2) $ch'x = shx$
3) $sh'x = chx$
4) $th'x = \frac{1}{ch^2x} = 1 - th^2x$

7- الدوال العكسية للدوال الزائدية

<u>الدالة $\boldsymbol{Argch}$</u>

الدالة chx مستمرة ومتزايدة تماما من$]0 \ , +\infty[$ نحو $]1 \ , +\infty[$ فهي تقابل إذن تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $Argch$

$$Argch : \ [1 \ , +\infty[\longrightarrow [0 \ , +\infty[$$

$$chx = t \Leftrightarrow Argcht = x$$

وبما أن الدالة المشتقة sh لا تنعدم على $]0 \ , +\infty[$ فإن الدلة العكسية $Argch$ قابلة للإشتقاق على $]1 \ , +\infty[$ ولدينا

$$Argch't = \frac{1}{sh(Argcht)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ch^2(Argcht)-1}} = \frac{1}{\sqrt{t^2-1}}$$

الدالة $Argsh$

الدالة shx مستمرة ومتزايدة تماما من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$ فهي تقابل إذن تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $Argsh$

$$Argsh:\ ]-\infty\ ,+\infty\ [\longrightarrow]-\infty\ ,+\infty\ [$$

$$shx = t \Leftrightarrow Argsht = x$$

وبما أن الدالة المشتقة ch لا تنعدم على $\mathbb{R}$ فإن الدلة العكسية $Argsh$ قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا

$$Argsh't = \frac{1}{ch(Argsht)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+sh^2(Argsht)}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

الدالة $Argth$

الدالة th مستمرة ومتزايدة تماما من $]\ 0\ ,+\infty\ [$ نحو $]-1\ ,+1\ [$ فهي تقابل إذن تقبل دالة عكسية نرمز لها بالرمز $Argth$

$$Argth:\ ]-1\ ,+1\ [\ \longrightarrow]0\ ,+\infty\ [$$

$$thx = t \Leftrightarrow Argtht = x$$

وبما أن الدالة المشتقة $1-th^2t$ لا تنعدم على $]\ 0\ ,+\infty\ [$ فإن الدلة العكسية $Argth$ قابلة للإشتقاق على $]-1\ ,+1\ [$ ولدينا

$$Argth't = \frac{1}{th'(Argtht)}$$

$$= \frac{1}{1-th^2(Argth)}$$

$$= \frac{1}{1-t^2}$$

في الأخير نحصل على الجدول

الدالة	الدالة الأصلية
$\frac{f'}{\sqrt{f^2-1}}$	$Argchf + c$
$\frac{f'}{\sqrt{1+f^2}}$	$Argshf\ +\ c$
$\frac{f'}{1-f^2}$	$Argthxf\ +\ c$

الدالة	الدالة الأصلية
$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$	$Argchx + c$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$Argshx\ +\ c$
$\frac{1}{1-t^2}$	$Argthx\ +\ c$